DOI: 10.37863/umzh.v74i10.7282

УДК 512.554

Л. А. Курдаченко, О. О. Пипка[1]**, Т. В. Величко** (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ПРО ГРУПИ АВТОМОРФІЗМІВ ДЕЯКИХ АЛГЕБР ЛЕЙБНІЦА МАЛОЇ ВИМІРНОСТІ

We study the automorphism groups of Leibniz algebras of low dimensions and obtain complete descriptions of the automorphism groups of Leibniz algebras of dimension 2 and some types of nilpotent Leibniz algebras of dimension 3.

Досліджено групи автоморфізмів алгебр Лейбніца малої вимірності. Отримано повні описи груп автоморфізмів алгебр Лейбніца вимірності 2 та деяких типів нільпотентних алгебр Лейбніца вимірності 3.

1. Вступ. Нехай L — алгебра над полем F з бінарними операціями $+$ і $[\cdot,\cdot]$. Тоді L називатимемо (*лівою*) *алгеброю Лейбніца*, якщо вона задовольняє (*ліву*) *тотожність Лейбніца*

$$[[a,b],c]=[a,[b,c]]-[b,[a,c]]$$

для всіх $a,b,c\in L$.

Алгебри Лейбніца були визначені у статті А. Блоха [3], проте сам термін „алгебра Лейбніца” з’явився значно пізніше у монографії Ж.-Л. Лоде [11] та його ж статті [12]. А в роботі [13] Ж.-Л. Лоде та Т. Пірашвілі розпочали вже реальне вивчення властивостей алгебр Лейбніца. Теорія алгебр Лейбніца розвивається дуже інтенсивно в багатьох різних напрямках досліджень. З деякими результатами цієї теорії можна ознайомитись у монографії [2]. Зазначимо, що алгебри Лі є частковим випадком алгебр Лейбніца. Водночас, якщо L — алгебра Лейбніца, для якої $[a,a]=0$ для кожного елемента $a\in L$, то вона є алгеброю Лі. Отже, алгебри Лі можуть бути охарактеризовані як антикомутативні алгебри Лейбніца.

Нехай L — алгебра Лейбніца. Як завжди, лінійне перетворення f алгебри L називатимемо *ендоморфізмом*, якщо

$$f([a,b])=[f(a),f(b)]$$

для всіх $a,b\in L$. Очевидно, добуток двох ендоморфізмів алгебри L також є ендоморфізмом, тому множина всіх ендоморфізмів алгебри L є напівгрупою щодо операції множення. Водночас сума двох ендоморфізмів не обов’язково є ендоморфізмом, тому тут не можна говорити про кільце ендоморфізмів.

Як завжди, бієктивний ендоморфізм алгебри L називатимемо *автоморфізмом* алгебри L.

Ми використовуватимемо термін „напівгрупа” для множини, на якій задано асоціативну бінарну операцію. Для напівгрупи, яка містить нейтральний елемент, будемо використовувати термін „моноїд”. Очевидно, тривіальне перетворення є ендоморфізмом алгебри L, тому множина $\mathbf{End}_{[,]}(L)$ усіх ендоморфізмів алгебри L є моноїдом щодо операції множення.

Нехай f — автоморфізм алгебри L. Тоді відображення f^{-1} також є автоморфізмом. Справді, нехай x,y — довільні елементи з L. Тоді існують такі елементи $u,v\in L$, що $x=f(u)$, $y=f(v)$. Таким чином,

---
[1] Відповідальний за листування, e-mail: sasha.pypka@gmail.com.

$$f^{-1}([x,y]) = f^{-1}([f(u), f(v)]) = f^{-1}(f[u,v]) = [u,v] = [f^{-1}(x), f^{-1}(y)].$$

Отже, множина $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$ усіх автоморфізмів алгебри L є групою щодо операції множення.

У загальній теорії груп є дуже розвинений розділ — групи автоморфізмів алгебраїчних систем. Вивчення груп автоморфізмів алгебр Лейбніца, як і будь-яких інших алгебраїчних об'єктів, є однією з природних та важливих задач цієї теорії. Варто зазначити, що групи автоморфізмів алгебр Лейбніца вивчались дуже мало (див. [1, 9, 10]). Природно розпочинати такі дослідження для алгебр Лейбніца, будова яких вивчена досить добре. Опис будови груп автоморфізмів скінченновимірних циклічних алгебр Лейбніца було отримано у статті [9]. Цілком логічно постає питання про групи автоморфізмів алгебр Лейбніца малої вимірності. На відміну від алгебр Лі ситуація з алгебрами Лейбніца вимірності 3 дуже різноманітна. Алгебри Лейбніца вимірності 3 здебільшого описані. Опис алгебр Лейбніца вимірності 4 і 5 проводиться досить інтенсивно. Список робіт, присвячених цим дослідженням, досить великий, і ми не будемо наводити його тут повністю. Зазначимо лише, що вивченню алгебр Лейбніца вимірності 3 присвячено розділ 3.1 монографії [2] та статті [4, 6, 7, 14 – 16].

У цій роботі ми розпочинаємо опис груп автоморфізмів алгебр Лейбніца вимірності 3. Цей опис досить великий за обсягом, тому ми обмежимось описом груп автоморфізмів лише деяких типів алгебр Лейбніца вимірності 3.

2. Попередні відомості та загальні властивості автоморфізмів алгебр Лейбніца. Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F. Алгебру L називатимемо *абелевою*, якщо $[a,b] = 0$ для всіх елементів $a, b \in L$. Зокрема, абелева алгебра Лейбніца є алгеброю Лі.

Якщо A, B — підпростори з L, то позначимо через $[A,B]$ підпростір, породжений усіма елементами $[a,b]$, де $a \in A$, $b \in B$. Традиційно, підпростір A з L називатимемо *підалгеброю* алгебри L, якщо $[a,b] \in A$ для всіх $a, b \in A$, тобто якщо $[A,A] \leq A$. Підалгебру A алгебри L називатимемо *лівим* (відповідно *правим*) *ідеалом* алгебри L, якщо $[b,a] \in A$ (відповідно $[a,b] \in A$) для всіх $a \in A$, $b \in L$, тобто якщо $[L,A] \leq A$ (відповідно $[A,L] \leq A$). Підалгебру A алгебри L називатимемо *ідеалом* алгебри L, якщо A одночасно є правим і лівим ідеалом L.

Позначимо через $\mathbf{Leib}(L)$ підпростір, породжений елементами $[a,a]$, $a \in L$. Легко показати, що $\mathbf{Leib}(L)$ є ідеалом алгебри L. Називатимемо його *ядром Лейбніца* алгебри L.

Лівий (відповідно *правий*) *центр* $\zeta^{\text{left}}(L)$ (відповідно $\zeta^{\text{right}}(L)$) алгебри L визначимо за правилом

$$\zeta^{\text{left}}(L) = \{a \in L \mid [a,b] = 0 \text{ для кожного } b \in L\}$$

(відповідно

$$\zeta^{\text{right}}(L) = \{a \in L \mid [b,a] = 0 \text{ для кожного } b \in L\}).$$

Легко показати, що лівий центр алгебри L є ідеалом, проте це не справджується для правого центра. Правий центр є підалгеброю алгебри L. Варто зазначити, що у загальному випадку лівий та правий центри різні і можуть навіть мати різні вимірності (див., наприклад, [8]).

Центр $\zeta(L)$ алгебри L визначають як перетин лівого і правого центрів, тобто

$$\zeta(L) = \{a \in L \mid [a,b] = 0 = [b,a] \text{ для кожного } b \in L\}.$$

Очевидно, що центр $\zeta(L)$ є ідеалом алгебри L.

Визначимо *верхній центральний ряд*

$$\langle 0\rangle = \zeta_0(L) \leq \zeta_1(L) \leq \ldots \zeta_\alpha(L) \leq \zeta_{\alpha+1}(L) \leq \ldots \zeta_\eta(L) = \zeta_\infty(L)$$

алгебри L за правилом $\zeta_1(L) = \zeta(L),\ \zeta_{\alpha+1}(L)/\zeta_\alpha(L) = \zeta(L/\zeta_\alpha(L))$ для всіх порядкових чисел α і $\zeta_\lambda(L) = \bigcup_{\mu<\lambda} \zeta_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ. Останній член $\zeta_\eta(L) = \zeta_\infty(L)$ цього ряду називають *верхнім гіперцентром* алгебри L.

Визначимо тепер *нижній центральний ряд*

$$L = \gamma_1(L) \geq \gamma_2(L) \geq \ldots \gamma_\alpha(L) \geq \gamma_{\alpha+1} \geq \ldots \gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$$

алгебри L за правилом $\gamma_1(L) = L,\ \gamma_2(L) = [L, L],\ \gamma_{\alpha+1}(L) = [L, \gamma_\alpha(L)]$ для всіх порядкових чисел α і $\gamma_\lambda(L) = \bigcap_{\mu<\lambda} \gamma_\mu(L)$ для всіх граничних порядкових чисел λ. Останній член $\gamma_\delta(L) = \gamma_\infty(L)$ цього ряду називають *нижнім гіпоцентром* алгебри L.

Алгебру Лейбніца L називатимемо *нільпотентною*, якщо існує таке натуральне число k, що $\gamma_k(L) = \langle 0\rangle$. Разом з тим алгебру L називатимемо *нільпотентною класу нільпотентності* c, якщо $\gamma_{c+1}(L) = \langle 0\rangle$, але $\gamma_c(L) \neq \langle 0\rangle$.

Лема 2.1. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, f — автоморфізм алгебри L. Тоді* $f(\zeta^{\text{left}}(L)) = \zeta^{\text{left}}(L),\ f(\zeta^{\text{right}}(L)) = \zeta^{\text{right}}(L),\ f(\zeta(L)) = \zeta(L),\ f([L, L]) = [L, L]$.

Доведення. Нехай x — довільний елемент з L і $z \in \zeta^{\text{left}}(L)$. Оскільки f є автоморфізмом алгебри L, то існує такий елемент $y \in L$, що $x = f(y)$. Тоді

$$[f(z), x] = [f(z), f(y)] = f([z, y]) = f(0) = 0.$$

Це означає, що $f(z) \in \zeta^{\text{left}}(L)$. Водночас існують такі елементи $u, v \in L$, що $z = f(u)$, $x = f^{-1}(v)$. Тоді

$$[u, x] = [f^{-1}(z), f^{-1}(v)] = f^{-1}([z, v]) = f^{-1}(0) = 0.$$

Таким чином, $u \in \zeta^{\text{left}}(L),\ z \in f(\zeta^{\text{left}}(L))$, і тому $\zeta^{\text{left}}(L) = f(\zeta^{\text{left}}(L))$. Аналогічно можна довести, що $\zeta^{\text{right}}(L) = f(\zeta^{\text{right}}(L))$ і $\zeta(L) = f(\zeta(L))$.

Якщо x, y — елементи з L, то $f([x, y]) = [f(x), f(y)] \in [L, L]$. Інакше кажучи, $f([L, L]) \leq [L, L]$. Нехай тепер $w \in [L, L]$. Тоді $w = \alpha_1[u_1, v_1] + \ldots + \alpha_t[u_t, v_t]$ для деяких елементів $u_1, v_1, \ldots, u_t, v_t \in L,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_t \in F$. Оскільки f є автоморфізмом алгебри L, то існують такі елементи $a_1, b_1, \ldots, a_t, b_t \in L$, що $u_j = f(a_j),\ v_j = f(b_j),\ 1 \leq j \leq t$. Тоді

$$w = \sum_{1\leq j\leq t} \alpha_j[u_j, v_j] = \sum_{1\leq j\leq t} \alpha_j[f(a_j), f(b_j)] = \sum_{1\leq j\leq t} \alpha_j f([a_j, b_j]) =$$

$$= f\left(\sum_{1\leq j\leq t} \alpha_j[a_j, b_j]\right) \in f([L, L]).$$

Таким чином, $[L, L] \leq f([L, L])$, і тому $[L, L] = f([L, L])$.

Лему 2.1 доведено.

Лема 2.2. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, f — автоморфізм алгебри L. Тоді $f(\zeta_\alpha(L)) = \zeta_\alpha(L)$, $f(\gamma_\alpha(L)) = \gamma_\alpha(L)$ для всіх порядкових чисел α. Зокрема, $f(\zeta_\infty(L)) = \zeta_\infty(L)$ і $f(\gamma_\infty(L)) = \gamma_\infty(L)$.*

Доведення цього результату аналогічне доведенню леми 2.1.

Лема 2.3. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, f — ендоморфізм алгебри L. Тоді $f(\gamma_\alpha(L)) \leq \gamma_\alpha(L)$ для всіх порядкових чисел α. Зокрема, $f(\gamma_\infty(L)) \leq \gamma_\infty(L)$.*

Доведення. Якщо x, y — елементи з L, то $f([x,y]) = [f(x), f(y)] \in [L,L]$. Це означає, що $f([L,L]) \leq [L,L]$. Припустимо, що включення $f(\gamma_\beta(L)) \leq \gamma_\beta(L)$ доведено для всіх порядкових чисел $\beta < \alpha$. Якщо α — граничне порядкове число, то $\gamma_\alpha(L) = \bigcap_{\beta<\alpha} \gamma_\beta(L)$. У цьому випадку

$$f(\gamma_\alpha(L)) = f\left(\bigcap_{\beta<\alpha} \gamma_\beta(L)\right) \leq \bigcap_{\beta<\alpha} f(\gamma_\beta(L)) \leq \bigcap_{\beta<\alpha} \gamma_\beta(L) = \gamma_\alpha(L).$$

Припустимо тепер, що α не є граничним порядковим числом. Тоді число $\alpha - 1 = \delta$ існує. За означенням $\gamma_\alpha(L) = [L, \gamma_\delta(L)]$. Згідно з індуктивним припущенням $f(\gamma_\delta(L)) \leq \gamma_\delta(L)$. Нехай $w \in L$, $v \in \gamma_\delta(L)$. Тоді $f([w,v]) = [f(w), f(v)] \in [L, \gamma_\delta(L)] = \gamma_\alpha(L)$. Це означає, що $f([L, \gamma_\delta(L)]) = f(\gamma_\alpha(L)) \leq \gamma_\alpha(L)$.

Лему 2.3 доведено.

Нехай L — алгебра Лейбніца, A — підалгебра з L, $G = \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Тоді

$$C_G(A) = \{\alpha \in G |\ \alpha(x) = x \text{ для кожного } x \in A\}.$$

Якщо при цьому A — ідеал алгебри L, то

$$C_G(L/A) = \{\alpha \in G |\ \alpha(x + A) = x + A \text{ для кожного } x \in L\} =$$

$$= \{\alpha \in G |\ \alpha(x) \in x + A \text{ для кожного } x \in L\}.$$

Лема 2.4. *Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, $G = \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Якщо A є G-інваріантною підалгеброю алгебри L, то $C_G(A)$ і $C_G(L/A)$ — нормальні підгрупи групи G.*

Доведення. Нехай $g \in G$, $f \in C_G(A)$, a — довільний елемент з A. Оскільки A є G-інваріантною підалгеброю, то $g(a) \in A$. Очевидно, що $C_G(A)$ — підгрупа групи G. І навіть більше,

$$(g^{-1} \circ f \circ g)(a) = g^{-1}(f(g(a))) = g^{-1}(g(a)) = a.$$

Отже, $g^{-1} \circ f \circ g \in C_G(A)$. Таким чином, $C_G(A)$ — нормальна підгрупа групи G.

Нехай тепер $g \in G$, $f \in C_G(L/A)$, x — довільний елемент з L. Очевидно, що $C_G(L/A)$ є підгрупою групи G. І навіть більше,

$$(g^{-1} \circ f \circ g)(x + A) = g^{-1}(f(g(x + A))) = g^{-1}(f(g(x) + A)) =$$

$$= g^{-1}(g(x) + A) = g^{-1}(g(x)) + A = x + A.$$

Отже, $g^{-1} \circ f \circ g \in C_G(L/A)$, і тому $C_G(L/A)$ нормальна в G.

Лему 2.4 доведено.

3. Опис груп автоморфізмів алгебр Лейбніца вимірності 2. Першим природним кроком є знаходження будови груп автоморфізмів двовимірних алгебр Лейбніца. Опис таких алгебр наведено у кількох статтях, серед яких однією з перших була робота [5]. Алгебри Лейбніца вимірності 2 над полем F, які не є алгебрами Лі, вичерпуються алгебрами двох типів:

$$\mathbf{Lei}_1(2, F) = Fa_1 \oplus Fa_2, \quad \text{де} \quad [a_1, a_1] = a_2, [a_1, a_2] = [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = 0,$$

$$\mathbf{Lei}_2(2,F) = Fa_1 \oplus Fa_2, \quad \text{де} \quad [a_1,a_1] = [a_1,a_2] = a_2, [a_2,a_1] = [a_2,a_2] = 0.$$

Нехай L — алгебра Лейбніца над полем F, A — підалгебра алгебри L, $G = \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Тоді

$$N_G(A) = \{\alpha \in G |\ \alpha(A) = A\}.$$

Твердження 3.1. *Нехай G — група автоморфізмів алгебри Лейбніца $\mathbf{Lei}_1(2,F)$. Тоді G ізоморфна природному напівпрямому добутку адитивної групи поля F і мультиплікативної групи поля F. Інакше кажучи, G ізоморфна групі матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1^2 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1 \neq 0$.

Доведення. Нехай $L = \mathbf{Lei}_1(2,F)$, $f \in \mathbf{End}_{[,]}(L)$, $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Тоді

$$f(a_2) = f([a_1,a_1]) = [f(a_1), f(a_1)] = [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2] =$$

$$= \alpha_1^2 [a_1,a_1] = \alpha_1^2 a_2.$$

Таким чином, ендоморфізм f має у базисі $\{a_1,a_2\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1^2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\mathbf{ME}(L)$ множину матриць, які мають такий вигляд. Тоді отримаємо ізоморфізм множини $\mathbf{End}_{[,]}(L)$ на множину $\mathbf{ME}(L)$. Зокрема, якщо $\alpha_1 \neq 0$, то f є автоморфізмом. Інакше кажучи,

$$\mathbf{Aut}_{[,]}(L) = \{f |\ f \in \mathbf{End}_{[,]}(L), f(a_1) \notin Fa_2\}.$$

І навіть більше, множина

$$\mathbf{N}_{[,]}(L) = \{f |\ f \in \mathbf{End}_{[,]}(L), f(a_1) \in Fa_2\}$$

є таким ідеалом моноїда $\mathbf{End}_{[,]}(L)$, що $\mathbf{End}_{[,]}(L) = \mathbf{N}_{[,]}(L) \cup \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$.

Якщо $f \in \mathbf{N}_{[,]}(L)$, то $f(a_1) = \nu a_2$ для деякого елемента $\nu \in F$. Це означає, що $f(a_2) = 0$. Нехай $g \in \mathbf{N}_{[,]}(L)$, $g(a_1) = \rho a_2$. Тоді

$$(g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(\nu a_2) = \nu g(a_2) = \nu g([a_1,a_1]) =$$

$$= \nu [g(a_1), g(a_1)] = \nu \rho^2 [a_2,a_2] = 0$$

і $(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(0) = 0$, тобто $g \circ f = 0$. Таким чином, множення в $\mathbf{N}_{[,]}(L)$ є нульовим.

Покладемо

$$G = \mathbf{Aut}_{[,]}(L), \quad T = C_G(L/\zeta(L)), \quad D = N_G(Fa_1).$$

Згідно з лемою 2.4 T — нормальна підгрупа групи G. Також зазначимо, що D — підгрупа групи G.

Якщо $f \in D$, то $f(a_1) = \alpha a_1$ для деякого $\alpha \in F$. Це означає, що $f(a_2) = \alpha^2 a_2$. Тепер навпаки, нехай β — довільний елемент з F і g_β — лінійне перетворення алгебри L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, то $g_\beta(x) = \beta\xi_1 a_1 + \beta^2\xi_2 a_2$. Нехай y — деякий інший елемент з L, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$. Тоді

$$g_\beta([x, y]) = g_\beta([\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2]) = g_\beta(\xi_1\eta_1 a_2) = \beta^2\xi_1\eta_1 a_2,$$

$$[g_\beta(x), g_\beta(y)] = [\beta\xi_1 a_1 + \beta^2\xi_2 a_2, \beta\eta_1 a_1 + \beta^2\eta_2 a_2] = \beta^2\xi_1\eta_1 a_2,$$

тобто $g_\beta([x, y]) = [g_\beta(x), g_\beta(y)]$ і $g_\beta \in D$. Легко показати, що відображення $\beta \to g_\beta$, $\beta \in \mathbf{U}(F)$, є ізоморфізмом мультиплікативної групи поля F на підгрупу D.

Нехай h — довільний елемент з G, $h(a_1) = \lambda a_1 + \mu a_2$. Тоді

$$(h \circ g_{\lambda^{-1}})(a_1) = h(g_{\lambda^{-1}}(a_1)) = h(\lambda^{-1}a_1) = \lambda^{-1}h(a_1) = \lambda^{-1}(\lambda a_1 + \mu a_2) = a_1 + \lambda^{-1}\mu a_2.$$

Інакше кажучи, $h \circ g_{\lambda^{-1}} \in T$. Очевидно, що $g_{\lambda^{-1}} = g_\lambda^{-1}$, тому $h \in g_\lambda T$. Отже, $G = DT$.

Нехай $f \in D \cap T$, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$ — довільний елемент з L. Оскільки $f \in D$, то

$$f(x) = f(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2) = \beta\xi_1 a_1 + \beta^2\xi_2 a_2$$

для деякого елемента $\beta \in F$. З іншого боку, оскільки $f \in T$, то

$$f(x) = f(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2) = \xi_1 a_1 + \kappa a_2$$

для деякого елемента $\kappa \in F$. Це означає, що f є тривіальним перетворенням простору L, і тому перетин $D \cap T$ тривіальний.

Якщо $f \in T$, то $f(a_1) = a_1 + \sigma a_2$ для деякого $\sigma \in F$. Згідно з попередніми міркуваннями $f(a_2) = a_2$. Тепер навпаки, нехай σ — довільний елемент поля F, z_σ — лінійне перетворення простору L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$, то $z_\sigma(x) = \xi_1 a_1 + (\xi_1\sigma + \xi_2)a_2$. І нехай y — інший елемент з L, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$. Тоді

$$z_\sigma([x, y]) = z_\sigma([\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2]) = z_\sigma(\xi_1\eta_1 a_2) = \xi_1\eta_1 a_2,$$

$$[z_\sigma(x), z_\sigma(y)] = [\xi_1 a_1 + (\xi_1\sigma + \xi_2)a_2, \eta_1 a_1 + (\eta_1\sigma + \eta_2)a_2] = \xi_1\eta_1 a_2,$$

тобто $z_\sigma([x, y]) = [z_\sigma(x), z_\sigma(y)]$ і $z_\sigma \in T$. Розглянемо тепер відображення $z_\sigma \circ z_\tau$:

$$(z_\sigma \circ z_\tau)(x) = (z_\sigma \circ z_\tau)(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2) = z_\sigma(z_\tau(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2)) =$$

$$= z_\sigma(\xi_1 a_1 + (\xi_1\tau + \xi_2)a_2) = \xi_1 a_1 + (\xi_1\sigma + \xi_1\tau + \xi_2)a_2 =$$

$$= \xi_1 a_1 + (\xi_1(\sigma + \tau) + \xi_2)a_2 = z_{\sigma+\tau}.$$

Легко показати, що відображення $\sigma \to z_\sigma$, $\sigma \in F$, є ізоморфізмом адитивної групи поля F на підгрупу T. Таким чином, група автоморфізмів $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$ ізоморфна природному напівпрямому добутку адитивної групи поля F і мультиплікативної групи поля F.

Твердження 3.1 доведено.

Твердження 3.2. *Нехай G — група автоморфізмів алгебри Лейбніца $\mathbf{Lei}_2(2, F)$. Тоді G ізоморфна мультиплікативній групі поля F. Інакше кажучи, G ізоморфна групі матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1 \neq 0$.

Доведення. Нехай $L = \mathbf{Lei}_2(2, F)$. Покладемо $a_3 = a_1 - a_2$. Тоді $[a_1, a_3] = [a_1, a_1 - a_2] = a_2 - a_2 = 0$. Оскільки $Fa_2 = \zeta^{\text{left}}(L)$, то $[a_2, a_3] = 0$, а оскільки $[a_3, a_3] = 0$, то $Fa_3 = \zeta^{\text{right}}(L)$. Нарешті, $[a_3, a_2] = [a_1 - a_2, a_2] = a_2$. Очевидно, що підмножина $\{a_2, a_3\}$ є базисом L.

Розглянемо підмножину

$$\mathbf{A} = \{f|\ f \in \mathbf{End}(L), f(a_2) = 0\}.$$

Нехай $f \in \mathbf{A}$, x і y — довільні елементи з L і $x = \lambda_3 a_3 + \lambda_2 a_2$, $y = \mu_3 a_3 + \mu_2 a_2$. Оскільки $f(x), f(y) \in Fa_3$, то $[f(x), f(y)] = 0$, а оскільки $[x, y] = [\lambda_3 a_3 + \lambda_2 a_2, \mu_3 a_3 + \mu_2 a_2] = \lambda_3 \mu_2 a_2$, то $f([x, y]) = 0 = [f(x), f(y)]$. Це означає, що $\mathbf{End}_{[,]}(L)$ містить $\mathbf{A}$.

І навіть більше, $\mathbf{A}$ є ідеалом моноїда $\mathbf{End}_{[,]}(L)$. Справді, нехай $f \in \mathbf{A}$, $g \in \mathbf{End}_{[,]}(L)$. Згідно з лемою 2.3 $g(a_2) \in Fa_2$. Отже, $(f \circ g)(a_2) = f(g(a_2)) = 0$ і $(g \circ f)(a_2) = g(f(a_2)) = g(0) = 0$. Це означає, що $f \circ g, g \circ f \in \mathbf{A}$. Легко показати, що ідеал $\mathbf{A}$ ізоморфний піднапівгрупі матричної напівгрупи $\mathbf{M}_2(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $f \in \mathbf{End}_{[,]}(L)$. Оскільки $Fa_2 = [L, L]$, то $f(a_2) = \alpha_2 a_2$ для деякого $\alpha_2 \in F$. Покладемо $f(a_3) = \alpha_1 a_2 + \alpha_3 a_3$, де $\alpha_1, \alpha_3 \in F$. Тоді

$$f(a_2) = f([a_3, a_2]) = [f(a_3), f(a_2)] = [\alpha_1 a_2 + \alpha_3 a_3, \alpha_2 a_2] = \alpha_3 \alpha_2 a_2,$$

$$0 = f([a_3, a_3]) = [f(a_3), f(a_3)] = [\alpha_1 a_2 + \alpha_3 a_3, \alpha_1 a_2 + \alpha_3 a_3] = \alpha_3 \alpha_1 a_2.$$

Це означає, що $\alpha_2 = \alpha_3 \alpha_2$ і $\alpha_3 \alpha_1 = 0$.

Припустимо, що $\alpha_3 = 0$. Тоді $\alpha_2 = 0$, звідки випливає, що $f(a_2) = 0$. Беручи до уваги попередні міркування, отримуємо, що в цьому випадку $f \in \mathbf{A}$.

Припустимо тепер, що $\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$. Тоді $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Таким чином, $f(a_2) = \alpha_2 a_2$ і $f(a_3) = a_3$. Оскільки $\alpha_2 \neq 0$, то f є автоморфізмом алгебри L. Легко показати, що група автоморфізмів $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$ ізоморфна піднапівгрупі матричної напівгрупи $\mathbf{M}_2(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що остання ізоморфна мультиплікативній групі поля F.

Твердження 3.2 доведено.

4. Опис груп автоморфізмів деяких алгебр Лейбніца вимірності 3. Тепер перейдемо до основної частини статті — дослідження груп автоморфізмів алгебр Лейбніца вимірності 3. Звісно, розглядатимемо лише ті алгебри Лейбніца, які не є алгебрами Лі. Це означає, що їхнє ядро Лейбніца ненульове. Першим типом алгебр Лейбніца, який буде розглянуто, є нільпотентні алгебри Лейбніца, а першими з них є нільпотентні алгебри Лейбніца класу нільпотентності 3. Існує лише один тип таких алгебр, а саме:

$$\mathbf{Lei}_1(3,F) = Fa_1 \oplus Fa_2 \oplus Fa_3, \text{ де } [a_1,a_1] = a_2, [a_1,a_2] = a_3,$$

$$[a_1,a_3] = [a_2,a_1] = [a_2,a_2] = [a_2,a_3] = [a_3,a_1] = [a_3,a_2] = [a_3,a_3] = 0.$$

Це циклічна алгебра Лейбніца,

$$\mathbf{Leib}(\mathbf{Lei}_1(3,F)) = \zeta^{\text{left}}(\mathbf{Lei}_1(3,F)) = [\mathbf{Lei}_1(3,F), \mathbf{Lei}_1(3,F)] = Fa_2 \oplus Fa_3,$$

$$\zeta^{\text{right}}(\mathbf{Lei}_1(3,F)) = \zeta(\mathbf{Lei}_1(3,F)) = \gamma_3(\mathbf{Lei}_1(3,F)) = Fa_3.$$

Теорема 4.1. *Нехай G — група автоморфізмів алгебри Лейбніца $\mathbf{Lei}_1(3,F)$. Тоді G ізоморфна підгрупі групи $\mathbf{GL}_3(F)$, яка складається з матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^3 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1 \neq 0$. Ця підгрупа є напівпрямим добутком нормальної підгрупи $\mathbf{T}_3(L,F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix},$$

і підгрупи $\mathbf{D}_3(L,F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^3 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай $L = \mathbf{Lei}_1(3,F)$, $f \in \mathbf{End}_{[,]}(L)$, $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$. Тоді

$$f(a_2) = f([a_1,a_1]) = [f(a_1), f(a_1)] = [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3] =$$

$$= \alpha_1^2 [a_1,a_1] + \alpha_1\alpha_2 [a_1,a_2] = \alpha_1^2 a_2 + \alpha_1\alpha_2 a_3,$$

$$f(a_3) = f([a_1,a_2]) = [f(a_1), f(a_2)] = [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \alpha_1^2 a_2 + \alpha_1\alpha_2 a_3] =$$

$$= \alpha_1^3 [a_1,a_2] = \alpha_1^3 a_3.$$

Отже, ендоморфізм f має в базисі $\{a_1, a_2, a_3\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1^2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1^3 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через Ξ мономорфізм моноїда $\mathbf{End}_{[,]}(L)$ в $\mathbf{M}_3(F)$.

Нехай $f \in \mathbf{End}_{[,]}(L)$ і припустимо, що f не є автоморфізмом. Тоді $\mathbf{Im}(f)$ — власна підалгебра алгебри L. Оскільки алгебра L циклічна, то $\mathbf{Im}(f) \leq [L, L]$.

Покладемо
$$\mathbf{N} = \{f|\ f \in \mathbf{End}(L), f(a_1) \in Fa_2 \oplus Fa_3\}.$$
Якщо $f \in \mathbf{N} \cap \mathbf{End}_{[,]}(L)$, то $f(a_1) = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3,\ f(a_2) = f(a_3) = 0$. Нехай x — довільний елемент з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$. Тоді $f(x) = \xi_1 f(a_1) + \xi_2 f(a_2) + \xi_3 f(a_3) = \xi_1\alpha_2 a_2 + \xi_1\alpha_3 a_3$.

Тепер навпаки, нехай β, γ — елементи з F і $g_{\beta,\gamma}$ — лінійне перетворення L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $g_{\beta,\gamma}(x) = \beta\xi_1 a_2 + \gamma\xi_1 a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3,\ y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x, y] = [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] =$$

$$= \xi_1\eta_1[a_1, a_1] + \xi_1\eta_2[a_1, a_2] = \xi_1\eta_1 a_2 + \xi_1\eta_2 a_3,$$

$$g_{\beta,\gamma}([x, y]) = g_{\beta,\gamma}(\xi_1\eta_1 a_2 + \xi_1\eta_2 a_3) = \xi_1\eta_1 g_{\beta,\gamma}(a_2) + \xi_1\eta_2 g_{\beta,\gamma}(a_3) = 0,$$

$$[g_{\beta,\gamma}(x), g_{\beta,\gamma}(y)] = [\beta\xi_1 a_2 + \gamma\xi_1 a_3, \beta\eta_1 a_2 + \gamma\eta_1 a_3] = 0,$$

тобто $g_{\beta,\gamma}([x, y]) = [g_{\beta,\gamma}(x), g_{\beta,\gamma}(y)]$. Це означає, що $\mathbf{N} \leq \mathbf{End}_{[,]}(L)$.

Очевидно, що підмножина матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

є ідеалом напівгрупи (щодо операції множення) всіх трикутних матриць над полем F, а $\mathbf{N}$ — ідеалом моноїда $\mathbf{End}_{[,]}(L)$. Також очевидно, що добуток будь-яких двох елементів з $\mathbf{N}$ нульовий. І навіть більше, $\mathbf{End}_{[,]}(L) = \mathbf{N} \cup \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$.

Покладемо
$$\mathbf{D} = \{f|\ f \in \mathbf{End}(L), f(a_1) = \alpha a_1\}.$$
Якщо $f \in \mathbf{D} \cap \mathbf{End}_{[,]}(L)$, то $f(a_2) = \alpha^2 a_2,\ f(a_3) = \alpha^3 a_3$.

Тепер навпаки, нехай β — довільний елемент поля F і g_β — лінійне перетворення L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $g_\beta(x) = \beta\xi_1 a_1 + \beta^2\xi_2 a_2 + \beta^3\xi_3 a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3,\ y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x, y] = \xi_1\eta_1 a_2 + \xi_1\eta_2 a_3,$$

$$g_\beta([x, y]) = g_\beta(\xi_1\eta_1 a_2 + \xi_1\eta_2 a_3) = \beta^2\xi_1\eta_1 a_2 + \beta^3\xi_1\eta_2 a_3,$$

$$[g_\beta(x), g_\beta(y)] = [\beta\xi_1 a_1 + \beta^2\xi_2 a_2 + \beta^3\xi_3 a_3, \beta\eta_1 a_1 + \beta^2\eta_2 a_2 + \beta^3\eta_3 a_3] =$$

$$= \beta^2 \xi_1 \eta_1 [a_1, a_1] + \beta^3 \xi_1 \eta_2 [a_1, a_2] = \beta^2 \xi_1 \eta_1 a_2 + \beta^3 \xi_1 \eta_2 a_3,$$

тобто $g_\beta([x, y]) = [g_\beta(x), g_\beta(y)]$. Це означає, що $\mathbf{D} \leq \mathbf{End}_{[,]}(L)$. Очевидно, що $\mathbf{N} \cap \mathbf{D} = \langle 0 \rangle$.

Покладемо $\mathbf{D}_3(L, F) = \Xi(\mathbf{D})$. Тоді $\mathbf{D}_3(L, F)$ — підгрупа групи $\mathbf{GL}_3(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^3 \end{pmatrix}.$$

За доведеним вище перетин $\mathbf{D} \cap \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$ ізоморфний $\mathbf{D}_3(L, F)$.

Покладемо

$$\mathbf{T} = \{f | \ f \in \mathbf{End}(L), f(a_1) \in a_1 + [L, L]\}.$$

Якщо $f \in \mathbf{T} \cap \mathbf{End}_{[,]}(L)$, то $f(a_1) = a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \ f(a_2) = a_2 + \alpha_2 a_3, \ f(a_3) = a_3$. Нехай x — довільний елемент з $L, \ x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$. Тоді

$$f(x) = \xi_1 f(a_1) + \xi_2 f(a_2) + \xi_3 f(a_3) =$$

$$= \xi_1 a_1 + \xi_1 \alpha_2 a_2 + \xi_1 \alpha_3 a_3 + \xi_2 a_2 + \xi_2 \alpha_2 a_3 + \xi_3 a_3 =$$

$$= \xi_1 a_1 + (\xi_1 \alpha_2 + \xi_2) a_2 + (\xi_1 \alpha_3 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3) a_3.$$

Тепер навпаки, нехай β, γ — довільні елементи поля F і $z_{\beta,\gamma}$ — лінійне перетворення L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $z_{\beta,\gamma}(x) = \xi_1 a_1 + (\xi_1 \beta + \xi_2) a_2 + (\xi_1 \gamma + + \xi_2 \beta + \xi_3) a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи з $L, \ x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \ y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x, y] = \xi_1 \eta_1 a_2 + \xi_1 \eta_2 a_3,$$

$$z_{\beta,\gamma}([x, y]) = z_{\beta,\gamma}(\xi_1 \eta_1 a_2 + \xi_1 \eta_2 a_3) = \xi_1 \eta_1 z_{\beta,\gamma}(a_2) + \xi_1 \eta_2 z_{\beta,\gamma}(a_3) =$$

$$= \xi_1 \eta_1 (a_2 + \beta a_3) + \xi_1 \eta_2 a_3 = \xi_1 \eta_1 a_2 + (\xi_1 \eta_1 \beta + \xi_1 \eta_2) a_3,$$

$$[z_{\beta,\gamma}(x), z_{\beta,\gamma}(y)] =$$

$$= \ [\xi_1 a_1 + (\xi_1 \beta + \xi_2) a_2 + (\xi_1 \gamma + \xi_2 \beta + \xi_3) a_3, \eta_1 a_1 + (\eta_1 \beta + \eta_2) a_2 + (\eta_1 \gamma + \eta_2 \beta + \eta_3) a_3] =$$

$$= \xi_1 \eta_1 [a_1, a_1] + \xi_1 (\eta_1 \beta + \eta_2) [a_1, a_2] = \xi_1 \eta_1 a_2 + (\xi_1 \eta_1 \beta + \xi_1 \eta_2) a_3,$$

тобто $z_{\beta,\gamma}([x, y]) = [z_{\beta,\gamma}(x), z_{\beta,\gamma}(y)]$. Це означає, що $\mathbf{T} \leq \mathbf{End}_{[,]}(L)$. І навіть більше, очевидно, що $z_{\beta,\gamma}$ є невиродженим лінійним перетворенням, тому $\mathbf{T} \leq \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$.

Покладемо $\mathbf{T}_3(L, F) = \Xi(T)$. Тоді $\mathbf{T}_3(L, F)$ — підгрупа групи $\mathbf{UT}_3(F)$ усіх унітрикутних матриць над полем F, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко переконатися у тому, що підгрупа $\mathbf{T}_3(L,F)$ абелева. З рівності

$$\mathbf{UT}_3(F) \cap \Xi(\mathbf{Aut}_{[,]}(L)) = \mathbf{T}_3(L,F)$$

випливає, що підгрупа T нормальна в $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$.

Нехай h — довільний елемент з $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$, $h(a_1) = \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3$. Тоді

$$(h \circ g_{\lambda^{-1}})(a_1) = h(g_{\lambda^{-1}}(a_1)) = h(\lambda^{-1} a_1) =$$

$$= \lambda^{-1} h(a_1) = \lambda^{-1}(\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3) \in a_1 + [L, L].$$

Це означає, що $h \circ g_{\lambda^{-1}} \in \mathbf{T}$. Очевидно, що $g_{\lambda^{-1}} = g_\lambda^{-1}$, тому $h \in g_\lambda T$, звідки випливає рівність $\mathbf{Aut}_{[,]}(L) = (\mathbf{D} \cap \mathbf{Aut}_{[,]}(L))\mathbf{T}$. Очевидно, що перетин $\mathbf{D} \cap \mathbf{T}$ тривіальний.

За доведеним вище група автоморфізмів $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$ ізоморфна підгрупі групи $\mathbf{GL}_3(F)$ і є напівпрямим добутком $\mathbf{T}_3(L,F)$ і $\mathbf{D}_3(L,F)$.

Теорему 4.1 доведено.

Нехай тепер L — нільпотентна алгебра Лейбніца, клас нільпотентності якої дорівнює 2. Звісно, ми припускаємо, що L не є алгеброю Лі. Тоді центр $\zeta(L)$ має вимірність 2 або 1. Припустимо, що $\mathbf{dim}_F(\zeta(L)) = 2$. Оскільки L не є алгеброю Лі, то існує такий елемент a_1, що $[a_1, a_1] = a_3 \neq 0$. Оскільки алгебра Лейбніца вимірності 1 абелева, то $a_3 \in \zeta(L)$. Це означає, що $[a_1, a_3] = [a_3, a_1] = [a_3, a_3] = 0$. Оскільки центр $\zeta(L)$ є абелевою алгеброю вимірності 2, то він має прямий розклад $\zeta(L) = Fa_2 \oplus Fa_3$ для деякого елемента a_2. Отже, отримуємо такий тип нільпотентної алгебри Лейбніца:

$$\mathbf{Lei}_2(3,F) = Fa_1 \oplus Fa_2 \oplus Fa_3, \text{ де } [a_1, a_1] = a_3,$$

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_3] = [a_2, a_1] = [a_2, a_2] = [a_2, a_3] = [a_3, a_1] = [a_3, a_2] = [a_3, a_3] = 0.$$

Таким чином, $\mathbf{Lei}_2(3,F)$ є прямою сумою двох ідеалів $A = Fa_1 \oplus Fa_3$ і $B = Fa_2$. І навіть більше, A — циклічна нільпотентна алгебра Лейбніца вимірності 2,

$$\mathbf{Leib}(\mathbf{Lei}_2(3,F)) = [\mathbf{Lei}_2(3,F), \mathbf{Lei}_2(3,F)] = Fa_3,$$

$$\zeta^{\text{left}}(\mathbf{Lei}_2(3,F)) = \zeta^{\text{right}}(\mathbf{Lei}_2(3,F)) = \zeta(\mathbf{Lei}_2(3,F)) = Fa_2 \oplus Fa_3.$$

Теорема 4.2. *Нехай G — група автоморфізмів алгебри Лейбніца $\mathbf{Lei}_2(3,F)$. Тоді G ізоморфна підгрупі групи $\mathbf{GL}_3(F)$, яка складається з матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. Інакше кажучи, $G = \mathbf{S} \leftthreetimes \mathbf{D}$, $\mathbf{D} \cong F^\times$, $\mathbf{S} = \mathbf{TC}$, де $\mathbf{T}$ нормальна в G, $\mathbf{T} \cong F_+ \times F_+$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, де $\mathbf{A}$ нормальна в $\mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cong F_+ \times F_+$, $\mathbf{B} \cong F^\times$. Крім того, $\mathbf{S}$ ізоморфна підгрупі групи $\mathbf{GL}_3(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{T}$ *ізоморфна підгрупі матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{C}$ *ізоморфна підгрупі матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{A}$ *ізоморфна підгрупі матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{B}$ *ізоморфна підгрупі матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{D}$ *ізоморфна підгрупі матриць вигляду*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^2 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай $L = \mathbf{Lei}_2(3, F),\ f \in \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Згідно з лемою 2.1 $f(Fa_3) = Fa_3$, $f(Fa_2 \oplus Fa_3) = Fa_2 \oplus Fa_3$, тому $f(a_1) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3,\ f(a_2) = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$. Тоді

$$f(a_3) = f([a_1, a_1]) = [f(a_1), f(a_1)] =$$

$$= [\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3, \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3] = \alpha_1^2 [a_1, a_1] = \alpha_1^2 a_3.$$

Таким чином, автоморфізм f має в базисі $\{a_1, a_2, a_3\}$ матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через Ξ канонічний мономорфізм моноїда $\mathbf{End}_{[,]}(L)$ в $\mathbf{M}_3(F)$.

Нехай

$$\mathbf{T} = \{f |\ f \in \mathbf{End}(L), f(a_1) \in a_1 + [L, L], f(a_2) \in a_2 + [L, L]\} = C_{\mathbf{End}(L)}(L/[L, L]).$$

Якщо $f \in \mathbf{T} \cap \mathbf{End}_{[,]}(L)$, то $f(a_1) = a_1 + \alpha_3 a_3,\ f(a_2) = a_2 + \beta_3 a_3,\ f(a_3) = a_3$. Якщо x — довільний елемент з $L,\ x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то

$$f(x) = \xi_1 f(a_1) + \xi_2 f(a_2) + \xi_3 f(a_3) = \xi_1 a_1 + \xi_1\alpha_3 a_3 + \xi_2 a_2 + \xi_2\beta_3 a_3 + \xi_3 a_3 =$$

$$= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + (\xi_1\alpha_3 + \xi_2\beta_3 + \xi_3)a_3.$$

Тепер навпаки, нехай λ, μ — довільні елементи поля F і $z_{\lambda,\mu}$ — лінійне перетворення L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $z_{\lambda,\mu}(x) = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + (\xi_1\lambda + \xi_2\mu + \xi_3)a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x, y] = [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = \xi_1\eta_1[a_1, a_1] = \xi_1\eta_1 a_3,$$

$$z_{\lambda,\mu}([x, y]) = z_{\lambda,\mu}(\xi_1\eta_1 a_3) = \xi_1\eta_1 z_{\lambda,\mu}(a_3) = \xi_1\eta_1 a_3,$$

$$[z_{\lambda,\mu}(x), z_{\lambda,\mu}(y)] =$$

$$= [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + (\xi_1\lambda + \xi_2\mu + \xi_3)a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + (\eta_1\lambda + \eta_2\mu + \eta_3)a_3] =$$

$$= \xi_1\eta_1[a_1, a_1] = \xi_1\eta_1 a_3,$$

тобто $z_{\lambda,\mu}([x, y]) = [z_{\lambda,\mu}(x), z_{\lambda,\mu}(y)]$. Це означає, що $\mathbf{T} \leq \mathbf{End}_{[,]}(L)$. І навіть більше, очевидно, що $z_{\lambda,\mu}$ є невиродженим лінійним перетворенням, і тому $\mathbf{T} \leq \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Покладемо $\mathbf{T}_3(L, F) = \Xi(\mathbf{T})$. Тоді $\mathbf{T}_3(L, F)$ — підгрупа групи $\mathbf{UT}_3(F)$ усіх унітрикутних матриць над полем F, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко довести, що підгрупа $\mathbf{T}_3(L, F)$ абелева та ізоморфна прямому добутку двох копій адитивної групи поля F. Також легко показати, що $\mathbf{T}$ нормальна в $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$.

Нехай

$$\mathbf{S} = \{f |\ f \in \mathbf{End}(L), f(a_1) \in a_1 + \zeta(L)\} = C_{\mathbf{End}(L)}(L/\zeta(L)).$$

Якщо $f \in \mathbf{S} \cap \mathbf{End}_{[,]}(L)$, то $f(a_1) = a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$, $f(a_2) = \beta_2 a_2 + \beta_3 a_3$, $f(a_3) = a_3$. Якщо x — довільний елемент з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то

$$f(x) = \xi_1 f(a_1) + \xi_2 f(a_2) + \xi_3 f(a_3) =$$

$$= \xi_1 a_1 + \xi_1\alpha_2 a_2 + \xi_1\alpha_3 a_3 + \xi_2\beta_2 a_2 + \xi_2\beta_3 a_3 + \xi_3 a_3 =$$

$$= \xi_1 a_1 + (\xi_1\alpha_2 + \xi_2\beta_2)a_2 + (\xi_1\alpha_3 + \xi_2\beta_3 + \xi_3)a_3.$$

Тепер навпаки, нехай $\lambda, \mu, \nu, \sigma$ — довільні елементи поля F і $v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}$ — лінійне перетворення L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}(x) = \xi_1 a_1 + (\xi_1\lambda + \xi_2\nu)a_2 + (\xi_1\mu + \xi_2\sigma + \xi_3)a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, $y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x, y] = [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = \xi_1\eta_1[a_1, a_1] = \xi_1\eta_1 a_3,$$

$$v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}([x,y]) = v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}(\xi_1\eta_1 a_3) = \xi_1\eta_1 v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}(a_3) = \xi_1\eta_1 a_3,$$

$$[v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}(x), v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}(y)] =$$

$$= [\xi_1 a_1 + (\xi_1\lambda + \xi_2\nu)a_2 + (\xi_1\mu + \xi_2\sigma + \xi_3)a_3, \eta_1 a_1 + (\eta_1\lambda + \eta_2\nu)a_2 + (\eta_1\mu + \eta_2\sigma + \eta_3)a_3] =$$

$$= \xi_1\eta_1[a_1, a_1] = \xi_1\eta_1 a_3,$$

тобто $v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}([x,y]) = [v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}(x), v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}(y)]$. Це означає, що $\mathbf{S} \leq \mathbf{End}_{[,]}(L)$. І навіть більше, очевидно, що $v_{\lambda,\mu,\nu,\sigma}$ є невиродженим лінійним перетворенням, і тому $\mathbf{S} \leq \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Покладемо $\mathbf{S}_3(L,F) = \Xi(\mathbf{S})$. Тоді $\mathbf{S}_3(L,F)$ — підгрупа групи $\mathbf{T}_3(F)$, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покладемо

$$\mathbf{C} = \{f|\ f \in \mathbf{S}, f(a_2) = \beta a_2\}.$$

Якщо $f \in \mathbf{C}$, то $f(a_1) = a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3,\ f(a_2) = \beta_2 a_2,\ f(a_3) = a_3$.

Нехай x — довільний елемент з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$. Тоді

$$f(x) = \xi_1 f(a_1) + \xi_2 f(a_2) + \xi_3 f(a_3) = \xi_1 a_1 + \xi_1\alpha_2 a_2 + \xi_1\alpha_3 a_3 + \xi_2\beta_2 a_2 + \xi_3 a_3 =$$

$$= \xi_1 a_1 + (\xi_1\alpha_2 + \xi_2\beta_2)a_2 + (\xi_1\alpha_3 + \xi_3)a_3.$$

Покладемо $\mathbf{C}_3(L,F) = \Xi(\mathbf{C})$. Тоді $\mathbf{C}_3(L,F)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 + \beta_2\lambda_2 & \beta_2\mu_2 & 0 \\ \alpha_3 + \lambda_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

показує, що $\mathbf{C}$ є підгрупою $\mathbf{S}$, а оскільки

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_2\beta_2^{-1} & \beta_2^{-1} & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 - \beta_3\alpha_2\beta_2^{-1} - \alpha_3 & \beta_3\beta_2^{-1} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{T},$$

то $\mathbf{S} = \mathbf{TC}$. Як було зазначено, $\mathbf{T}$ нормальна в $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Зокрема, $\mathbf{T}$ нормальна в $\mathbf{S}$. Разом з тим, перетин $\mathbf{T} \cap \mathbf{C}$ є підгрупою групи $\mathbf{UT}_3^2(F)$, тобто підгрупою матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in F.$$

Можна довести, що центр підгрупи $\mathbf{S}_3(L,F)$ містить $\mathbf{UT}_3^2(F)$, а $\mathbf{UT}_3^2(F)$ ізоморфна адитивній групі поля F.

Легко показати, що комутант підгрупи $\mathbf{C}_3(L,F)$ збігається з множиною матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in F,$$

а рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma+\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

показує, що цей комутант ізоморфний адитивній групі поля F.

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньо можна переконатись у тому, що

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_2^{-1}\gamma - \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Це означає, що якщо $F \neq \mathbb{F}_2$, то для кожної матриці $C \in [\mathbf{C}_3(L,F), \mathbf{C}_3(L,F)]$ існують такі матриці $A \in [\mathbf{C}_3(L,F), \mathbf{C}_3(L,F)]$, $B \in \mathbf{C}_3(L,F)$, що $C = [A,B]$. Таким чином, отримуємо рівність

$$[[\mathbf{C}_3(L,F), \mathbf{C}_3(L,F)], \mathbf{C}_3(L,F)] = [\mathbf{C}_3(L,F), \mathbf{C}_3(L,F)].$$

Якщо $F = \mathbb{F}_2$, то можна показати, що підгрупа $\mathbf{C}_3(L,F)$ абелева й ізоморфна прямому добутку двох копій адитивної групи поля F.

Покладемо

$$\mathbf{A} = \{f |\ f \in \mathbf{C}, f(a_2) = a_2\} = C_{\mathbf{C}}(a_2).$$

Якщо $f \in \mathbf{A}$, то $f(a_1) = a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3,\ f(a_2) = a_2,\ f(a_3) = a_3$.

Покладемо $\mathbf{A}_3(L,F) = \Xi(A)$. Тоді $\mathbf{A}_3(L,F)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2+\lambda_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3+\lambda_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

показує, що підгрупа $\mathbf{A}$ ізоморфна прямому добутку двох копій адитивної групи поля F. Із включення $[\mathbf{C}_3(L,F), \mathbf{C}_3(L,F)] \leq \mathbf{A}_3(L,F)$ випливає, що підгрупа $\mathbf{A}_3(L,F)$ нормальна в $\mathbf{C}_3(L,F)$. Разом з тим очевидно, що $\mathbf{A}_3(L,F) = [\mathbf{C}_3(L,F), \mathbf{C}_3(L,F)] \times \mathbf{UT}_3^2(F)$.

Покладемо

$$\mathbf{B} = \{f|\ f \in \mathbf{C}, f(a_1) = a_1\} = C_{\mathbf{C}}(a_1).$$

Якщо $f \in \mathbf{B}$, то $f(a_1) = a_1,\ f(a_2) = \beta_2 a_2,\ f(a_3) = a_3$.

Покладемо $\mathbf{B}_3(L,F) = \Xi(\mathbf{B})$. Тоді $\mathbf{B}_3(L,F)$ складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, підгрупа $\mathbf{B}_3(L,F)$, а отже і $\mathbf{B}$, ізоморфна мультиплікативній групі поля F. Рівність

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

показує, що $\mathbf{C}_3(L,F) = \mathbf{A}_3(L,F)\mathbf{B}_3(L,F)$, і тому $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Покладемо

$$\mathbf{D} = \{f|\ f \text{ — невироджене лінійне перетворення } L,$$

$$f(a_1) = \alpha a_1 \text{ для деякого } \alpha \in F, f(a_2) = a_2\}.$$

Якщо $f \in \mathbf{D} \cap \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$, то $f(a_1) = \alpha_1 a_1,\ f(a_2) = a_2,\ f(a_3) = \alpha_1^2 a_3$.

Якщо x — довільний елемент з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то

$$f(x) = \xi_1 f(a_1) + \xi_2 f(a_2) + \xi_3 f(a_3) = \xi_1 \alpha_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 \alpha_1^2 a_3.$$

Тепер навпаки, нехай λ — довільний елемент поля F і u_λ — лінійне перетворення L, визначене за правилом: якщо $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3$, то $u_\lambda(x) = \xi_1 \lambda a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 \lambda^2 a_3$.

Нехай x, y — довільні елементи з L, $x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3,\ y = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3$, де $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in F$. Тоді

$$[x,y] = [\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3] = \xi_1 \eta_1 a_3,$$

$$u_\lambda([x,y]) = u_\lambda(\xi_1 \eta_1 a_3) = \xi_1 \eta_1 u_\lambda(a_3) = \xi_1 \eta_1 \lambda^2 a_3,$$

$$[u_\lambda(x), u_\lambda(y)] =$$

$$= [\xi_1 \lambda a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 \lambda^2 a_3, \eta_1 \lambda a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 \lambda^2 a_3] = \xi_1 \eta_1 \lambda^2 [a_1, a_1] = \xi_1 \eta_1 \lambda^2 a_3,$$

тобто $u_\lambda([x,y]) = [u_\lambda(x), u_\lambda(y)]$. Це означає, що $\mathbf{D} \leq \mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Нехай $\mathbf{D}_3(L,F) = \Xi(\mathbf{D})$. Тоді $\mathbf{D}_3(L,F)$ — підгрупа групи $\mathbf{T}_3(F)$ трикутних матриць над полем F, яка складається з матриць вигляду

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^2 \end{pmatrix}.$$

Легко показати, що підгрупа $\mathbf{D}_3(L, F)$, а отже і $\mathbf{D}$, ізоморфна мультиплікативній групі поля F. Рівність

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \alpha_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_3\alpha_1^{-2} & \beta_3\alpha_1^{-2} & 1 \end{pmatrix}$$

показує, що $\mathbf{Aut}_{[,]}(L) = \mathbf{SD}$. І навіть більше, перетин $\mathbf{S} \cap \mathbf{D}$ тривіальний. Легко показати, що підгрупа $\mathbf{S}$ є $\mathbf{D}$-інваріантною, тому $\mathbf{S}$ нормальна в $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$. Таким чином, $\mathbf{Aut}_{[,]}(L) = \mathbf{S} \leftthreetimes \mathbf{D}$, $\mathbf{D} \cong F^{\times}$, $\mathbf{S} = \mathbf{TC}$, де $\mathbf{T}$ нормальна в $\mathbf{Aut}_{[,]}(L)$, $\mathbf{T} \cong F_+ \times F_+$, $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, де $\mathbf{A}$ нормальна в $\mathbf{C}$, $\mathbf{A} \cong F_+ \times F_+$, $\mathbf{B} \cong F^{\times}$.

Теорему 4.2 доведено.

Перший автор вдячний за підтримку, надану Інститутом математики Ісаака Ньютона та Единбурзьким університетом у рамках Програми додаткових грантів LMS Solidarity.

Література

1. Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov, B. Omirov, K. Zhao, *Semisimple Leibniz algebras, their derivations and automorphisms*, Linear and Multilinear Algebra, **68**, № 10, 2005 – 2019 (2020); DOI:10.1080/03081087.2019.1567674.
2. Sh. Ayupov, B. Omirov, I. Rakhimov, *Leibniz algebras: structure and classification*, CRC Press, Taylor & Francis Group (2020).
3. A. Blokh, *On a generalization of the concept of Lie algebra*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, № 3, 471 – 473 (1965) (in Russian).
4. J. M. Casas, M. A. Insua, M. Ladra, S. Ladra, *An algorithm for the classification of* 3*-dimensional complex Leibniz algebras*, Linear Algebra and Appl., **436**, № 9, 3747 – 3756 (2012); DOI:10.1016/j.laa.2011.11.039.
5. C. Cuvier, *Algèbres de Leibnitz: définitions, propriétés*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), **27**, № 1, 1 – 45 (1994); DOI:10.24033/asens.1687.
6. I. Demir, K. C. Misra, E. Stitzinger, *On some structures of Leibniz algebras*, Recent Advances in Representation Theory, Quantum Groups, Algebraic Geometry, and Related Topics, Contemp. Math., **623**, 41 – 54 (2014); DOI:10.1090/conm/623/12456.
7. A. Kh. Khudoyberdiyev, T. K. Kurbanbaev, B. A. Omirov, *Classification of three-dimensional solvable p-adic Leibniz algebras*, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., **2**, № 3, 207 – 221 (2010); DOI:10.1134/S2070046610030039.
8. L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka, *Relationships between the factors of the canonical central series of Leibniz algebras*, Eur. J. Math., **2**, № 2, 565 – 577 (2016); DOI:10.1007/s40879-016-0093-5.
9. L. A. Kurdachenko, A. A. Pypka, I. Ya. Subbotin, *On the automorphism groups of some Leibniz algebras*, Int. J. Group Theory (to appear); DOI:10.22108/ IJGT.2021.130057.1735.
10. M. Ladra, I. M. Rikhsiboev, R. M. Turdibaev, *Automorphisms and derivations of Leibniz algebras*, Ukr. Math. J., **68**, № 7, 1062 – 1076 (2016); DOI:10.1007/s11253-016-1277-3.
11. J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Grundlehren Math. Wiss., **301**, Springer Verlag, (1992); DOI:10.1007/978-3-662-11389-9.
12. J.-L. Loday, *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbras de Leibniz*, Enseign. Math., **39**, 269 – 293 (1993).
13. J.-L. Loday, T. Pirashvili, *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*, Math. Ann., **296**, № 1, 139 – 158 (1993); DOI:10.1007/ BF01445099.
14. I. S. Rakhimov, I. M. Rikhsiboev, M. A. Mohammed, *An algorithm for classifications of three-dimensional Leibniz algebras over arbitrary fields*, JP J. Algebra, Number Theory and Appl., **40**, № 2, 181 – 198 (2018); DOI:10.17654/NT040020181.
15. I. M. Rikhsiboev, I. S. Rakhimov, *Classification of three dimensional complex Leibniz algebras*, AIP Conf. Proc., **1450**, № 1, 358 – 362 (2012); DOI:10.1063/1.4724168.
16. V. S. Yashchuk, *On some Leibniz algebras, having small dimension*, Algebra and Discrete Math., **27**, № 2, 292 – 308 (2019).

Одержано 10.08.22