DOI: 10.37863/umzh.v74i10.7158

УДК 517.5

**Р. Р. Салімов, Б. А. Кліщук**[1] (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПРО ПОВЕДІНКУ ОДНОГО КЛАСУ ГОМЕОМОРФІЗМІВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

We study the behavior of ring $Q$-homeomorphisms with respect to the $p$-modulus with $p > n$ at infinity.

Досліджується поведінка на нескінченності кільцевих $Q$-гомеоморфізмів щодо $p$-модуля при $p > n$.

**1. Вступ.** Нагадаємо деякі означення (див. [1]). Нехай задано сім'ю $\Gamma$ кривих $\gamma$ у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Борелеву функцію $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ називають *допустимою* для $\Gamma$ (пишуть $\rho \in \mathrm{adm}\Gamma$), якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x)ds \geq 1$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$. Нехай $p \in (1,\infty)$. Тоді $p$-*модулем* сім'ї $\Gamma$ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in\mathrm{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x),$$

де $m$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Для довільних множин $E$, $F$ і $G$ в $\mathbb{R}^n$ позначимо через $\Delta(E,F,G)$ сім'ю всіх неперервних кривих $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, які з'єднують $E$ та $F$ в $G$, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$. Нехай $D$ — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$ і $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$. Покладемо

$$\mathbb{A}(x_0, r_1, r_2) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1,\, 2.$$

Нехай $Q\colon D \to [0,\infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим $Q$-гомеоморфізмом щодо $p$-модуля в точці $x_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p\big(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\big) \leq \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \eta^p\big(|x - x_0|\big) dm(x)$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, і для кожної вимірної функції $\eta\colon (r_1, r_2) \to [0,\infty]$ такої, що

[1] Відповідальний за листування, e-mail: kban1988@gmail.com.

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1.$$

Теорію $Q$-гомеоморфізмів при $p = n$ досліджували в роботах [2–6], при $1 < p < n$ — у [7–14] і при $p > n$ — у [15–19]. Більш загальні класи відображень досліджували в [20–26].

Нехай $\omega_{n-1}$ — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $q_{x_0}(r) = \dfrac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \displaystyle\int_{S(x_0,r)} Q(x)d\mathcal{A}$ — середнє інтегральне значення по сфері $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$ і $d\mathcal{A}$ — елемент площі поверхні.

Сформулюємо критерій належності класу кільцевих $Q$-гомеоморфізмів щодо $p$-модуля при $p > 1$ в $\mathbb{R}^n$.

**Твердження 1.** *Нехай $D$ — область в $\mathbb{R}^n$ і $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція така, що середнє інтегральне значення $q_{x_0}(r)$ скінченне для майже всіх $r \in (0, d_0)$, $d_0 = = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{R}^n$ є кільцевим $Q$-гомеоморфізмом в точці $x_0 \in D$ тоді й лише тоді, коли для будь-яких $0 < r_1 < r_2 < d_0$*

$$\mathrm{M}_p\big(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\big) \le \frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}\right)^{p-1}},$$

*де $S_1$ і $S_2$ — сфери $S(x_0, r_1)$ і $S(x_0, r_2)$ (див. теорему* 2.3 *в* [12]).

Згідно з роботою [29], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, де $A \subset \mathbb{R}^n$ — відкрита множина і $C$ — непорожня компактна множина, що міститься в $A$, назвемо *конденсатором*. Говорять також, що конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежить в області $D$, якщо $A \subset D$. Очевидно, що якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відкрите відображення і $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в $D$, то $(fA, fC)$ також конденсатор в $fD$. Далі $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Нехай $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Позначимо через $\mathcal{C}_0(A)$ множину неперервних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ з компактним носієм. $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ — сім'я невід'ємних функцій $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, що: 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$, 2) $u(x) \ge 1$ для $x \in C$ і 3) $u$ належить класу ACL, і нехай

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $p \ge 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p dm(x)$$

називають *$p$-ємністю* конденсатора $\mathcal{E}$. Відомо, що при $p > 1$

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \mathrm{M}_p\big(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)\big) \tag{1}$$

(див. теорему 1 в [30]). При $p > n$ виконується нерівність

$$\mathrm{cap}_p(A,C) \geq n\Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{p-1} \left[m^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(A) - m^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(C)\right]^{1-p}, \tag{2}$$

де $\Omega_n$ — об'єм одиничної кулі, а $m$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ (див., наприклад, нерівність 8.7 у [31]).

**2. Основні результати.** Наведемо основний результат цієї статті про поведінку на нескінченності кільцевих $Q$-гомеоморфізмів щодо $p$-модуля при $p > n$. Випадок $p = n$ досліджено в роботі [27]. Нехай

$$L(x_0, f, R) = \max_{|x-x_0|=R} |f(x) - f(x_0)|.$$

**Лема 1.** *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий $Q$-гомеоморфізм щодо $p$-модуля в точці $x_0$ при $p > n$, де $x_0$ — деяка точка в $\mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $c > 0$, $r_0 > 0$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\,\psi^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) \leq cF(r_0,R) \quad \forall R > r_0, \tag{3}$$

*де $\psi(t)$ — невід'ємна вимірна за Лебегом функція на $(0,+\infty)$ така, що*

$$0 < I(r_0,R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)dt < \infty \quad \forall R > r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0,f,R) \left(\frac{F(r_0,R)}{I^p(r_0,R)}\right)^{\frac{1}{p-n}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}. \tag{4}$$

*Тут $\omega_{n-1}$ — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.*

***Доведення.*** Розглянемо конденсатор $\mathcal{E} = (A,C)$ в $\mathbb{R}^n$, де $A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| < R\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| \leq r_0\}$, $0 < r_0 < R < \infty$ й $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0,r_0,R)$. Тоді $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ — кільцевий конденсатор в $\mathbb{R}^n$ і згідно з (1) справджується рівність

$$\mathrm{cap}_p f\mathcal{E} = \mathrm{M}_p(\Delta(\partial fA, \partial fC; f(A \setminus C))).$$

За означенням кільцевого $Q$-гомеоморфізму маємо оцінку

$$\mathrm{cap}_p(fA, fC) \leq \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\eta^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) \tag{5}$$

для кожної вимірної функції $\eta\colon (r_0,R) \to [0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_0}^{R} \eta(t)dt = 1. \tag{6}$$

Зазначимо, що функція

$$\eta(t) = \begin{cases} \dfrac{\psi(t)}{I(r_0,R)}, & t \in (r_0,R), \\ 0, & t \notin (r_0,R), \end{cases}$$

задовольняє умову (6) і, отже, внаслідок співвідношення (5)

$$\mathrm{cap}_p(fA, fC) \leq I^{-p}(r_0, R) \int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\, \psi^p\big(|x - x_0|\big) dm(x).$$

За умовою (3) із останньої оцінки маємо

$$\mathrm{cap}_p(fA, fC) \leq \frac{c\, F(r_0, R)}{I^p(r_0, R)}. \tag{7}$$

З іншого боку, згідно з (2)

$$\mathrm{cap}_p(fA, fC) \geq \nu_{n,p}\Big[m^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(fA) - m^{\frac{p-n}{n(p-1)}}(fC)\Big]^{1-p} \geq \nu_{n,p}[m(fA)]^{-\frac{p-n}{n}}, \tag{8}$$

де $\nu_{n,p} = n\Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\dfrac{p-n}{p-1}\right)^{p-1}$.

Комбінуючи нерівності (7) і (8), одержуємо

$$\nu_{n,p}\big[m(fA)\big]^{-\frac{p-n}{n}} \leq \frac{cF(r_0, R)}{I^p(r_0, R)}.$$

Звідси випливає оцінка

$$m\big(fB(x_0, R)\big) \geq n^{\frac{n}{p-n}} \Omega_n^{\frac{p}{p-n}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}} \big(cF(r_0, R)\big)^{-\frac{n}{p-n}} \big(I(r_0, R)\big)^{\frac{np}{p-n}}. \tag{9}$$

Згідно з нерівністю

$$m(fB(x_0, R)) \leq \Omega_n L^n(x_0, f, R)\,,$$

із (9) випливає оцінка

$$L(x_0, f, R) \geq (n\Omega_n)^{\frac{1}{p-n}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} (cF(r_0, R))^{-\frac{1}{p-n}} \big(I(r_0, R)\big)^{\frac{p}{p-n}}.$$

Враховуючи рівність $\omega_{n-1} = n\,\Omega_n$ (див., наприклад, [28], розд. I, §1, п. 1.1), останню оцінку можна записати вигляді

$$L(x_0, f, R) \geq \omega_{n-1}^{\frac{1}{p-n}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \big(cF(r_0, R)\big)^{-\frac{1}{p-n}} \big(I(r_0, R)\big)^{\frac{p}{p-n}}.$$

Помноживши останню нерівність на величину $\left(\dfrac{F(r_0, R)}{I^p(r_0, R)}\right)^{\frac{1}{p-n}}$ та перейшовши до нижньої границі при $R \to \infty$, отримаємо оцінку (4).

Лему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий $Q$-гомеоморфізм щодо $p$-модуля в точці $x_0$ при $p > n$, де $x_0$ — деяка точка в $\mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $c > 0$, $r_0 > 0$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r_0)} Q(x)\, \psi^p\big(|x - x_0|\big)\, dm(x) \leq c\,, \tag{10}$$

*де* $\psi(t)$ *— невід'ємна вимірна за Лебегом функція на* $(0,+\infty)$ *така, що*

$$0 < I(r_0, R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)dt < \infty \quad \forall R > r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{I^{\frac{p}{p-n}}(r_0, R)} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}. \tag{11}$$

*Тут* $\omega_{n-1}$ *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

***Доведення.*** Справді, для $R > r_0 > 0$

$$\mathbb{A}(x_0, r_0, R) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(x_0, r_0).$$

Отже, за умовою (10) маємо оцінку

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\, \psi^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,r_0)} Q(x)\, \psi^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) \leq c.$$

Далі, поклавши в лемі 1 $F(r_0, R) = 1$, отримаємо оцінку (11).

**Теорема 1.** *Нехай* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* $Q$*-гомеоморфізм щодо* $p$*-модуля в точці* $x_0$ *при* $p > n$, *де* $x_0$ *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$. *Якщо для деяких чисел* $c > 0$, $0 \leq \kappa \leq p$, $r_0 > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\, \psi^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) \leq cI^{\kappa}(r_0, R) \quad \forall R > r_0,$$

*де* $\psi(t)$ *— невід'ємна вимірна за Лебегом функція на* $(0,+\infty)$ *така, що*

$$0 < I(r_0, R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)dt < \infty \quad \forall R > r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R) I^{\frac{\kappa-p}{p-n}}(r_0, R) \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}.$$

*Тут* $\omega_{n-1}$ *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

***Доведення.*** Справді, вибираючи в лемі 1 $F(r_0, R) = I^{\kappa}(r_0, R)$, приходимо до висновку теореми.

Поклавши в теоремі 1 $\kappa = n$, отримаємо такий наслідок.

***Наслідок 2.*** *Нехай* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* $Q$*-гомеоморфізм щодо* $p$*-модуля в точці* $x_0$ *при* $p > n$, *де* $x_0$ *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$. *Якщо для деяких чисел* $c > 0$, $r_0 > 0$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\psi^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) \leq cI^{n}(r_0, R) \quad \forall R > r_0,$$

*де* $\psi(t)$ *— невід'ємна вимірна за Лебегом функція на* $(0, +\infty)$ *така, що*

$$0 < I(r_0, R) = \int\limits_{r_0}^{R} \psi(t)dt < \infty \quad \forall R > r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{I(r_0, R)} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}},$$

*де* $\omega_{n-1}$ *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

***Наслідок 3.*** *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* $Q$*-гомеоморфізм щодо* $p$*-модуля в точці* $x_0$ *при* $p > n$, *де* $x_0$ *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$. *Якщо для деяких чисел* $c > 0$, $0 \leq \kappa \leq p$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} \frac{Q(x)\, dm(x)}{|x - x_0|^p} \leq c \ln^{\kappa} R \quad \forall R > r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}},$$

*де* $\omega_{n-1}$ *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

***Доведення.*** Справді, вибираючи в теоремі 1 функцію $\psi(t) = \dfrac{1}{t}$, отримуємо нерівність

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{\left(\ln \frac{R}{r_0}\right)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}.$$

Звідси маємо

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln R)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}.$$

***Наслідок 4.*** *Нехай* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* $Q$*-гомеоморфізм щодо* $p$*-модуля в точці* $x_0$ *при* $p > n$, *де* $x_0$ *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$, $r_0 > e$. *Якщо для деяких чисел* $c > 0$, $0 \leq \kappa \leq p$ *виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} \frac{Q(x)dm(x)}{|x - x_0|^p \ln^p |x - x_0|} \leq c(\ln \ln R)^{\kappa} \quad \forall R > r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0, f, R)}{(\ln \ln R)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}},$$

*де* $\omega_{n-1}$ *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

***Доведення.*** Вибираючи в лемі 1 функцію $\psi(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$ і $F(r_0, R) = \ln\ln R$, одержуємо нерівність

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R)\left[\frac{(\ln\ln R)^{\kappa}}{\left(\ln\dfrac{\ln R}{\ln r_0}\right)^{p}}\right]^{\frac{1}{p-n}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}.$$

Звідси отримуємо

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0, f, R)}{(\ln\ln R)^{\frac{p-\kappa}{p-n}}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}.$$

**Теорема 2.** *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий $Q$-гомеоморфізм щодо $p$-модуля в точці $x_0$ при $p > n$, де $x_0$ — деяка точка в $\mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $c > 0$, $0 < \alpha < p$, $0 \leq \lambda < p - \alpha$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0, r_0, R)}\frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^{\alpha}} \leq cR^{\lambda} \quad \forall\, R > r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0, f, R)}{R^{\frac{p-\alpha-\lambda}{p-n}}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}\left(\frac{p}{p-\alpha}\right)^{\frac{p}{p-n}}\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}, \tag{12}$$

*де $\omega_{n-1}$ — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.*

***Доведення.*** Застосовуючи лему 1 з функціями $\psi(t) = \dfrac{1}{t^{\frac{\alpha}{p}}}$ та $F(r_0, R) = R^{\lambda}$, згідно з (4) отримуємо нерівність

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R)\left(\frac{R^{\lambda}}{I^{p}(r_0, R)}\right)^{\frac{1}{p-n}} \geq \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}\left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}}, \tag{13}$$

де $I(r_0, R) = \displaystyle\int_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{p}}}$.

Далі знаходимо границю

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\big(I(r_0, R)\big)^{\frac{p}{p-n}}}{R^{\frac{p-\alpha}{p-n}}} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{\frac{p-\alpha}{p-n}}}\left(\int\limits_{r_0}^{R}\frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{p}}}\right)^{\frac{p}{p-n}} = \left(\frac{p}{p-\alpha}\right)^{\frac{p}{p-n}} \tag{14}$$

і оскільки

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0, f, R)}{R^{\frac{p-\alpha-\lambda}{p-n}}} = \varliminf_{R\to\infty} L(x_0, f, R)\left(\frac{R^{\lambda}}{I^{p}(r_0, R)}\right)^{\frac{1}{p-n}}\lim_{R\to\infty}\frac{\big(I(r_0, R)\big)^{\frac{p}{p-n}}}{R^{\frac{p-\alpha}{p-n}}},$$

то, враховуючи оцінки (13), (14), приходимо до нерівності (12).

Покладаючи $\lambda = 0$ в теоремі 2, одержуємо такий наслідок.

***Наслідок 5.*** *Нехай $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — кільцевий $Q$-гомеоморфізм щодо $p$-модуля в точці $x_0$ при $p > n$, де $x_0$ — деяка точка в $\mathbb{R}^n$. Якщо для деяких чисел $c > 0$, $0 < \alpha < p$ виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B(x_0,r_0)} \frac{Q(x)dm(x)}{|x-x_0|^{\alpha}} \le c \quad \forall R>r_0,$$

*то*

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,f,R)}{R^{\frac{p-\alpha}{p-n}}} \ge \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} \left(\frac{p}{p-\alpha}\right)^{\frac{p}{p-n}} \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{p-n}},$$

*де* $\omega_{n-1}$ *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

**3. Екстремальний випадок.** У цьому пункті вивчаються точні оцінки та побудовано приклад, на якому вони досягаються.

**Теорема 3.** *Нехай* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* $Q$*-гомеоморфізм щодо* $p$*-модуля в точці* $x_0$ *при* $p>n$*, де* $x_0$ *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$*. Тоді для всіх чисел* $r_0>0$ *справджується оцінка*

$$\varliminf_{R\to\infty} L(x_0,f,R) \left(\int\limits_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{p-n}} \ge \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0, \tag{15}$$

*де* $q_{x_0}(t) = \dfrac{1}{\omega_{n-1}t^{n-1}} \displaystyle\int_{S(x_0,t)} Q(x)d\mathcal{A}$ *— середнє інтегральне значення по сфері* $S(x_0,t)=\{x\in$ $\in \mathbb{R}^n\colon |x-x_0|=t\}$, $\omega_{n-1}$ *— площа одиничної сфери* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$.

***Доведення.*** Справді, покладаючи в теоремі 1 функцію $\psi(t) = \dfrac{1}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}$, за теоремою Фубіні маємо

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,r_0,R)} Q(x)\,\psi^p\big(|x-x_0|\big)dm(x) = \omega_{n-1} I(r_0,R),$$

де $I(r_0,R) = \displaystyle\int_{r_0}^{R} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}$, $\omega_{n-1}$ — площа одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$.

Тоді, використовуючи теорему 1 при $c=\omega_{n-1}$, $\kappa=1$, приходимо до нерівності (15).

***Наслідок 6.*** *Нехай* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— кільцевий* $Q$*-гомеоморфізм щодо* $p$*-модуля в точці* $x_0$ *при* $p>n$*, де* $x_0$ *— деяка точка в* $\mathbb{R}^n$*, і для деяких чисел* $r_0>0$, $K>0$ *виконується умова*

$$q_{x_0}(t) \le K\,t^{\alpha} \tag{16}$$

*для майже всіх* $t\in[r_0,+\infty)$*. Якщо* $\alpha\in[0,p-n)$*, то*

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,f,R)}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}} \ge K^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0. \tag{17}$$

*Якщо ж* $\alpha=p-n$*, то*

$$\varliminf_{R\to\infty} \frac{L(x_0,f,R)}{(\ln R)^{\frac{p-1}{p-n}}} \ge K^{\frac{1}{n-p}} \left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-n}} > 0. \tag{18}$$

***Доведення.*** Використавши умову (16), оцінимо ліву частину нерівності (15), а виконавши елементарні перетворення, отримаємо оцінки (17) і (18).

Поклавши $\alpha=0$ в наслідку 6, одержимо ще один наслідок.

***Наслідок 7.*** *Нехай $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — кільцевий $Q$-гомеоморфізм щодо $p$-модуля в точці $x_0$ при $p>n$ і для деяких чисел $r_0>0,\ K>0$ виконується умова*

$$q_{x_0}(t)\leq K$$

*для майже всіх $t\in[r_0,+\infty)$. Тоді має місце оцінка*

$$\varliminf_{R\to\infty}\frac{L(x_0,f,R)}{R}\geq K^{\frac{1}{n-p}}>0.$$

***Приклад.*** Нехай $f_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, де

$$f_1(x)=\begin{cases}K^{\frac{1}{n-p}}\left(\dfrac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}|x|^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Легко бачити, що $\lim_{R\to\infty}\dfrac{\max_{|x|=R}|f_1(x)|}{R^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}}}=K^{\frac{1}{n-p}}\left(\dfrac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}$. Тепер покажемо, що відображення $f_1$ є кільцевим $Q$-гомеоморфізмом щодо $p$-модуля з функцією $Q(x)=K|x|^{\alpha}$ в точці $x_0=0$. Очевидно, що $q_{x_0}(t)=Kt^{\alpha}$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}(0,r_1,r_2),\ 0<r_1<r_2<\infty$. Зазначимо, що відображення $f_1$ відображає кільце $\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$ на кільце $\widetilde{\mathbb{A}}(0,\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2)$, де

$$\widetilde{r}_i=K^{\frac{1}{n-p}}\left(\frac{p-n}{p-n-\alpha}\right)^{\frac{p-1}{p-n}}r_i^{\frac{p-n-\alpha}{p-n}},\quad i=1,\,2.$$

Позначимо через $\Gamma$ множину всіх кривих, що з'єднують сфери $S(0,r_1)$ і $S(0,r_2)$ у кільці $\mathbb{A}(0,r_1,r_2)$. Тоді $p$-модуль сім'ї кривих $f_1\Gamma$ можна обчислити в явному вигляді

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma)=\omega_{n-1}\left(\frac{p-n}{p-1}\right)^{p-1}\left(\widetilde{r}_2^{\frac{p-n}{p-1}}-\widetilde{r}_1^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}$$

(див., наприклад, співвідношення (2) в [32]). Підставляючи у попередню рівність значення $\widetilde{r}_1$ і $\widetilde{r}_2$, означені вище, одержуємо

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma)=\omega_{n-1}K\left(\frac{p-n-\alpha}{p-1}\right)^{p-1}\left(r_2^{\frac{p-n-\alpha}{p-1}}-r_1^{\frac{p-n-\alpha}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Зауважимо, що останню рівність можна записати у вигляді

$$\mathrm{M}_p(f_1\Gamma)=\frac{\omega_{n-1}}{\left(\displaystyle\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}}q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}},$$

де $q_{x_0}(t)=Kt^{\alpha}$.

Отже, згідно з твердженням 1, гомеоморфізм $f_1$ є кільцевим $Q$-гомеоморфізмом щодо $p$-модуля при $p > n$ з функцією $Q(x) = K|x|^{\alpha}$ в точці $x_0 = 0$.

## Література


1. J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., vol. 229, Springer-Verlag, Berlin (1971).
2. V. I. Ryazanov, E. A. Sevost'yanov, *Equicontinuous classes of ring $Q$-homeomorphisms*, Sib. Math. J., **48**, № 6, 1093 – 1105 (2007).
3. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *$Q$-homeomorphisms*, Complex Analysis and Dynamical Systems, Contemp. Math., **364**, 193 – 203 (2004).
4. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On $Q$-homeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **30**, № 1, 49 – 69 (2005).
5. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Math. Monogr., New York (2009).
6. R. Salimov, *ACL and differentiability of a generalization of quasiconformal maps*, Izv. Math., **72**, № 5, 977 – 984 (2008).
7. A. Golberg, *Differential properties of $(\alpha, Q)$-homeomorphisms*, Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr. (2009), p. 218 – 228.
8. A. Golberg, *Integrally quasiconformal mappings in space*, Trans. Inst. Math. NAS Ukraine, **7**, № 2, 53 – 64 (2010).
9. A. Golberg, R. Salimov, *Logarithmic Hölder continuity of ring homeomorphisms with controlled p-module*, Complex Var. and Elliptic Equat., **59**, № 1, 91 – 98 (2014).
10. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Distortion estimates under mappings with controlled $p$-module*, Ann. Univ. Bucharest, Math. Ser., **63**, № 5, 95 – 114 (2014).
11. R. Salimov, *On finitely Lipschitz space mappings*, Sib. Elecron. Math. Rep., **8**, 284 – 295 (2011).
12. R. Salimov, *Estimation of the measure of the image of the ball*, Sib. Math. J., **53**, № 4, 920 – 930 (2012).
13. R. Salimov, *To a theory of ring $Q$-homeomorphisms with respect to a $p$-modulus*, Ukr. Math. Bull., **10**, № 3, 379 – 396 (2013).
14. R. Salimov, *One property of ring $Q$-homeomorphisms with respect to a $p$-module*, Ukr. Math. J., **65**, № 5, 728 – 733 (2013).
15. R. Salimov, B. Klishchuk, *The extremal problem for the area of an image of a disc*, Rep. NAS Ukraine, **10**, 22 – 27 (2016).
16. B. Klishchuk, R. Salimov, *Lower bounds for the area of the image of a circle*, Ufa Math. J., **9**, № 2, 55 – 61 (2017).
17. R. Salimov, B. Klishchuk, *Extremal problem for the area of the image of a disk*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **456**, 160 – 171 (2017).
18. R. Salimov, B. Klishchuk, *An extremal problem for the volume functional*, Mat. Stud., **50**, № 1, 36 – 43 (2018).
19. B. Klishchuk, R. Salimov, *Lower bounds for the volume of the image of a ball*, Ukr. Math. J., **71**, № 6, 774 – 785 (2019).
20. M. Cristea, *Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities*, Complex Var. and Eliptic Equat., **59**, № 2, 232 – 246 (2014).
21. M. Cristea, *Some properties of open discrete generalized ring mappings*, Complex Var. and Eliptic Equat., **61**, № 5, 623 – 643 (2016).
22. M. Cristea, *Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities*, Complex Var. and Eliptic Equat., **64**, № 4, 676 – 684 (2019).
23. А. А. Маркиш, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *Об оценке искажения расстояния снизу для одного класса отображений*, Укр. мат. журн, **70**, № 11, 1553 – 1562 (2018).
24. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Singularities of discrete open mappings with controlled p-module*, J. Anal. Math., **127**, 303 – 328 (2015).
25. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz – Sobolev classes*, Complex Anal. and Oper. Theory, **10**, 881 – 901 (2016).
26. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Estimates for Jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p-module*, Complex Anal. and Oper. Theory, **11**, № 7, 1521 – 1542 (2017).

27. R. Salimov, E. Smolovaya, *On the order of growth of ring Q-homeomorphisms at infinity*, Ukr. Math. J., **62**, № 6, 829 – 836 (2010).
28. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск, Наука (1982).
29. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **448**, 1 – 40 (1969).
30. V. A. Shlyk, *The equality between $p$-capacity and $p$-modulus*, Sib. Math. J., **34**, № 6, 216 – 221 (1993).
31. V. Maz'ya, *Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces*, Contemp. Math., **338**, 307 – 340 (2003).
32. F. W. Gehring, *Lipschitz mappings and the $p$-capacity of ring in $n$-space*, Adv. Theory Riemann Surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, New York, 1969), Ann. Math. Stud., **66**, 175 – 193 (1971).

Одержано 10.02.22