DOI: 10.37863/umzh.v73i9.6682

УДК 517.54

О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ ДОБУТКІВ ДЕЯКИХ СТЕПЕНІВ ВНУТРІШНІХ РАДІУСІВ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЕЙ

In this paper, we consider the problem of extreme partition of the complex plane, which is well-known in the geometric theory of functions. We obtain estimates of the maximum value for the product of some powers of inner radii of n disjoint domains in the complex plane with respect to n arbitrary points of the plane. Estimates found in this paper can be applied to various problems of the geometric theory of functions.

Розглядається відома проблема геометричної теорії функцій про екстремальне розбиття комплексної площини. Отримано оцінки максимуму добутку деяких степенів внутрішніх радіусів n довільних взаємно неперетинних областей відносно n довільних точок комплексної площини, одна з яких може бути нескінченно віддаленою. Знайдені оцінки можуть бути використані в різних задачах геометричної теорії функцій.

Вступ. Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ — комплексна площина і $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ — розширена комплексна площина, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Нехай функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$.

Означення 1. *Величина* $R(B, a) = |f'(0)|$ *називається конформним радіусом області* B *в точці* a.

Означення 2. *Функцією Гріна* $g_B(z, a)$ *області* B *з полюсом у скінченній точці* $a \in B$ *називається дійсна функція, гармонічна по* z *в* $B \backslash a$, *яка прямує до нуля, коли* z *прямує до межі* B, *і для якої в деякому околі точки* a *має місце асимптотичний розклад*

$$g_B(z, a) = -\ln|z - a| + \gamma + o(1), \quad z \to a;$$

якщо ж $a = \infty$, *то*

$$g_B(z, a) = \ln|z| + \gamma + o(1), \quad z \to a.$$

Означення 3. *Внутрішнім радіусом* $r(B, a)$ *області* B *відносно точки* a *називається величина* e^{γ} (*див., наприклад*, [1, *с.* 13, 14]).

Зазначимо, що для однозв'язних областей внутрішній радіус області дорівнює її конформному радіусу.

В даній роботі вивчається така проблема.

Проблема 1. *Нехай* n — *деяке натуральне число,* $n \geq 3$, α_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякі додатні дійсні числа,* a_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякий набір точок комплексної площини. Знайти максимум добутку*

$$\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k}, \tag{0.1}$$

де B_k, $k = \overline{1, n}$, — *довільний набір таких областей, що* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Дана проблема належить до так званих екстремальних задач про неперетинні області геометричної теорії функцій комплексної змінної. Виникнення в теорії однолистих функцій екстремальних задач про неперетинні області пов'язане з роботою М. О. Лаврентьєва [2], де було вперше поставлено і розв'язано задачу про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей, а саме, отримано такий результат: якщо a_1 і a_2 — скінченні точки, то для будь-якої пари неперетинних однозв'язних областей D_1 і D_2 такої, що $a_k \in D_k$, $k = 1, 2$, виконується нерівність

$$R(D_1, a_1) R(D_2, a_2) \leq |a_1 - a_2|^2, \tag{0.2}$$

де знак рівності досягається для півплощин D_k і точок a_k, симетричних відносно їхньої спільної межі. Пізніше Г. М. Голузін узагальнив задачу М. О. Лаврентьєва на випадок довільного скінченного числа $n,\ n \geq 3$, взаємно неперетинних однозв'язних областей $B_k,\ a_k \in B_k \subset \mathbb{C}$ ($\{a_k\}_{k=1}^n$ — довільні фіксовані скінченні та різні точки комплексної площини), а при $n = 3$ отримав точну оцінку для добутку конформних радіусів трьох неперетинних областей [3, с. 165]

$$\prod_{k=1}^{3} R(B_k, a_k) \leq \frac{64}{81\sqrt{3}} |a_2 - a_1||a_3 - a_1||a_3 - a_2|,$$

в якій знак рівності досягається, з точністю до дробово-лінійних перетворень, тільки для областей, які є рівними кутами, і точок, які лежать на бісектрисах цих кутів на однакових відстанях від їхньої спільної вершини. Для $n = 4$ Г. В. Кузьміна в роботі [4] показала, що оцінка добутку конформних радіусів чотирьох неперетинних однозв'язних областей зводиться до проблеми найменшої ємності у визначеній сім'ї континуумів, і отримала точну нерівність

$$\prod_{k=1}^{4} R(B_k, a_k) \leq \frac{9}{4^{8/3}} \left(\prod_{1 \leq k < l \leq 4} |a_l - a_k| \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Для $n \geq 5$ повного розв'язку цієї проблеми на даний час не існує.

Л. І. Колбіна [5] розглянула дещо іншу задачу, а саме, задачу про максимум J_0 виразу $J = \left|(f_1'(0))^{\alpha}(f_2'(0))^{\beta}\right|$, де $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, функції f_1 і f_2 регулярно і однолисто відображають одиничний круг $|z| < 1$ на неперетинні області B_1 і B_2 відповідно, причому $f_1(0) = a_1$, $f_2(0) = a_2,\ a_1,\ a_2$ — деякі різні точки комплексної площини (іншими словами, задачу про максимум виразу $J = R^{\alpha}(B_1, a_1) R^{\beta}(B_2, a_2)$, де $B_1,\ B_2$ — неперетинні однозв'язні області, причому $a_1 \in B_1,\ a_2 \in B_2$), і встановила, що

$$J_0 = \frac{4^{\alpha+\beta}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{|\alpha - \beta|^{\alpha+\beta}} \left| \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right|^{2\sqrt{\alpha\beta}} |a_l - a_2|^{\alpha+\beta}.$$

Крім того, в [6] було знайдено максимум I_0 виразу

$$I = R^{\alpha}(B_1, a_1) R^{\beta}(B_2, a_2) R^{\beta}(B_3, a_3)$$

в аналогічній задачі і встановлено, що

$$I_0 = A_{\alpha,\beta,\gamma} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta-\gamma} |a_1 - a_3|^{\alpha-\beta+\gamma} |a_2 - a_3|^{-\alpha+\beta+\gamma},$$

де

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{4^{\alpha+\beta+\gamma}\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma}\left|2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2\right|^{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\alpha\gamma}-\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)}}{\left|(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2-\gamma\right|^{2\sqrt{\alpha\beta}}\left|(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2-\alpha\right|^{2\sqrt{\beta\gamma}}\left|(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})^2-\beta\right|^{2\sqrt{\alpha\gamma}}}.$$

Деякі нерівності щодо конформних радіусів було отримано також в роботі [7].

М. О. Лебедєв у монографії [8, с. 32, 33] розглянув таку екстремальну задачу про добуток конформних радіусів: на площині w дано n різних фіксованих точок $a_k,\ k=\overline{1,n},\ n>3$, та n додатних дійсних чисел $\gamma_k,\ k=\overline{1,n}$. Що можна сказати про максимум добутку

$$\prod_{k=1}^{n} R^{\gamma_k}\left(B_k,a_k\right)\longrightarrow\max,\quad n>3,$$

де $B_k,\ k=\overline{1,n},$ — довільні взаємно неперетинні однозв'язні області, такі, що $a_k\in B_k$, $k=\overline{1,n}$? Однак на даний час цю задачу в загальному випадку не розв'язано, вдалось отримати її розв'язок лише в часткових випадках. Ця задача є безпосереднім узагальненням попередніх результатів М. О. Лаврентьєва, Г. М. Голузіна, З. Нехарі, Дж. Дженкінса.

Крім того, М. О. Лебедєв отримав такий результат [8, с. 220]: нехай $\left\{f_l(z)\right\}_{l=0}^{n}$ — деякий набір функцій, які конформно і однолисто відображають відкритий одиничний круг відповідно на неперетинні області $\{B_l\}_{l=0}^{n}$ так, що $f_l(0)=a_l$, де a_l — деякий набір фіксованих скінченних точок, і $\gamma_l,\ l=\overline{0,n},$ — фіксовані комплексні числа, такі, що $\sum_{l=0}^{n}\gamma_l=0$ і $\sum_{l=0}^{n}|\gamma_l|\neq0$. Тоді виконується нерівність

$$\prod_{l=0}^{n}\left|f_l'(0)\right|^{|\gamma_l|^2}\leq\prod_{0\leq k<l\leq n}|a_k-a_l|^{-2\mathrm{Re}\,(\overline{\gamma_l}\gamma_k)}\,. \tag{0.3}$$

Деякі узагальнення нерівності (0.3) для випадку дійсних γ_l було запропоновано в роботі [9].

У більшості із вказаних робіт регулярні функції задовольняли нормуючу умову: точка $z=0$ при відображенні цими функціями переходила в деякі різні, але фіксовані точки $a_k,\ k=\overline{1,n}$, комплексної площини. В 1968 р. П. М. Тамразов у роботі [10] висунув ідею, яка полягала в тому, що точкам $a_k,\ k=\overline{1,n}$, можна надавати деяку „свободу". Внаслідок цих результатів тематика отримала новий поштовх для свого розвитку, зокрема, в роботах [1 – 15].

Згодом дані задачі було узагальнено для випадку багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів. Найбільш загальні результати в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини саме для випадку багатозв'язних областей було отримано в роботі [11]. Екстремальні задачі такого типу розглядалися також у роботах [15 – 32].

Однак, не зважаючи на значну кількість робіт із даної тематики, багато екстремальних задач, зокрема згадана вище задача М. О. Лебедєва для випадку багатозв'язних областей і внутрішніх радіусів, на даний момент не розв'язані. Актуальною залишається задача отримання якщо не точних розв'язків, то ефективних оцінок відповідних функціоналів.

Зазначимо, що оцінки добутку внутрішніх радіусів, отримані в задачах, де полюси відповідних квадратичних диференціалів зафіксовано, можуть бути застосовані і для задач із вільними полюсами. Щоб проілюструвати їхнє використання, розглянемо екстремальну задачу, яку було сформульовано в роботі [1].

Проблема 2. *Знайти максимум функціонала*

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k), \tag{0.4}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\gamma \in (0; n]$, $a_0 = 0$, $|a_1| = \ldots = |a_n| = 1$, $a_k \in B_k \in \overline{\mathbb{C}}$, *причому* $B_i \bigcap B_j = \varnothing$ *для* $0 \leq i, j \leq n$ *та* $i \neq j$.

Дана проблема відноситься до так званих задач із вільними полюсами, оскільки точки a_k для $k = \overline{1, n}$ не фіксовані, а лежать на одиничному колі.

1. Основні результати. Справджуються такі теореми.

Теорема 1.1. *Нехай* n — *деяке натуральне число,* $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякий набір фіксованих точок комплексної площини,* α_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякі додатні дійсні числа і* $\lambda := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. *Тоді для довільного набору областей* $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *таких, що* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}} \frac{\prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}}}{\Big(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\Big)^{\frac{\lambda}{n-2}}}. \tag{1.1}$$

***Наслідок* 1.1.** *Нехай* n — *деяке натуральне число,* $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякий набір фіксованих точок комплексної площини,* α_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякі додатні дійсні числа. Тоді для довільного набору областей* $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *таких, що* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k + \frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{n-2}} \leq (n-1)^{-\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k}{2}\frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}}.$$

Нехай $I_0(n) = \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$ і $I(n; \{\alpha_k\}_{k=1}^{n}) = \prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k}(B_k, a_k)$. Тоді з теореми 1.1 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.2.** *Нехай* n — *деяке натуральне число,* $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякий набір фіксованих точок комплексної площини,* α_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякі додатні дійсні числа і* $\lambda := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. *Тоді для довільного набору областей* $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *таких, що* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, *виконується нерівність*

$$I_0^{\frac{\lambda}{n-2}}(n) I(n; \{\alpha_k\}_{k=1}^{n}) \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}}.$$

Теорема 1.2. *Нехай* n — *деяке натуральне число,* $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякий набір фіксованих точок комплексної площини і* γ_k, $k = \overline{1, n}$, — *деякі додатні дійсні числа, причому* $\gamma_k \geq \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}{2n-2}$ $\forall k = \overline{1, n}$. *Тоді для довільного набору областей* $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, *таких, що* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, *виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k} \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}. \tag{1.2}$$

Зауважимо, що умова $\gamma_k \geq \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k}{2n-2}$ є суттєвою, оскільки в протилежному випадку при виконанні всіх інших умов теореми 1.2 для деяких наборів областей B_k і точок a_k нерівність (1.2) може не виконуватись.

Нехай області B_k, точки a_k і числа γ_k, $k = \overline{1,n}$, такі ж, як і в теоремі 1.2. Введемо позначення

$$P\Big(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n\Big) := \frac{\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\gamma_k}}{\prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}}. \tag{1.3}$$

З теореми 1.2 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.3.** *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини і γ_k, $k = \overline{1,n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k}{2n-2}$ $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, виконується нерівність*

$$P\big(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n\big) \leq (n-1)^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}.$$

Вираз (1.3) має таку важливу властивість.

Теорема 1.3. *Функціонал $P\big(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n\big)$ інваріантний щодо конформних автоморфізмів комплексної площини.*

Зауважимо, що функціонал $P\Big(n; \{B_k\}_{k=1}^n; \{a_k\}_{k=1}^n; \{\gamma_k\}_{k=1}^n\Big)$ було розглянуто також у статті [33].

У випадку, коли одна з точок a_k є нескінченно віддаленою, в нерівності (1.2) всі множники, які містять дану точку, перетворяться на одиницю. Зокрема, справедливою є така теорема.

Теорема 1.4. *Нехай n — деяке натуральне число, $n \geq 3$, a_k, $k = \overline{1,n}$, — деякий набір фіксованих точок комплексної площини, причому $a_n = \infty$, і γ_k, $k = \overline{1,n}$, — деякі додатні дійсні числа, причому $\gamma_k \geq \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k}{2n-2}$ $\forall k = \overline{1,n}$. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, виконується нерівність*

$$\big(r(B_n, a_n)\big)^{\gamma_n} \prod_{k=1}^{n-1} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\gamma_k} \leq (n-1)^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k} \prod_{i,j=1, i<j}^{n-1} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i + \gamma_j - \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}. \tag{1.4}$$

Оцінку (1.2) можна застосувати і для оцінки функціонала (0.4). Справедливою є така теорема.

Теорема 1.5. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ і $0 < \gamma \leq n$. Тоді для довільного набору точок a_k таких, що $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_k таких, що $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0,n}$, виконується нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} 2^{n-\gamma} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}, \tag{1.5}$$

якщо $n=2m,\ m\in\mathbb{N}$, *або нерівність*

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\le n^{-\frac{\gamma+n}{4}}2^{n-\gamma}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}}, \tag{1.6}$$

якщо $n=2m+1,\ m\in\mathbb{N}$.

Доведення теореми **1.1.** Скористаємось ідеєю, запропонованою в роботі [14], яку потім було розвинено при доведенні теореми 1 в роботі [16].

Нехай $d(E)$ — трансфінітний діаметр компактної множини $E\subset\mathbb{C}$. Зафіксуємо деяке натуральне $1\le k\le n$, і нехай $B^{(k)}=\left\{z\colon \dfrac{1}{z-a_k}\in B\right\}$. З конформної інваріантності функції Гріна випливає рівність

$$r(B_k,a_k)=r(B_k^{(k)},\infty).$$

Водночас внутрішній радіус області $B_k^{(k)}$ в нескінченно віддаленій точці, згідно з означенням 3, дорівнює величині, оберненій до логарифмічної ємності, а отже і до трансфінітного діаметра області $\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k^{(k)}$ (див. [3, с. 304]), тобто справджуються такі співвідношення:

$$r(B_k,a_k)=r(B_k^{(k)},\infty)=\frac{1}{d\left(\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k^{(k)}\right)}\le\frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}\overline{B_p^{(k)}}\right)}. \tag{1.7}$$

Далі, згідно з відомою теоремою Пойа [34, с. 28], виконується нерівність

$$d(E)\ge\sqrt{\frac{\mu E}{\pi}},$$

де μE позначає міру Лебега компактної множини E. Тому в (1.7) отримаємо

$$r(B_k,a_k)\le\frac{1}{d\left(\bigcup\limits_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}\overline{B_p^{(k)}}\right)}\le\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\pi}\mu\left(\bigcup\limits_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}\overline{B_p^{(k)}}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}\mu\overline{B_p^{(k)}}}}. \tag{1.8}$$

За теоремою про мінімізацію площі одержимо нерівність $\mu B\ge\pi r^2\left(B,a\right)$, а тому в (1.8)

$$\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\pi}\sum_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}\mu\overline{B_p^{(k)}}}}\le\frac{1}{\sqrt{\sum_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}r^2\left(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\right)}}.$$

За нерівністю Коші будемо мати

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}r^2\left(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\right)}}\le\frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}}\left(\prod_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n}r\left(B_p^{(k)},a_p^{(k)}\right)\right)^{\frac{1}{n-1}}}. \tag{1.9}$$

Покажемо, що

$$r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) = \frac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}, \quad p \neq k. \tag{1.10}$$

Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна, маємо

$$G_{B_p^{(k)}}(z, a_p^{(k)}) = \ln \frac{1}{\big|z - a_p^{(k)}\big|} + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{\left|\dfrac{1}{w - a_k} - \dfrac{1}{a_p - a_k}\right|} + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{|w - a_k||a_p - a_k|}{|w - a_p|} + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|w - a_p|} + \ln |a_p - a_k||a_p - a_k + w - a_p| + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|w - a_p|} + \ln |a_p - a_k|^2 + \ln \left|1 + \frac{w - a_p}{a_p - a_k}\right| + \ln r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|w - a_p|} + \ln |a_p - a_k|^2 r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) + o(1).$$

Це означає, що $r(B_p, a_p) = |a_p - a_k|^2 r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big)$, звідки і випливає нерівність (1.10).

Далі, використовуючи (1.7) і (1.9), отримуємо

$$r(B_k, a_k) \leq \frac{\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} |a_p - a_k|\right)^{\frac{2}{n-1}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r(B_p, a_p)\right)^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Звідси випливає, що

$$\big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k} \leq \frac{\left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} |a_p - a_k|\right)^{\frac{2\alpha_k}{n-1}}}{(n-1)^{\frac{\alpha_k}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{n} r(B_p, a_p)\right)^{\frac{\alpha_k}{n-1}}}. \tag{1.11}$$

Тоді, враховуючи (1.11) і те, що $\lambda := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$, одержуємо

$$I_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k} \leq$$

$$\leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\prod_{i,j=1,i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-1}}}{\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^{\frac{\lambda}{n-1}}} \left(\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

З останньої нерівності отримуємо

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k}\right)^{1-\frac{1}{n-1}} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}} \frac{\prod_{i,j=1,i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-1}}}{\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right)^{\frac{\lambda}{n-1}}}.$$

Звідси, підносячи обидві частини останньої нерівності до степеня $\dfrac{n-1}{n-2}$, одержуємо нерівність (1.1).

Теорему 1.1 доведено.

***Доведення теореми* 1.2.** З нерівності (1.1) маємо

$$\prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k + \frac{\lambda}{n-2}} \leq (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}} \prod_{i,j=1,i<j}^{n} |a_j - a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}}. \tag{1.12}$$

Позначимо $\gamma_k = \alpha_k + \dfrac{\lambda}{n-2}$, тобто

$$\begin{gathered}
\gamma_1 = \alpha_1 + \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}{n-2}, \\
\gamma_2 = \alpha_2 + \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}{n-2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\gamma_k = \alpha_k + \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}{n-2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\gamma_n = \alpha_n + \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}{n-2}.
\end{gathered} \tag{1.13}$$

Додавши всі останні рівності, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \frac{2n-2}{n-2} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{n-2}{2n-2} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k. \tag{1.14}$$

Підставивши рівність (1.14) в кожну з рівностей (1.13), для кожного $k=\overline{1,n}$ отримаємо

$$\gamma_k=\alpha_k+\frac{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}{2n-2},$$

звідки

$$\alpha_k=\gamma_k-\frac{1}{2n-2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k.$$

Звідси будемо мати

$$\alpha_k+\frac{\lambda}{n-2}=\gamma_k,$$

$$-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}=-\frac{n-2}{2n-2}\frac{n-1}{2(n-2)}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k,$$

$$\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}=\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right).$$

Підставивши останні рівності в нерівність (1.12), отримаємо нерівність (1.2).

Теорему 1.2 доведено.

Зауваження **1.1.** Для кожного натурального $n\geq 2$ і деяких наборів додатних чисел $\{\alpha_k\}$ і $\{\gamma_k\}$, $k=\overline{1,n}$, функціонал $I_n(\alpha_k)=\prod_{k=1}^{n}\big(r(B_k,a_k)\big)^{\alpha_k}$ будемо називати спряженим до функціонала $I_n(\gamma_k)=\prod_{k=1}^{n}\big(r(B_k,a_k)\big)^{\gamma_k}$, якщо для них виконуються рівності $\gamma_k=\alpha_k+$ $+\dfrac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$ і $\alpha_k=\gamma_k-\dfrac{1}{2n-2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k$. Таким чином, ми оцінюємо функціонал $I_n(\gamma_k)$ за допомогою спряженого функціонала.

Зауваження **1.2.** Рівності (1.13) можна розглядати як систему n рівнянь з невідомими $\{\alpha_k\}$ для $k=\overline{1,n}$, задану матричним рівнянням

$$AX=B, \tag{1.15}$$

де

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{n-1}{n-2} & \dfrac{1}{n-2} & \cdots & \dfrac{1}{n-2}\\ \dfrac{1}{n-2} & \dfrac{n-1}{n-2} & \cdots & \dfrac{1}{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{1}{n-2} & \dfrac{1}{n-2} & \cdots & \dfrac{n-1}{n-2}\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix}.$$

Знайшовши обернену матрицю A^{-1} і помноживши її на обидві частини рівності (1.15), отримаємо матрицю X.

Справедливими є такі твердження.

***Наслідок* 1.4.** *Нехай* $\{a_k\}_{k=1}^{3}$ *і* $\{B_k\}_{k=1}^{3}$ *— деякі набори відповідно точок і областей комплексної площини, причому* $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$. *Тоді виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{3} r(B_k, a_k) \leq 2^{-\frac{3}{4}} |a_2 - a_1||a_3 - a_1||a_3 - a_2|.$$

Для доведення цього наслідку достатньо покласти $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ в нерівності (1.2).

Оскільки $2^{-\frac{3}{4}} \approx 0{,}5946$, а $\dfrac{64}{81\sqrt{3}} \leq 0{,}4562$, то наша оцінка не набагато поступається точній оцінці Г. М. Голузіна [3, с. 165].

***Наслідок* 1.5.** *Нехай* $\{a_k\}_{k=1}^{3}$ *і* $\{B_k\}_{k=1}^{3}$ *— деякі набори відповідно точок і областей комплексної площини, причому* $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, *і* γ_k, $k = \overline{1,3}$, *— деякі додатні дійсні числа*, *причому* $\gamma_k \geq \dfrac{\sum_{k=1}^{3}\gamma_k}{4}$ $\forall k = \overline{1,3}$. *Тоді виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{3} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k} \leq 2^{-\frac{\sum_{k=1}^{3}\gamma_k}{4}} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta-\gamma} |a_1 - a_3|^{\alpha-\beta+\gamma} |a_2 - a_3|^{-\alpha+\beta+\gamma}.$$

***Зауваження* 1.3.** Оцінка, встановлена в теоремі 1.2, для багатьох окремих випадків точніша за оцінку, отриману в теоремі 1 [8, с. 220]. Розглянемо, наприклад, таку конфігурацію: $a_3 = 0$, $a_k = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{3} k\right)$, $k = \overline{0,2}$, і $\gamma_k = 1$, $k = \overline{0,3}$. Тоді за нерівністю (1.2) отримаємо

$$\prod_{k=0}^{3} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\gamma_k} \leq \frac{1}{3}\left((\sqrt{3})^3\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Покладаючи в нерівності (0.3) $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = -1$, одержуємо

$$\prod_{k=0}^{3} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\gamma_k} \leq \big(\sqrt{3}\big)^2 \big(\sqrt{3}\big)^2 \big(\sqrt{3}\big)^{-2} = 3.$$

Таким чином, для вказаної конфігурації наша оцінка є точнішою.

***Доведення теореми* 1.3.** Нехай області B_k, точки a_k і числа γ_k, $k = \overline{1,n}$, такі ж, як і в теоремі 1.2. Нехай

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1.16}$$

— деякий конформний автоморфізм комплексної площини і $B_k^* = f(B_k)$, $a_k^* = f(a_k)$ для довільного $k = \overline{1,n}$.

Для довільного k функція Гріна для області B_k і точки a_k має вигляд

$$G_{B_k}(z, a_k) = \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln r(B_k, a_k) + o(1).$$

Водночас отримуємо

$$G_{B_k^*}(w, a_k^*) = \ln \frac{1}{|w - a_k^*|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{\left| \dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{aa_k+b}{ca_k+d} \right|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{|cz+d||ca_k+d|}{|(az+b)(ca_k+d) - (cz+d)(aa_k+b)|} + \ln r(B_k^*, a_k^*) + o(1) =$$

$$= \ln \frac{1}{|z - a_k|} + \ln \frac{|ca_k+d|^2}{|ad-bc|} r(B_k^*, a_k^*) + o(1).$$

Тому, використовуючи конформну інваріантність функції Гріна, маємо

$$r(B_k^*, a_k^*) = r(B_k, a_k) \frac{|ad-bc|}{|ca_k+d|^2}.$$

Звідси знаходимо

$$\prod_{k=1}^{n} \left(r(B_k^*, a_k^*)\right)^{\gamma_k} = \prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\gamma_k} \frac{|ad-bc|^{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}}{\prod_{k=1}^{n} |ca_k+d|^{2\gamma_k}}. \tag{1.17}$$

Водночас

$$|a_i^* - a_j^*| = \left| \frac{aa_i+b}{ca_i+d} - \frac{aa_j+b}{ca_j+d} \right| = \left| \frac{(ad-bc)(a_i-a_j)}{(ca_i+d)(ca_j+d)} \right|.$$

Тому отримуємо

$$\prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_i^* - a_j^*|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)} =$$

$$= \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_i - a_j|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k)} \times$$

$$\times |ad-bc|^{\frac{2}{n-2}\left((n-1)\sum_{k=1}^{n}\gamma_k - \frac{n(n-1)}{2(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} (ca_k+d)^{-\frac{2}{n-2}\left((n-1)\gamma_k - \sum_{p=1,\, p\neq k}^{n}\gamma_p - \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)} =$$

$$= \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_i - a_j|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)} |ad-bc|^{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k} \prod_{k=1}^{n} (ca_k+d)^{-2\gamma_k}.$$

Враховуючи останню рівність і рівність (1.17), маємо

$$P\big(n; \{B_k^*\}_{k=1}^{n}; \{a_k^*\}_{k=1}^{n}; \{\gamma_k\}_{k=1}^{n}\big) = \frac{\prod_{k=1}^{n} \left(r(B_k^*, a_k^*)\right)^{\gamma_k}}{\prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_j^* - a_i^*|^{\frac{2}{n-2}(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k)}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \big(r(B_k, a_k)\big)^{\gamma_k} \frac{|ad-bc|^{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}}{\prod_{k=1}^{n}|ca_k+d|^{2\gamma_k}} \times$$

$$\times \prod_{i,j=1, i<j}^{n} |a_i - a_j|^{-\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)} \frac{\prod_{k=1}^{n}(ca_k+d)^{2\gamma_k}}{|ad-bc|^{\sum_{k=1}^{n}\gamma_k}} =$$

$$= \frac{\prod_{k=1}^{n}\big(r(B_k,a_k)\big)^{\gamma_k}}{\prod_{i,j=1,i<j}^{n}|a_j-a_i|^{\frac{2}{n-2}\left(\gamma_i+\gamma_j-\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\right)}} =$$

$$= P\Big(n; \{B_k\}_{k=1}^{n}; \{a_k\}_{k=1}^{n}; \{\gamma_k\}_{k=1}^{n}\Big).$$

Теорему 1.3 доведено.

***Доведення теореми* 1.4.** Правильною є лема, аналогічна теоремі 1.1.

Лема 1.1. *Нехай n — деяке натуральне число, $n > 2$, α_k, $k = \overline{1,n}$, — деякі додатні дійсні числа. Позначимо $\lambda := \sum_{k=1}^{n}\alpha_k$. Тоді виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^{n}\big(r(B_k,a_k)\big)^{\alpha_k} \le (n-1)^{-\frac{\lambda}{2}\frac{n-1}{n-2}} \frac{\prod_{i,j=1,i<j}^{n-1}|a_j-a_i|^{\frac{2(\alpha_i+\alpha_j)}{n-2}}}{\left(\prod_{k=1}^{n} r(B_k,a_k)\right)^{\frac{\lambda}{n-2}}}, \tag{1.18}$$

де B_k, $k = \overline{1,n}$, — деякий набір областей, а a_k, $k = \overline{1,n}$, — деякий набір областей точок комплексної площини, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \ne j$, причому $a_n = \infty$.

Як і в теоремі 1.2, зафіксуємо деяке натуральне k таке, що $1 \le k \le n-1$. Провівши аналогічні перетворення, як і в (1.9), отримаємо

$$r(B_k,a_k) \le (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1\\p\ne k}}^{n} r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big)\right)^{-\frac{1}{n-1}}. \tag{1.19}$$

Доведемо, що $r\big(B_n^{(k)}, a_n^{(k)}\big) = r\big(B_n^{(k)}, 0\big) = r(B_n, \infty)$. Використовуючи конформну інваріантність функції Гріна для відображення $w = \dfrac{1}{z-a_k}$ і враховуючи, що $a_n^{(k)} = 0$, маємо

$$G_{B_n}(z,\infty) = G_{B_n^{(k)}}(w,0) = \ln\frac{1}{|w|} + \ln r\big(B_n^{(k)},0\big) + o(1) =$$

$$= \ln\frac{1}{\left|\dfrac{1}{z-a_k}\right|} + \ln r\big(B_n^{(k)},0\big) + o(1) = \ln|z-a_k| + \ln r\big(B_n^{(k)},0\big) + o(1) =$$

$$= \ln|z| + \ln\left|1-\frac{a_k}{z}\right| + \ln r\big(B_n^{(k)},0\big) + o(1) =$$

$$= \ln|z| + \ln r\big(B_n^{(k)},0\big) + o(1).$$

Звідси випливає рівність $r\big(B_n^{(k)},0\big) = r(B_n,\infty)$.

Для $1 \leq p \leq n-1,\ p \neq k$, провівши перетворення, як і в доведенні теореми 1.2, отримаємо рівність $r\big(B_p^{(k)}, a_p^{(k)}\big) = \dfrac{r(B_p, a_p)}{|a_p - a_k|^2}$.

Таким чином, з (1.19) для $1 \leq k \leq n-1$ одержуємо

$$r(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Звідси знаходимо

$$\big(r(B_k, a_k)\big)^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\alpha_k}{2}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n-1} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2\alpha_k}{n-1}} \left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{n} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{\alpha_k}{n-1}}. \tag{1.20}$$

Якщо ж $k = n$, то з (1.19) отримуємо

$$\begin{gathered} r(B_n, \infty) \leq (n-1)^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{p=1}^{n-1} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{1}{n-1}}, \\ (r(B_n, \infty))^{\alpha_k} \leq (n-1)^{-\frac{\alpha_n}{2}} \left(\prod_{p=1}^{n-1} r(B_p, a_p) \right)^{-\frac{\alpha_n}{n-1}}. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Перемножаючи для $k = \overline{1, n}$ нерівності (1.20) і (1.21), отримуємо нерівність (1.18).

Далі, позначивши $\gamma_k = \alpha_k + \dfrac{\lambda}{n-2}$ і провівши перетворення, аналогічні проведеним у доведенні теореми 1.2, отримаємо нерівність (1.4).

***Доведення теореми* 1.5.** Застосуємо нерівність (1.2) для $n+1$ області для функціонала (0.4), взявши $\gamma_0 = \gamma$ і $\gamma_k = 1$ для $k = \overline{1, n}$. Отримаємо нерівність

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i|^{\frac{2}{n-1}\left(1 - \frac{\gamma}{n}\right)}. \tag{1.22}$$

Нехай, для конкретності,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi.$$

Позначимо

$$\alpha_1 := \frac{1}{\pi}(\arg a_2 - \arg a_1), \ \ \alpha_2 := \frac{1}{\pi}(\arg a_3 - \arg a_2), \ldots, \ \ \alpha_n := \frac{1}{\pi}(2\pi - \arg a_n).$$

Звідси

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} |a_j - a_i| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} 2 \sin \frac{\pi(\alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1})}{2}. \tag{1.23}$$

Врахувавши, що $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 2$, і використавши дослідження добутку, записаного в правій частині нерівності (1.23), переконаємося, що максимум даного виразу досягається тоді, коли всі α_k рівні між собою, а тому для $n = 2m$ отримаємо

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}\left(2\sin\frac{\pi(\alpha_i+\ldots+\alpha_{j-1})}{2}\right)\leq 2^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{n}.$$

Підставивши отриману нерівність в (1.22), будемо мати

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}}\left(2^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n(n-1)}}=$$

$$=n^{-\frac{\gamma+n}{4}}2^{n-\gamma}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}},$$

що й доводить нерівність (1.5).

Якщо ж $n = 2m + 1$, то

$$\prod_{1\leq p<k\leq n}\left(2\sin\frac{\pi(\alpha_p+\ldots+\alpha_{k-1})}{2}\right)\leq 2^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{n}.$$

Далі, підставивши отриману нерівність в (1.22), одержимо

$$r^{\gamma}(B_0,0)\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k)\leq n^{-\frac{\gamma+n}{4}}\left(2^{\frac{n^2-n}{2}}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{n}\right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n(n-1)}}=$$

$$=n^{-\frac{\gamma+n}{4}}2^{n-\gamma}\left(\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^{\frac{2(n-\gamma)}{n-1}},$$

що й доводить нерівність (1.6).

Теорему 1.5 доведено.

Література

1. В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук, **49**, № 1(295), 3 – 76 (1994).
2. М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений*, Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР, **5**, 159 – 245 (1934).
3. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1966).
4. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, 131 – 145 (1980).
5. Л. И. Колбина, *Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении*, Докл. АН СССР, сер. мат., **84**, № 5, 865 – 868 (1952).
6. Л. И. Колбина, *Конформное отображение единичного круга на неналегающие области*, Вестн. Ленинград. ун-та, **5**, 37 – 43 (1955).
7. Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **75**, № 2, 256 – 286 (1953).
8. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций*, Наука, Москва (1975).

9. Л. Л. Громова, *Некоторые приложения принципа площадей*, Вестн. Ленинград. гос. ун-та, № 7, 31 – 40 (1968).
10. П. М. Тамразов, *Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов*, Изв. АН СССР, сер. мат., **32**, № 5, 1033 – 1043 (1968).
11. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука ДВО РАН, Владивосток (2009).
12. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*, Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР, **168**, 48 – 66 (1988).
13. Л. В. Ковалев, *К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности*, Дальневост. мат. сб., **2**, 96 – 98 (1996).
14. Л. В. Ковалев, *О трех непересекающихся областях*, Дальневост. мат. журн., **1**, № 1, 3 – 7 (2000).
15. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе*, Праці Ін-ту математики НАН України, **73** (2008).
16. А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Неравенства для внутренних радиусов неналегающих областей*, Укр. мат. журн., **71**, № 7, 996 – 1002 (2019).
17. А. К. Бахтин, *Оценки внутренних радиусов для взаимно непересекающихся областей*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 1, 25 – 33 (2017).
18. A. K. Bakhtin, *Separating transformation and extremal problems on nonoverlapping simply connected domains*, J. Math. Sci., **234**, № 1, 1 – 13 (2018).
19. A. K. Bakhtin, *Extremal decomposition of the complex plane with restrictions for free poles*, J. Math. Sci., **231**, № 1, 1 – 15 (2018).
20. О. К. Бахтін, І. Я. Дворак, Я. В. Заболотний, *Оцінки добутку внутрішніх радіусів п'яти взаємно неперетинних областей*, Укр. мат. журн., **69**, № 2, 261 – 267 (2017).
21. А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами*, Укр. мат. вісн., **16**, № 3, 307 – 328 (2019).
22. А. К. Бахтин, И. В. Денега, *Экстремальное разбиение комплексной плоскости со свободными полюсами, II*, Укр. мат. вісн., **16**, № 4, 477 – 495 (2019).
23. A. K. Bakhtin, L. V. Vyhivska, *Problem on extremal decomposition of the complex plane with free poles*, J. Math. Sci., **248**, № 2, 145 – 165 (2020).
24. А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, *Разделяющие преобразования и задачи о неналегающих областях*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 273 – 284 (2006).
25. A. K. Bakhtin, L. V. Vygivska, I. V. Denega, *Inequalities for the internal radii of non-overlapping domains*, J. Math. Sci., **220**, № 5, 584 – 590 (2017).
26. О. К. Бахтін, *Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами*, Укр. мат. журн., **71**, № 10, 1299 – 1320 (2019).
27. О. К. Бахтін, І. В. Денега, *Оцінки максимуму добутків внутрішніх радіусів областей, що взаємно не перетинаються*, Укр. мат. журн., **72**, № 2, 173 – 183 (2020).
28. О. К. Бахтін, Л. В. Вигівська, І. В. Денега, *Задача про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами на колі*, Укр. мат. журн., **72**, № 12, 1599 – 1620 (2020).
29. A. L. Targonskii, *An extremal problem for the nonoverlapping domains*, J. Math. Sci., **227**, № 1, 98 – 104 (2017).
30. A. L. Targonskii, *About one extremal problem for the projections of points on a unit circle*, J. Math. Sci., **241**, № 1, 90 – 100 (2019).
31. Я. В. Заболотний, *Проблема В. М. Дубініна для симетричних багатозв'язних областей*, Укр. мат. журн., **72**, № 11, 1502 – 1509 (2020).
32. О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний, *Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей*, Укр. мат. журн., **73**, № 1, 9 – 22 (2021).
33. С. И. Федоров, *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **112**, 172 – 183 (1981).
34. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, Москва (1962).

Одержано 13.04.21