DOI: 10.37863/umzh.v74i11.7251

УДК 517.53

М. В. Заболоцький[1]**, Т. М. Заболоцький, С. І. Тарасюк** (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ТЕОРЕМИ ТИПУ ВАЛІРОНА ТА ВАЛІРОНА – ТІТЧМАРША ДЛЯ СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОВІЛЬНОГО ЗРОСТАННЯ

Let u be a function of zero order subharmonic in $\mathbb{R}^m,\ m \geq 2,$ with Riesz measure μ on the negative semiaxis $Ox_1,$ $n(r,u) = \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}\big),\ d_m = m-2$ for $m \geq 3,\ d_2 = 1,$ and $N(r,u) = d_m \displaystyle\int_1^r \frac{n(t,u)}{t^{m-1}}\,dt.$ Under the condition of slow growth of $N(r,u),$ we determine the asymptotics of $u(x)$ as $|x| = r \to +\infty.$ We also study the inverse relationship between the regular growth of u and the behavior of $N(r,u)$ for $r \to +\infty.$

Нехай u — субгармонічна в $\mathbb{R}^m,\ m \geq 2,$ функція нульового порядку з мірою Рісса μ на від'ємній півосі $Ox_1,$ $n(r,u) = \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq r\}\big),\ d_m = m-2$ для $m \geq 3,\ d_2 = 1,\ N(r,u) = d_m \displaystyle\int_1^r \frac{n(t,u)}{t^{m-1}}\,dt.$ За умови повільного зростання $N(r,u)$ знайдено асимптотику $u(x)$ при $|x| = r \to +\infty.$ Досліджено також обернений зв'язок між регулярним зростанням u та поводженням $N(r,u)$ при $r \to +\infty.$

1. Вступ. Нехай f — ціла трансцендентна (далі ціла) функція, $n(r) = n(r,0,f)$ — кількість нулів f у крузі $\{z : |z| \leq r\},\ \rho$ — порядок $f.$

Якщо нулі f від'ємні, ρ — неціле число, $0 < \Delta < +\infty,$
$$n(r) \sim \Delta r^{\rho}, \quad r \to +\infty, \tag{1}$$
то, як випливає з результатів Ж. Валірона [1],
$$\ln|f(re^{i\theta})| \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho}\, r^{\rho} \cos \rho\theta, \quad |\theta| < \pi, \quad r \to +\infty.$$
Навпаки, якщо f має лише від'ємні нулі, ρ — неціле число, $0 < \Delta < +\infty,$
$$\ln|f(r)| \sim \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho}\, r^{\rho}, \quad r \to +\infty,$$
то виконується (1).

Найпростіше доведення останнього твердження дав Е. Тітчмарш [2]. Тому теореми про зв'язок між регулярними поводженнями $n(r)$ та $\ln|f(z)|$ називають теоремами типу Валірона та Валірона – Тітчмарша.

Аналогічні задачі для цілих функцій нульового порядку вивчалися в [3], де, зокрема, доведено, що асимптотичні рівності $n(r) = r^{\lambda(r)} + o\big(r^{\lambda(r)}\big)$ й $n(r) = r^{\lambda(r)} + o\big(\varepsilon(r) r^{\lambda(r)}\big),\ r \to +\infty,$ є відповідно необхідною й достатньою умовами виконання співвідношення
$$\ln|f(r)| = \int\limits_1^r t^{\lambda(t)-1} dt + o\Big(r^{\lambda(r)}\Big), \quad r \to +\infty.$$
Тут f — ціла функція нульового порядку з від'ємними нулями, $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок (див., наприклад, [4, с. 69]), $r^{\lambda(r)} \nearrow +\infty,\ \varepsilon(r) = \lambda(r) + r\lambda'(r)\ln r \to 0$ при $r \to +\infty.$

Пізніше в [5] було доведено теорему типу Валірона, а в [6] — теорему типу Валірона – Тітчмарша для субгармонічних в $\mathbb{R}^n,\ n \geq 3,$ функцій нецілого порядку.

В цій роботі досліджується зв'язок між регулярними поводженнями субгармонічної в $\mathbb{R}^m,$ $m \geq 2,$ функції u нульового порядку та неванліннновою лічильною функцією $N(r,u)$ її міри Рісса у випадку, коли $N(r,u)$ — повільно зростаюча функція.

[1] Відповідальний за листування, e-mail: mykola.zabolotskyy@lnu.edu.ua.

2. Означення та формулювання результатів. Нехай u — субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, функція, u-гармонічна в одиничному околі точки O, $u(0) = 0$, μ — її міра Рісса, $n(t,u) = \mu(\{x : |x| \leq t\})$, $d_m = m - 2$ для $m \geq 3$, $d_2 = 1$, $N(t,u) = \int_1^r n(\tau)/\tau^{m-1} d\tau$, $u^+(x) = \max\{u(x); 0\}$, $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ — площа поверхні одиничної сфери $\{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$, $d\sigma(x)$ — елемент площі поверхні сфери $S(0,r) = \{x : |x| = r\}$,

$$T(r,u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} u^+(x)\, d\sigma(x)$$

— характеристика Неванлінни функції u. Будемо говорити, що u нульового роду (нульового порядку), якщо $T(r,u) = o(r)$ $(\ln T(r,u) = o(\ln r))$ при $r \to +\infty$.

Позначимо через $SH_m(0)$ клас субгармонічних в $\mathbb{R}^m$ функцій нульового порядку, через $SH_m^-(0)$ підклас функцій u з $SH_m(0)$ таких, що u гармонічна зовні від'ємної півосі Ox_1.

Невід'ємну, неспадну, необмежену на $[0; +\infty)$ функцію називатимемо функцією порівняння. Через L позначимо множину неперервно диференційовних функцій порівняння v, для яких $tv'(t)/v(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Неважко показати, що $r^{\lambda(r)} \in L$, якщо $\lambda(r)$ — такий, як вище, нульовий уточнений порядок. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $v(t) = 0$ на $[0, \delta]$, $0 < \delta < 1$. Легко бачити (див., наприклад, [7, с. 15]), що з точністю до еквівалентних функцій L збігається з множиною повільно зростаючих функцій l, тобто додатних, неспадних на $[0, +\infty)$ і таких, що $l(2t) \sim l(t)$, $t \to +\infty$.

Для $v \in L$ приймемо

$$v_1(r) = \int\limits_1^r \frac{v(t)}{t}\, dt. \tag{2}$$

Неважко показати, що $v_1 \in L$ і $v(r) = o(v_1(r))$ при $r \to +\infty$. Покладемо

$$P(t,r,\theta;\alpha) = \left(t^2 + 2tr\cos\theta + r^2\right)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{3}$$

$$J(r,\theta;\alpha,\psi(t)) = \int\limits_0^{+\infty} \psi(t) P(t,r,\theta;\alpha) dt, \tag{4}$$

$$J(r,\theta;\alpha,\beta) = J\big(r,\theta;\alpha,t^\beta\big), \quad 0 < \beta < 2\alpha - 1, \tag{5}$$

де ψ — локально інтегровна на $[0; +\infty)$ функція така, що інтеграл у рівності (4) є збіжним.

Для $m \geq 3$ приймемо

$$A(m) = \sum_{k=1}^{m-2} C_{m-1}^k I_{m-1}(m-2-k),$$

де

$$I_n(k) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{t^k dt}{(t+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Неважко показати, що правильною є рекурентна формула

$$I_n(k) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1-k)} + kI_n(k-1), \qquad I_n(0) = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}.$$

Теорема 1. *Нехай* $m \geq 3,\ u \in SH_m^-(0),\ v \in L,\ r = |x|,\ x_1 = r\cos\theta,\ x = (r\cos\theta, x_2, \ldots \ldots, x_m)$. *Якщо*

$$N(t,u) = (1 + o(1))v(t), \quad t \to +\infty, \tag{6}$$

то для $|\theta| < \pi$

$$u(x) = \left(mJ\left(1, \theta; \frac{m+2}{2}, m-1\right)\sin^2\theta + \right.$$

$$\left. + (m-1)J\left(1, \theta; \frac{m}{2}, m-2\right)\cos\theta\right)v(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty, \tag{7}$$

до того ж (7) *виконується рівномірно щодо* θ *на множині* $\{\theta \colon |\theta| < \pi - \delta\},\ 0 < \delta < 1$.

***Зауваження* 1.** Інтеграли в (7) збіжні, бо підінтегральні вирази $t^{m-1}P(t,1,\theta;(m+2)/2) \sim \sim \dfrac{1}{t^3},\ t^{m-2}P(t,1,\theta;m/2) \sim \dfrac{1}{t^2}$ при $t \to +\infty$.

Теорема 2. *Нехай* $u \in SH_m^-(0),\ m \geq 3,\ v \in L,\ u(r) = u(r, 0, \ldots, 0)$.

(A) *Якщо*

$$N(t,u) = v_1(t) + o(v(t)), \quad t \to +\infty, \tag{8}$$

то

$$u(r) = v_1(r) + A(m)v(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty. \tag{9}$$

(B) *Навпаки, якщо виконується* (9), *то*

$$N(t,u) = (1 + o(1))v_1(t), \quad t \to +\infty. \tag{10}$$

***Зауваження* 2.** Оскільки

$$(m-1)J\left(1, 0; \frac{m}{2}, m-2\right) = (m-1)\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{m-2}}{(t+1)^m}\,dt = (m-1)B(m-1,1) = 1,$$

то для $\theta = 0$ за умови $N(t,u) = (1 + o(1))v_1(t),\ t \to +\infty$, з (7) отримуємо

$$u(r) = u(r, 0, \ldots, 0) = (1 + o(1))v_1(r), \quad r \to +\infty,$$

що є слабшим, ніж (9).

***Зауваження* 3.** Насправді, буде доведено, що з (9) випливає асимптотична рівність

$$n(t,u) = \frac{1 + o(1)}{m-2}t^{m-2}v(t), \quad t \to +\infty, \tag{11}$$

з якої легко отримати (10). Обернена імплікація є хибною, тобто з (10) не випливає (11).

Теорема 3. *Нехай* $u \in SH_2^-(0),\ v \in L,\ x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *і*

$$n(r,u) = (1 + o(1))v(t), \quad t \to +\infty.$$

Тоді для $|\theta| < \pi$

$$u(x) = N(r,u) + o(v(r)), \quad r \to +\infty, \tag{12}$$

до того ж остання асимптотична рівність виконується рівномірно щодо θ *на множині* $\{\theta \colon |\theta| < \pi - \delta\},\ 0 < \delta < 1$.

Теорема 4. *Нехай* $u \in SH_2^-(0),\ v \in L,\ u(r) = u(r,0)$.

(A) *Якщо*

$$n(t,u) = v(t) + o(tv'(t)), \quad t \to +\infty,$$

то

$$u(r) = v_1(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty. \tag{13}$$

(B) *Навпаки, якщо виконується* (13), *то*

$$n(t,u) = (1 + o(1))v(t), \quad t \to +\infty.$$

Наступна теорема узагальнює твердження (A) теореми 4.

Теорема 5. *Нехай* $u \in SH_2^-(0),\ v \in L,\ x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ *і* $n(t,u) = v_1(t) + o(tv'(t))$, $t \to +\infty$. *Тоді для* $|\theta| < \pi$

$$u(x) = N(r,u) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2\right)v(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty. \tag{14}$$

3. Допоміжні результати. При доведенні теорем будемо використовувати такі твердження.

Лема 1. *Нехай* $v \in L$, g — *диференційовна, а* g' — *незростаюча на* $[1, +\infty)$ *функції*, $K \in \mathbb{R}$. *Якщо*

$$g(t) = \int\limits_1^t \frac{v(\tau)}{\tau}\, d\tau + Kv(t) + o(v(t)), \quad t \to +\infty,$$

то

$$g'(t) = \frac{v(t)}{t} + o\left(\frac{v(t)}{t}\right), \quad t \to +\infty.$$

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 4 з [3].

Лема 2 [7, с. 63 – 65]. *Нехай* l — *повільно змінна, а* ϕ — *локально інтегровна на* $[0, +\infty)$ *функції*, $a > 0$ *і для деякого* $\eta > 0$ *інтеграл* $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^\eta \phi(t)\, dt$ $\left(\displaystyle\int_0^a t^{-\eta}\phi(t)dt\right)$ *є збіжним. Тоді*

$$\int\limits_a^{+\infty} \phi(t) l(xt)\, dt \sim l(x) \int\limits_a^{+\infty} \phi(t)dt \quad \left(\int\limits_0^a \phi(t) l(xt) dt \sim l(x) \int\limits_0^a \phi(t)dt\right), \quad x \to +\infty.$$

Лема 3. *Нехай* $p \geq 3$, $v \in L$. *Тоді*

$$I(r) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\big(t^{p-2}v(t)\big)}{(t+r)^{p-1}} = (1 + o(1))\, \frac{v(r)}{r}, \quad r \to +\infty.$$

Доведення. Використовуючи твердження леми 2 з $\eta = \dfrac{1}{2}$ та інтегруючи частинами, отримуємо

$$I(r) = (p-1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-2}v(t)dt}{(t+r)^p} = \frac{p-1}{r} \int\limits_0^{+\infty} v(\tau r) \frac{\tau^{p-2} d\tau}{(1+\tau)^p} =$$

$$= (1 + o(1))\, \frac{(p-1)v(r)}{r} B(p-1, 1) =$$

$$= (1 + o(1)) \frac{(p-1)v(r)}{r} \frac{\Gamma(p-1)\Gamma(1)}{\Gamma(p)} = (1 + o(1)) \frac{v(r)}{r}, \quad r \to +\infty.$$

Лема 4 [8]. *Нехай* $0 < b < a + 1$, $k = [b]$, α *та* β *— додатні, неспадні на* $[0, +\infty)$ *функції*, α *диференційовна*, $\alpha(x) \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$, $a\alpha(x) < x\alpha'(x) < \beta\alpha(r)$ *для* $x \geq x_0$,

$$F(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{d\alpha(t)}{(x+t)^{k+1}}, \quad G(x) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{d\beta(t)}{(x+t)^{k+1}}.$$

Якщо $F(x) \sim G(x)$, *то* $\alpha(x) \sim \beta(x)$ *при* $x \to +\infty$.

Лема 5. *Нехай* $v \in L$, $\varepsilon(r)$ *— локально інтегровна на* $[1, +\infty)$ *функція така, що* $\varepsilon(r) \to 0$ *при* $r \to +\infty$. *Тоді*:

1) *для* $\alpha < 1$

$$\int\limits_1^r \frac{\varepsilon(t)v(t)dt}{t^\alpha} = o\left(\frac{v(r)}{r^{\alpha-1}}\right), \quad r \to +\infty;$$

2) *для* $\alpha > 1$

$$\int\limits_r^{+\infty} \frac{\varepsilon(t)v(t)dt}{t^\alpha} = o\left(\frac{v(r)}{r^{\alpha-1}}\right), \quad r \to +\infty.$$

В істинності тверджень цієї леми легко переконатися з допомогою правила Лопіталя.

Лема 6. *Нехай* $m \geq 3$, u *— субгармонічна в* $\mathbb{R}^m$ *функція нульового роду, гармонічна зовні від'ємної півосі* Ox_1, $r = |x|$, $x = (r\cos\theta, x_2, \ldots, x_m)$, $|\theta| < \pi$. *Тоді*

$$u(x) = mr^2 J\left(r, \theta; \frac{m+2}{2}, t^{m-1}N(t)\right) \sin^2\theta + (m-1)rJ\left(r, \theta; \frac{m}{2}, t^{m-2}N(t)\right) \cos\theta. \qquad (15)$$

Доведення. За умов леми маємо (див., наприклад, [9, с. 174])

$$u(x) = \int\limits_{|\xi|<+\infty} \left(|\xi|^{2-m} - |x-\xi|^{2-m}\right) d\mu_\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

де μ — міра Рісса u. Якщо u гармонічна в $\mathbb{R}^m$, за винятком від'ємної півосі Ox_1, $t = |\xi|$, $j = (-1, 0, \ldots, 0)$ — m-вимірний вектор, то (див. (3))

$$u(x) = \int\limits_0^{+\infty} \left(t^{2-m} - |x + jt|^{2-m}\right) dn(t) = \int\limits_0^{+\infty} \left(t^{2-m} - P\left(t, r, \theta; \frac{m-2}{2}\right)\right) dn(t) =$$

$$= (m-2) \int\limits_0^{+\infty} \left(t^{1-m} - (t + r\cos\theta)P\left(t, r, \theta; \frac{m}{2}\right)\right) n(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(1 - t^{m-1}(t + r\cos\theta)P\left(t, r, \theta; \frac{m}{2}\right)\right) dN(t), \qquad (16)$$

бо

$$n(0) = 0, \quad n(t) = \frac{t^{m-1}}{m-2} \frac{d}{dt} N(t),$$

$$\frac{P\left(t, r, \theta; \dfrac{2-m}{2}\right) - t^{m-2}}{t^{m-2} P\left(t, r, \theta; \dfrac{2-m}{2}\right)} = (1 + o(1)) \frac{(m-2) r \cos\theta}{t^{m-1}},$$

$$n(t) = o\big(t^{m-1}\big) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Оскільки

$$N(0) = 0, \quad 1 - t^{m-1}(t + r\cos\theta) P\Big(t, r, \theta; \frac{m}{2}\Big) = (1 + o(1)) \frac{(m-1) r \cos\theta}{t},$$

$$N(t) = o(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

то, інтегруючи частинами, з (16) отримуємо

$$u(x) = m r^2 \sin^2\theta \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} N(t) P\Big(t, r, \theta; \frac{m+2}{2}\Big) dt +$$

$$+ (m-1) r \cos\theta \int\limits_0^{+\infty} t^{m-2} N(t) P\Big(t, r, \theta; \frac{m}{2}\Big) dt,$$

тобто (15) (див. (4), (5)).

4. Доведення результатів. ***Доведення теореми* 1.** Використовуючи заміну $\tau = rt$, з (15) маємо

$$u(x) = m \sin^2\theta \int\limits_0^{+\infty} \tau^{m-1} N(r\tau) P\Big(\tau, 1, \theta; \frac{m+2}{2}\Big) d\tau +$$

$$+ (m-1) \cos\theta \int\limits_0^{+\infty} \tau^{m-2} N(r\tau) P\Big(\tau, 1, \theta; \frac{m}{2}\Big) d\tau. \tag{17}$$

Якщо $N(t) = v(t) + \varepsilon(t) v(t)$, де $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то, враховуючи лему 2 з $\eta = 1/2$, з (15), (17) при $r \to +\infty$ отримуємо (див. (4), (5))

$$u(x) = \left(m J\Big(1, \theta; \frac{m+2}{2}, m-1\Big) \sin^2\theta + (m-1) J\Big(1, \theta; \frac{m}{2}, m-2\Big) \cos\theta \right) v(r) +$$

$$+ m r^2 J\Big(r, \theta; \frac{m+2}{2}; t^{m-1} \varepsilon(t) v(t)\Big) \sin^2\theta +$$

$$+ (m-1) r J\Big(r, \theta; \frac{m}{2}; t^{m-2} \varepsilon(t) v(t)\Big) \cos\theta + o(v(r)). \tag{18}$$

Оскільки [4, с. 92] $\left|t^2+2tr\cos\theta+r^2\right| = \left|t+re^{i\theta}\right|^2 \geq (t+r)^2\sin^2\delta$ для $|\theta|\leq\pi-\delta,\ 0<\delta<1,$ то з леми 5 та оцінок

$$r^2\sin^{m+2}\delta\left|J\left(r,\theta;\frac{m+2}{2},t^{m-1}\varepsilon(t)v(t)\right)\right| \leq \frac{1}{r^m}\int\limits_1^r \frac{\varepsilon(t)v(t)}{t^{1-m}}\,dt + r^2\int\limits_r^{+\infty}\frac{\varepsilon(t)v(t)}{t^3}\,dt$$

одержуємо

$$mr^2J\left(r,\theta;\frac{m+2}{2},t^{m-1}\varepsilon(t)v(t)\right)\sin^2\theta = o(v(r)), \quad r\to+\infty.$$

Аналогічно показуємо, що

$$(m-1)rJ\left(r,\theta;\frac{m}{2},t^{m-2}\varepsilon(t)v(t)\right)\cos\theta = o(v(r)), \quad r\to+\infty.$$

Звідси та з (18) отримуємо (7).

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Якщо $N(t)=v_1(t)+\varepsilon(t)v(t)$, де $\varepsilon(t)\to0$ при $t\to+\infty$, то, як і вище, для $\theta=0$ маємо

$$u(r) = (m-1)rJ\left(r,0;\frac{m}{2},t^{m-2}v_1(t)\right)+o(v(r)) =$$
$$= (m-1)r\left\{\int\limits_0^r\frac{t^{m-2}v_1(t)}{(t+r)^m}\,dt + \int\limits_r^{+\infty}\frac{t^{m-2}v_1(t)}{(t+r)^m}dt\right\}+o(v(r)), \quad r\to+\infty. \tag{19}$$

Оскільки для $t<r$ і $t>r$ відповідно

$$\frac{1}{(t+r)^m} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{n!r^{m+n}}\,t^n,$$
$$\frac{1}{(t+r)^m} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{n!r^{-n}}\,t^{-m-n},$$

то з (19) одержуємо

$$u(r) = \frac{1}{(m-2)!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{n!r^{m+n-1}}\,a_n(r;v_1)+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{n!r^{-n-1}}\,b_n(r;v_1)\right)+o(v(r)), \quad r\to+\infty,$$

де

$$a_n(r;v_1) = \int\limits_0^r t^{m+n-2}v_1(t)dt, \quad b_n(r;v_1) = \int\limits_r^{+\infty}t^{-n-2}v_1(t)dt.$$

Можливість почленного інтегрування рядів обґрунтовується, як і в [3]. Далі $(rv_1'(r)=v(r))$,

$$a_n(r;v_1)=\frac{r^{m+n-1}}{m+n-1}v_1(r)-\frac{1}{m+n-1}\int\limits_0^r t^{m+n-2}tv_1'(t)dt=$$

$$=\frac{r^{m+n-1}}{m+n-1}\,v_1(r)-\frac{1}{m+n-1}\,a_n(r;v),$$

і, аналогічно,

$$b_n(r;v_1)=\frac{r^{-n-1}}{n+1}\,v_1(r)+\frac{1}{n+1}\,b_n(r;v),$$

а отже,

$$u(r)=\frac{1}{(m-2)!}\Bigg(\sum_{n=0}^{+\infty}\bigg(\frac{(-1)^n(m+n-2)!}{n!}+\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{(n+1)!}\bigg)v_1(r)-$$

$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-2)!}{n!r^{m+n-1}}a_n(r;v)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{(n+1)!r^{-n-1}}\,b_n(r;v)\Bigg)+o(v(r))=$$

$$=v_1(r)-\frac{1}{(m-2)!}\int\limits_0^r\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-2)!}{n!r^{m+n-1}}\,t^{m+n-2}v(t)dt+$$

$$+\frac{1}{(m-2)!}\int\limits_r^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-1)!}{(n+1)!r^{-n-1}}\,t^{-n-2}v(t)dt+o(v(r))=$$

$$=v_1(r)-\int\limits_0^r\frac{t^{m-2}v(t)}{(t+r)^{m-1}}\,dt+$$

$$+\frac{1}{(m-2)!}\int\limits_r^{+\infty}t^{m-2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(m+n-2)!}{n!r^{-n}}\,t^{-m-n+1}v(t)dt+o(v(r))=$$

$$=v_1(r)-\int\limits_0^r\frac{t^{m-2}v(t)}{(t+r)^{m-1}}\,dt+\int\limits_r^{+\infty}\bigg(\frac{1}{t}-\frac{t^{m-2}}{(t+r)^{m-1}}\bigg)v(t)dt+o(v(r)),\quad r\to+\infty.$$

Після заміни $t=r\tau$, з огляду на лему 2 з $\eta=1/2$, з останньої рівності знаходимо

$$u(r)=v_1(r)-\int\limits_0^1\frac{\tau^{m-2}v(r\tau)}{(\tau+1)^{m-1}}\,d\tau+\int\limits_1^{+\infty}\frac{(\tau+1)^{m-1}-\tau^{m-1}}{\tau(\tau+1)^{m-1}}\,v(r\tau)d\tau+o(v(r))=$$

$$=v_1(r)-v(r)\int\limits_0^1\frac{\tau^{m-2}d\tau}{(\tau+1)^{m-1}}+\sum_{k=1}^{m-1}C_{m-1}^k\int\limits_1^{+\infty}\frac{\tau^{m-1-k}v(r\tau)}{\tau(\tau+1)^{m-1}}\,d\tau+o(v(r))=$$

$$=v_1(r)+A(m)v(r)+o(v(r)),\quad r\to+\infty,$$

де

$$A(m) = \sum_{k=1}^{m-2} C_{m-1}^{k} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{t^{m-2-k}}{(t+1)^{m-1}}\, dt,$$

що доводить твердження (A) теореми 2.

Доведемо твердження (B). З (16) випливає, що функція

$$u'(r) = (m-2) \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dn(t)}{(t+r)^{m-1}}$$

не зростає на $[0, +\infty)$, а отже, за лемою 1 з (9) одержуємо

$$u'(r) = \frac{v(r)}{r} + o\left(\frac{v(r)}{r}\right), \quad r \to +\infty.$$

Враховуючи лему 3, з останніх двох співвідношень маємо

$$(m-2) \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dn(t)}{(t+r)^{m-1}} = (1+o(1)) \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d(t^{m-2}v(t))}{(t+r)^{m-1}}, \quad r \to +\infty.$$

Оскільки $t\big(t^{m-2}v(t)\big)' = (1+o(1))(m-2)t^{m-2}v(t)$ при $t \to +\infty$, то

$$\left((m-2) - \frac{1}{4}\right)t^{m-2}v(t) < t\big(t^{m-2}v(t)\big)' < \left((m-2) + \frac{1}{4}\right)t^{m-2}v(t), \quad t \geq 2,$$

і завдяки лемі 5 з $k = \left[(m-2) + \frac{1}{4}\right] = m-2$

$$n(t,u) = \frac{1+o(1)}{m-2}\, t^{m-2}v(t), \quad t \to +\infty.$$

Звідси та з означення $N(t,u)$ випливає (10), а отже, теорему 2 доведено.

***Доведення теорем* 3 – 5.** У випадку $m = 2$ замість $x = (x_1, x_2) = (|x|\cos\theta, |x|\sin\theta)$ будемо писати $z = re^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta < \pi$. Якщо тепер $u \in SH_2^-(0)$, то (див., наприклад, [9, с. 174]) маємо $(\xi = (-t, 0), |\xi| = t)$

$$u(z) = \int\limits_{0}^{+\infty} \ln\left|\frac{\xi - z}{\xi}\right| d\mu_\xi = \int\limits_{0}^{+\infty} \ln\left|1 + \frac{z}{t}\right| dn(t) = Re \int\limits_{0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{t}\right) dn(t). \tag{20}$$

Якщо $n(t,u) = (1+o(1))v(t)$ або $n(t,u) = v_1(t) + o(v(t))$ при $t \to +\infty$, то, як і при доведенні теореми 1 з [3], для $-\pi < \theta < \pi$ одержуємо (12) і

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{t}\right) dn(t) = v_1(r) + i\theta v(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty.$$

З останньої асимптотичної рівності та з (20) при $\theta = 0$ випливає (13), що разом з (12) доводить теорему 3 і твердження (A) теореми 4.

Нехай виконується (13). З (20) при $\theta = 0$ видно, що функція $u'(r) = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{t+r}\, dn(t)$ не зростає на $[0, +\infty)$, і з (13) та леми 1 отримуємо

$$u'(r) = \frac{v(r)}{r} + o\left(\frac{v(r)}{r}\right), \quad r \to +\infty.$$

Оскільки [3] (лема 4)

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dv(t)}{t+r} = (1 + o(1))\frac{v(r)}{r}, \quad r \to +\infty,$$

то з останніх співвідношень випливає, що

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dn(t)}{t+r} = (1 + o(1)) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dv(t)}{t+r}, \quad r \to +\infty.$$

На підставі леми 4 при $k = 0$ отримуємо

$$n(t, u) = (1 + o(1))v(t), \quad t \to +\infty,$$

бо $tv'(t) = o(v(t))$, $t \to +\infty$, і тому $tv'(t) < \dfrac{1}{2}\, v(t)$. Твердження (B) теореми 4 доведено.

Нехай виконуються умови теореми 5. Тоді, як і при доведенні теореми 1 з [10], маємо

$$\int\limits_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{z}{t}\right) dn(t) = N(r, u) + i\theta v_1(r) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2\right) v(r) + o(v(r)), \quad r \to +\infty,$$

Звідси і з (20) випливає (14), що доводить теорему 5.

Література

1. G. Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini, et en particulier sur les fonctions à correspondance régulière*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **5**, № 3, 117 – 257 (1913).
2. E. C. Titchmarsh, *On integral functions with real negative zero*, Proc. London Math. Soc., **26**, № 2, 185 – 200 (1927).
3. М. В. Заболоцький, *Теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку*, Укр. мат. журн., **48**, № 3, 315 – 325 (1996).
4. А. А. Гольдберг, И. В. Островский, *Распределение значений мероморфных функций*, Наука, Москва (1970).
5. P. Z. Agranovich, *Polynomial asymptotic representation of subharmonic functions with masses on one ray in the space*, Mat. Studii, **23**, № 2, 169 – 178 (2005).
6. A. I. Kheyfits, *Valiron – Titchmarsh theorem for subharmonic functions in* $\mathbb{R}^n$ *with masses on a half-line*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **23**, № 1, 159 – 173 (2014).
7. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, Москва (1985).
8. М. В. Келдыш, *Об одной тауберовой теореме*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **38**, 77 – 86 (1951).
9. У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции*, Мир, Москва (1980).
10. М. В. Заболоцький, *Асимптотика добутків Бляшке, лічильна функція нулів яких є повільно зростаючою*, Укр. мат. журн., **52**, № 12, 1650 – 1660 (2000).

Одержано 30.06.22