DOI: 10.37863/umzh.v74i12.6886

УДК 517.518.45

К. Р. Біцадзе[1] (Тбіл. держ. ун-т ім. І. Джавахішвілі, Грузія)

ПРО МНОЖИНИ РОЗБІЖНОСТІ КРАТНИХ РЯДІВ ФУР'Є – ХААРА

It is shown that every at most countable set F in an n-dimensional unit cube $[0,1]^n$ is a set of divergence of the n-fold Fourier – Haar series of a certain limited dimensional function, i.e., there exists a bounded dimensional function defined on $[0,1]^n$ whose n-fold Fourier – Haar series converges in Pringsheim's sense on $[0,1]^n \backslash F$ and diverges on the cubes on F.

Встановлено, що кожна не більш ніж зліченна множина F із n-вимірного одиничного куба $[0,1]^n$ є множиною розбіжності n-кратного ряду Фур'є – Хаара деякої обмеженої вимірної функції, а саме, існує обмежена вимірна функція, задана на $[0,1]^n$, n-кратний ряд Фур'є – Хаара якої збігається за Прінгсхеймом на $[0,1]^n \setminus F$ і розбігається по кубах на F.

1. Вступ. Система Хаара на відрізку $[0,1]$ визначається таким чином (див. [1], гл. 1, § 5 або [2], гл. 3, § 1):

$$\chi_1(t) = \chi_0^{(0)}(t) \equiv 1,$$

$$\chi_p(t) = \chi_m^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & t \in \left(\dfrac{2k-2}{2^{m+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{m+1}}\right), \\ -\sqrt{2^m}, & t \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{m+1}}, \dfrac{2k}{2^{m+1}}\right), \\ 0, & t \notin \left[\dfrac{k-1}{2^m}, \dfrac{k}{2^m}\right], \end{cases}$$

де $p \geq 2,\ p = 2^m + k,\ 1 \leq k \leq 2^m,\ m = 0,1,2,\ldots$. У внутрішніх точках розриву функція Хаара визначається як середнє правої і лівої границь, а на кінцях відрізка $[0,1]$ — як границі всередині інтервалу.

Ряд Фур'є – Хаара функції $f \in L[0,1]$ має вигляд

$$f(t) \sim \sum_{p=1}^{\infty} a_p(f)\chi_p(t) \equiv a_1(f) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} a_m^{(k)}(f)\chi_m^{(k)}(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

де χ_p, $p = 1,2,\ldots,$ — функції Хаара, $a_1(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ і $a_p(f) = a_m^{(k)}(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\chi_m^{(k)}(t)\,dt$, $p \geq 2,\ p = 2^m + k,\ 1 \leq k \leq 2^m,\ m = 0,1,2,\ldots,$ — коефіцієнти Фур'є – Хаара функції f.

А. Хаар [3] довів, що для кожної неперервної на $[0,1]$ функції ряд (1) рівномірно збігається на $[0,1]$ до цієї функції. Він також встановив, що для кожної інтегровної за Лебегом функції ряд (1) збігається майже скрізь на $[0,1]$ до цієї функції.

В. І. Прохоренко [4] довів, що для будь-якої множини нульової міри існує функція з класу $\bigcap_{p\geq 1} L^p$, ряд Фур'є – Хаара якої розбігається на цій множині.

В. М. Бугадзе [5] довів, що для будь-якої множини нульової міри існує обмежена вимірна функція, ряд Фур'є – Хаара якої розбігається на цій множині.

[1] e-mail: kakha_bitsadze@yahoo.com.

М. О. Луніна [6] встановила такий факт. Нехай φ — довільна, не спадна на $[0,\infty)$ парна функція з $\varphi(0)=0$, $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\varphi(\infty)=+\infty$. Тоді для будь-якої множини E типу $\widetilde{G}_\delta$ з нульовою мірою існує функція з класу $L\cap\varphi(L)$, ряд Фур'є – Хаара якої необмежено розбігається на E і збігається на $[0,1]\setminus E$. В роботі Г. А. Карагулян [7] аналогічні результати отримано у більш загальній постановці.

В. І. Прохоренко [4] довів, що для будь-якої зліченної множини F із відрізка $[0,1]$ існує обмежена вимірна функція, ряд Фур'є – Хаара якої розбігається на F і збігається на $[0,1]\setminus F$, тобто кожна зліченна множина з відрізка $[0,1]$ є множиною розбіжності ряду Фур'є – Хаара деякої обмеженої вимірної функції.

В роботі Г. А. Карагулян [8] повністю охарактеризовано множини розбіжності одновимірних рядів Фур'є – Хаара для обмежених функцій.

Позначимо через N множину натуральних чисел. Далі ми припускаємо, що $n\in N$ і $n\geq 2$.

n-Кратний ряд Фур'є – Хаара функції $f\in L[0,1]^n$ має вигляд

$$f(t_1,\ldots,t_n)\sim\sum_{p_1,\ldots,p_n=1}^{\infty}a_{p_1,\ldots,p_n}(f)\chi_{p_1}(t_1)\ldots\chi_{p_n}(t_n), \tag{2}$$

$$(t_1,\ldots,t_n)\in[0,1]^n,$$

де $\{\chi_{p_1}\ldots\chi_{p_n}\}_{p_1,\ldots,p_n=1}^{\infty}$ — n-кратна система Хаара й

$$a_{p_1,\ldots,p_n}(f)=\int\limits_{[0,1]^n}f(t_1,\ldots,t_n)\chi_{p_1}(t_1)\ldots\chi_{p_n}(t_n)\,dt_1\ldots dt_n,\quad p_1,\ldots,p_n=1,2,\ldots,$$

— коефіцієнти Фур'є – Хаара функції f.

Прямокутні часткові суми ряду (2) визначаються рівністю

$$S_{k_1,\ldots,k_n}(f;x_1,\ldots,x_n)=\sum_{p_1,\ldots,p_n=1}^{k_1,\ldots,k_n}a_{p_1,\ldots,p_n}(f)\chi_{p_1}(x_1)\ldots\chi_{p_n}(x_n), \tag{3}$$

$$(x_1,\ldots,x_n)\in[0,1]^n,\quad k_1,\ldots,k_n\in N.$$

Ряд (2) називається λ-збіжним, де $\lambda\geq 1$ — деяке дійсне число, якщо існує границя прямокутних часткових сум (3) за індексами $(k_1,\ldots,k_n)$, для яких $\dfrac{1}{\lambda}\leq\dfrac{k_i}{k_j}\leq\lambda$, $i,j=1,2,\ldots,n$.

1-Збіжність зазвичай називають збіжністю за кубами, а збіжність без обмежень на відношення індексів — збіжністю за Прінгсхеймом.

О. П. Дзагнідзе [9] довів, що двократний ряд Фур'є – Хаара функції $f\in L[0,1]^2$ може розбігатися майже скрізь, але обов'язково майже скрізь λ-збігається $(\lambda>1)$ до цієї функції. Крім того, двократний ряд Фур'є – Хаара функції $f\in L\log^+L[0,1]^2$ збігається майже скрізь до цієї функції. У зв'язку з цими результатами див. також роботу Т. Ш. Зерекідзе [10].

Автор [11] встановив, що для будь-якої множини нульової міри з n-вимірного куба $[0,1]^n$ існує обмежена вимірна функція, задана на $[0,1]^n$, n-кратний ряд Фур'є – Хаара якої $\lambda=1$-розбігається на цій множині.

В роботах Р. Д. Гецадзе [12] і Г. Г. Оніані [13, 14] досягнуто подальшого прогресу щодо майже скрізь збіжності і розбіжності кратних рядів Фур'є – Хаара в сенсі Прінгсхейма.

Далі ми покажемо, що справджується аналог теореми Прохоренка (про розбіжність на зліченних множинах) для кратного ряду Фур'є – Хаара функції багатьох змінних. Основний результат цієї роботи було анонсовано в [15].

Через $\mathbb{Z}$ позначимо множину цілих чисел, а через $\mathbb{Z}_0$ — множину невід'ємних цілих чисел.

Інтервали $\Delta_k^{(m)} \equiv [(k-1)\cdot 2^{-m}, k\cdot 2^{-m}]$, де $k = 1, 2, \ldots, 2^m$, $m = 0, 1, \ldots,$ називаються *двійковими інтервалами.* Число m називається *рангом* інтервалу $\Delta_k^{(m)}$, функції $\chi_m^{(k)}$ і коефіцієнта $a_m^{(k)}(f)$. Числа вигляду $k\cdot 2^{-m}$, де $k\in\mathbb{Z}$ і $m\in\mathbb{Z}_0$, називаються *двійково-раціональними числами.* Всі інші дійсні числа називаються *двійково-ірраціональними числами.*

Для точки $x\in[0,1]$ через $\Delta_{[x]}^{(m)}$ позначимо двійковий інтервал рангу m, що містить точку x. У випадку, коли x — двійково-раціональне число, він може міститись у двох сусідніх двійкових інтервалах рангу m, які позначаємо через $\Delta_{[x],1}^{(m)}$ і $\Delta_{[x],2}^{(m)}$. Якщо x міститься лише в одному двійковому інтервалі рангу m, то будемо вважати, що $\Delta_{[x],1}^{(m)} \equiv \Delta_{[x],2}^{(m)} \equiv \Delta_{[x]}^{(m)}$.

Міру Лебега деякої вимірної за Лебегом множини A будемо позначати через $|A|$.

Фундаментальною властивістю системи Хаара є те, що прямокутні часткові суми рядів Фур'є – Хаара виражаються через інтегральні середні за двійковими інтервалами. Зокрема, справджуються такі твердження (див. [1], гл. 1, § 6 або [2], гл. 3, § 1).

1. Нехай $(x_1,\ldots,x_n)\in[0,1]^n$ і $m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}_0$. Тоді

$$S_{2^{m_1},\ldots,2^{m_n}}(f;x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{|B|}\int\limits_B f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n, \tag{4}$$

де

$$B = \prod_{i=1}^n \Big(\Delta_{[x_i],1}^{(m_i)} \cup \Delta_{[x_i],2}^{(m_i)}\Big).$$

2. Нехай $m_1,\ldots,m_n\in\mathbb{Z}_0$ і $1\le k_i\le 2^{m_i}-1$, $i=1,2,\ldots,n$, а точка $(x_1,\ldots,x_n)\in[0,1]^n$ така, що $x_i\ne k_i\cdot 2^{-m_i}$, $i=1,2,\ldots,n$. Тоді

$$S_{2^{m_1}+k_1,\ldots,2^{m_n}+k_n}(f;x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{|B|}\int\limits_B f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n, \tag{5}$$

де

$$B = \prod_{i=1}^n \Big(\Delta_{[x_i],1}^{(\theta_i)} \cup \Delta_{[x_i],2}^{(\theta_i)}\Big),$$

$$\Delta_{[x_i],j}^{(\theta_i)} = \begin{cases} \Delta_{[x_i],j}^{(m_i+1)}, & x_i\in\left[0,\dfrac{k_i}{2^{m_i}}\right), \\[2ex] \Delta_{[x_i],j}^{(m_i)}, & x_i\in\left(\dfrac{k_i}{2^{m_i}},1\right], \end{cases} \qquad \theta_i=\theta(m_i,x_i), \quad j=1,2.$$

3. Нехай $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_0$ і $1 \leq k_i \leq 2^{m_i} - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ а точка $(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ така, що для деякого числа $q \in N,\ 1 \leq q \leq n,$ маємо

$$x_{i_\text{v}} = k_{i_\text{v}} \cdot 2^{-m_{i_\text{v}}}, \quad i_\text{v} = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{v} = 1, 2, \ldots, q, \quad i_1 < \ldots < i_q,$$

і

$$x_i \neq k_i \cdot 2^{-m_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq i_\text{v}, \quad \text{v} = 1, 2, \ldots, q.$$

Тоді

$$S_{2^{m_1}+k_1, \ldots, 2^{m_n}+k_n}(f; x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{u_1, \ldots, u_q = 0}^{1} \frac{1}{2^q |B_{u_1, \ldots, u_q}|} \int\limits_{B_{u_1, \ldots, u_q}} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n, \tag{6}$$

де

$$B_{u_1, \ldots, u_q} = \prod_{\text{v}=1}^{q} \Delta_{2k_{i_\text{v}}}^{(m_{i_\text{v}} + u_\text{v})} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_\text{v},\ \text{v}=1,\ldots,q}}^{n} \left(\Delta_{[x_i],1}^{(\theta_i)} \cup \Delta_{[x_i],2}^{(\theta_i)} \right),$$

$$\Delta_{[x_i],j}^{(\theta_i)} = \begin{cases} \Delta_{[x_i],j}^{(m_i+1)}, & x_i \in \left[0, \dfrac{k_i}{2^{m_i}}\right), \\[2ex] \Delta_{[x_i],j}^{(m_i)}, & x_i \in \left(\dfrac{k_i}{2^{m_i}}, 1\right], \end{cases} \qquad \theta_i = \theta(m_i, x_i), \quad j = 1, 2.$$

Розглянемо двійкові інтервали

$$\Delta_{k_i}^{(m)} = \left[\frac{k_i - 1}{2^m}, \frac{k_i}{2^m}\right], \quad 1 \leq k_i \leq 2^m - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad m \in \mathbb{Z}_0.$$

Кожен із них можна записати у вигляді

$$\Delta_{k_i}^{(m)} = \bigcup_{u_i^{(s)}=1}^{2^s} \Delta_{2^s(k_i - 1) + u_i^{(s)}}^{(m+s)}, \quad s = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Позначимо

$$\Gamma_{\overline{k}, \overline{u}^{(s)}}^{(m,s)} = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{2^s(k_i-1)+u_i^{(s)}}^{(m+s)}, \tag{7}$$

$$\overline{k} = (k_1, \ldots, k_n), \quad \overline{u}^{(s)} = (u_1^{(s)}, \ldots, u_n^{(s)}),$$

$$u_i^{(s)} = 1, \ldots, 2^s, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 0, 1, 2, \ldots .$$

2. Розбіжність в окремих точках. Справджується таке твердження.

Лема 1. *Для будь-якої точки x_0 з n-вимірного одиничного куба $[0,1]^n$ існує обмежена вимірна функція f_{x_0}, задана на $[0,1]^n$, $0 \leq f_{x_0}(t) \leq 1$, $t \in [0,1]^n$, n-кратний ряд Фур'є–Хаара якої збігається за Прінгсхеймом на множині $[0,1]^n \setminus \{x_0\}$ і $\lambda = 1$-розбігається в точці x_0. При цьому*:

1) *існують послідовності натуральних чисел $h_s \uparrow \infty$ і $l_s \uparrow \infty$, $h_s > l_s$, $h_s = h_s(x_0)$, $l_s = l_s(x_0)$, такі, що*

$$\left|S_{2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f_{x_0}, x_0)\right| > 2^{-4n}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots; \tag{8}$$

2) *справедливою є оцінка*

$$0 \leq S_{k_1,\ldots,k_n}(f_{x_0}, x) \leq 1, \quad k_1, \ldots, k_n = 1, 2, \ldots, \quad x \in [0,1]^n; \tag{9}$$

3) *для довільної точки $x \in [0,1]^n$, $x \neq x_0$, існує таке число $n_0 \in N$, $n_0 = n_0(x_0)$, що*

$$S_{k_1\ldots k_n}(f_{x_0}, x) = S_{2^{n_0}\ldots 2^{n_0}}(f_{x_0}, x), \quad k_1 \ldots k_n = 2^{n_0} + 1, 2^{n_0} + 2, \ldots. \tag{10}$$

Доведення. Нехай $x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$. Можливим є один із таких випадків:

I. x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, двійково-раціональне;

II. x_{i_v} двійково-ірраціональне,

$$i_\mathrm{v} = 1, 2, \ldots, n, \quad \mathrm{v} = 1, 2, \ldots, q, \quad i_1 < \ldots < i_q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N;$$

x_i двійково-раціональне,

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq i_\mathrm{v}, \quad \mathrm{v} = 1, 2, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N;$$

III. x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, двійково-ірраціональне.

Розглянемо окремо кожен із цих випадків.

I. У цьому випадку маємо три підвипадки:

I_1. $x_i \neq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

I_2. $x_{i_\nu} = 1$, $i_\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $1 \leq p \leq n-1$, $p \in N$;
$x_i \neq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $i \neq i_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, $1 \leq p \leq n-1$, $p \in N$;

I_3. $x_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Розглянемо випадок I_1. Для деякого $\omega \in N$ кожне x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, можна записати у вигляді $x_i = \dfrac{\mu_i - 1}{2^\omega}$, де $1 \leq \mu_i \leq 2^\omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай $\overline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ і $\overline{u} = (2, \ldots, 2)$.

Визначимо функцію f_{x_0} таким чином:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup_{s=1}^{\infty} \Gamma_{\overline{\mu}, \overline{u}}^{(\omega, 2s)}, \\ 0, & t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{11}$$

Нехай $h_s = \omega + 2s + 1$, $l_s = \omega + 2s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, і $\overline{u}_0 = (1, \ldots, 1)$. Тоді маємо (див. (4), (7) і (11))

$$\left|S_{2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f_{x_0}, x_0)\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2^n|\Gamma^{(\omega,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0}|} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n -$$

$$- \frac{1}{2^n|\Gamma^{(\omega,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0}|} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n =$$

$$= (2^n-1)\cdot 2^{(\omega+2s-1)n} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n >$$

$$> 2^{(\omega+2s-1)n} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s+2)}_{\overline{\mu},\overline{u}}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n > 2^{-4n}, \quad s=0,1,2,\ldots. \tag{12}$$

Отже (див. (12)), виконується нерівність (8).

За визначенням (11) $0 \leq f_{x_0}(t) \leq 1,\ t\in[0,1]^n$. Тому на підставі рівностей (4)–(6) справджується оцінка (9).

Для будь-якої точки $x\in[0,1]^n,\ x\neq x_0$, існує таке число $n_0\in N,\ n_0=n_0(x_0)$, що функція f_{x_0} буде сталою на кожному n-вимірному кубі, який містить точку x і добуток двійкових інтервалів рангу n_0 (див. (11)). Тому на підставі рівностей (4)–(6) справджується (10).

Таким чином, у випадку I_1 лему доведено.

В усіх випадках, розглянутих нижче, (9) і (10) доводяться аналогічно випадку I_1.

Розглянемо випадок I_2. Для деякого $\omega\in N$ кожне $x_i,\ i=1,2,\ldots,n$, можна записати у вигляді

$$x_{i_\nu} = \frac{2^\omega}{2^\omega} \equiv \frac{\mu_{i_\nu}}{2^\omega}\,,$$

де $i_\nu=1,2,\ldots,n,\ \nu=1,2,\ldots,p,\ i_1<\ldots<i_p,\ 1\leq p\leq n-1,\ p\in N$, і

$$x_i = \frac{\mu_i-1}{2^\omega}\,,$$

де $1\leq\mu_i\leq 2^\omega,\ i=1,2,\ldots,n,\ i\neq i_\nu,\ \nu=1,2,\ldots,p,\ 1\leq p\leq n-1,\ p\in N.$

Нехай $\overline{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ і $\overline{u}^{\,(s)}=(u_1^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}),\ s=0,1,2,\ldots$, де

$$u_i^{(s)}=2, \quad i=1,2,\ldots,n, \quad i\neq i_\nu, \quad \nu=1,2,\ldots,p, \quad 1\leq p\leq n-1, \quad p\in N,$$

$$u_{i_\nu}^{(s)}=2^s-1, \quad i_\nu=1,2,\ldots,n, \quad \nu=1,2,\ldots,p, \quad i_1<\ldots<i_p, \quad 1\leq p\leq n-1, \quad p\in N.$$

Визначимо функцію f_{x_0} таким чином:

$$f_{x_0}(t)=\begin{cases} 1, & t=(t_1,\ldots,t_n)\in\Gamma\equiv\bigcup_{s=1}^{\infty}\Gamma^{(\omega,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}^{2s}}, \\ 0, & t\in[0,1]^n\setminus\Gamma. \end{cases} \tag{13}$$

Нехай $h_s=\omega+2s+1,\ l_s=\omega+2s,\ s=0,1,2\ldots$, і $\overline{u}_0^{(s)}=(u_{1,0}^{(s)},\ldots,u_{n,0}^{(s)}),\ s=0,1,2,\ldots$, де

$$u_{i,0}^{(s)} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq i_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots,p, \quad 1 \le p \le n-1, \quad p \in N,$$

$$u_{i_\nu,0}^{(s)} = 2^s, \quad i_\nu = 1,2,\ldots,n, \quad \nu = 1,2,\ldots,p, \quad i_1 < \ldots < i_p, \quad 1 \le p \le n-1, \quad p \in N.$$

З огляду на (4), (7) і (13) маємо

$$\left| S_{2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f_{x_0}, x_0) \right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{2^{n-p}|\Gamma^{(\omega,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s+1)}}|} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s+1)}}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n -$$

$$- \frac{1}{2^{n-p}|\Gamma^{(\omega,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s)}}|} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s)}}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n =$$

$$= (2^n-1)\cdot 2^{(\omega+2s-1)n+p} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s+1)}}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n >$$

$$> 2^{(\omega+2s-1)n} \int\limits_{\Gamma^{(\omega,2s+2)}_{\overline{\mu},\overline{u}^{(2s+2)}}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n > 2^{-4n}, \quad s=0,1,2,\ldots. \tag{14}$$

Отже (див. (14)), виконується нерівність (8), і у випадку I_2 лему доведено.

Розглянемо випадок I_3. Нехай $\overline{\mu} = (1,\ldots,1)$ і $\overline{u}^{(s)} = (u_1^{(s)},\ldots,u_n^{(s)})$, $s = 0,1,2,\ldots,$ де $u_i^{(s)} = 2^s - 1$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Визначимо функцію f_{x_0} таким чином:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (t_1,\ldots,t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup_{s=1}^{\infty} \Gamma^{(0,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}^{2s}}, \\ 0, & t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{15}$$

Нехай $h_s = 2s+1$, $l_s = 2s$, $s = 0,1,2,\ldots,$ і $\overline{u}_0^{(s)} = (u_{1,0}^{(s)},\ldots,u_{n,0}^{(s)})$, $s = 0,1,2,\ldots,$ де $u_{i,0}^{(s)} = 2^s$, $i = 1,2,\ldots,n$.

З огляду на (4), (7) і (15) маємо

$$\left| S_{2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f_{x_0}, x_0) \right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{|\Gamma^{(0,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s+1)}}|} \int\limits_{\Gamma^{(0,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s+1)}}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n -$$

$$- \frac{1}{|\Gamma^{(0,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s)}}|} \int\limits_{\Gamma^{(0,2s)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s)}}} f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n =$$

$$= (2^n - 1) \cdot 2^{2ns} \int\limits_{\Gamma^{(0,2s+1)}_{\overline{\mu},\overline{u}_0^{(2s+1)}}} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n >$$

$$> 2^{2ns} \int\limits_{\Gamma^{(0,2s+2)}_{\overline{\mu},\overline{u}^{(2s+2)}}} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n > 2^{-4n}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

Із (16) випливає, що виконується нерівність (8).

Таким чином, у випадку I_3, а отже і у випадку **I**, лему доведено.

Розглянемо випадок **II**. Запишемо x_{i_1} у вигляді $x_{i_1} = \sum_{\theta=1}^{\infty} \dfrac{b_\theta}{2^\theta}$, де $b_\theta = 0$ або 1, $\theta = 1, 2, \ldots$. Нехай послідовність $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$ задовольняє умови

$$\theta_{j+1} > \theta_j + 1, \quad b_{\theta_j} = 0, \quad b_{\theta_j+1} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

Введемо позначення

$$\left[\alpha_j^{(\mathrm{v})} \beta_j^{(\mathrm{v})}\right] \equiv \Delta^{(\theta_{2j}-1)}_{[x_{i_\mathrm{v}}]} = \Delta^{(\theta_{2j}-1)}_{\alpha_j^{(\mathrm{v})} \cdot 2^{\theta_{2j}-1}+1}, \tag{18}$$

$$\mathrm{v} = 1, 2, \ldots, q, \quad 1 \le q \le n-1, \quad q \in N, \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Має місце один із таких підвипадків:

II_1. $x_i \ne 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $i \ne i_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} = 1, 2, \ldots, q$, $1 \le q \le n-1$, $q \in N$;

II_2. $x_{i'_\nu} = 1$, $i'_\nu = 1, 2, \ldots, n$, $i'_\nu \ne i_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} = 1, \ldots, q$, $1 \le q \le n-1$, $q \in N$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, $i'_1 < \ldots < i'_p$, $1 \le p \le n-q-1$, $p \in N$;

$x_i \ne 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $i \ne i_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} = 1, 2, \ldots, q$, $1 \le q \le n-1$, $q \in N$, $i \ne i'_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, $1 \le p \le n-q-1$, $p \in N$;

II_3. $x_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $i \ne i_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} = 1, 2, \ldots, q$, $1 \le q \le n-1$, $q \in N$.

Зазначимо, що випадки II_2 можливі лише тоді, коли $n > 2$ і $1 \le q \le n-2$.

Розглянемо кожен із них.

II_1. Нехай для будь-якого $i = 1, \ldots, n$, $i \ne i_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} = 1, \ldots, q$, $1 \le q \le n-1$, $q \in N$,

$$x_i = \frac{\mu_i - 1}{2^\omega},$$

де $1 \le \mu_i \le 2^\omega$, $\omega \in N$.

Припустимо, що $j_0 \in N$ — таке число, що $x_i + 2^{-\theta_{2j_0}+1} < 1$ і $\theta_{2j_0} - 1 > \omega$ для будь-якого $i = 1, \ldots, n$, $i \ne i_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} = 1, \ldots, q$, $1 \le q \le n-1$, $q \in N$.

Для будь-якого числа $j \ge j_0$, $j \in N$, кожне x_i, $i = 1, \ldots, n$, $i \ne i_\mathrm{v}$, $\mathrm{v} = 1, \ldots, q$, $1 \le q \le n-1$, $q \in N$, можна записати у вигляді

$$x_i = \frac{\mu_j^{(i)} - 1}{2^{\theta_{2j}-1}}, \quad 1 \le \mu_j^{(i)} \le 2^{\theta_{2j}-1}, \quad j = j_0, j_0+1, \ldots .$$

Нехай

$$\overline{\eta}^{(j)} = (\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \ldots, \eta_n^{(j)}), \quad j = j_0, j_0+1, \ldots,$$

де

$$\eta_i^{(j)} = \mu_j^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq i_{\text{v}}, \quad \text{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

$$\eta_{i_{\text{v}}}^{(j)} = \alpha_j^{(\text{v})} \cdot 2^{\theta_{2j}-1} + 1, \quad \text{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

і

$$\overline{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}), \quad j = j_0, j_0+1, \ldots,$$

де

$$u_i^{(j)} = 2, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq i_{\text{v}}, \quad \text{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

$$u_{i_{\text{v}}}^{(j)} = \begin{cases} 2, & x_{i_{\text{v}}} \in \left(\alpha_j^{(\text{v})}, \dfrac{\alpha_j^{(\text{v})} + \beta_j^{(\text{v})}}{2}\right), \\ 1, & x_{i_{\text{v}}} \in \left(\dfrac{\alpha_j^{(\text{v})} + \beta_j^{(\text{v})}}{2}, \beta_j^{(\text{v})}\right), \end{cases}$$

$$\text{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N.$$

Визначимо функцію f_{x_0} таким чином:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \Gamma_{\overline{\eta}^{(2j)}, \overline{u}^{(2j}}^{(\theta_{4j}-1,1)}, \\ 0, & t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{19}$$

Нехай

$$h_j = \theta_{4(j_0+j)} - 1 \quad \text{і} \quad l_j = \theta_{4(j_0+j)-2} - 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\overline{u}_0^{(j)} = (1, \ldots, 1), \quad j = j_0, j_0+1, \ldots .$$

Тоді маємо (див. (4), (7), (17) і (19))

$$\left|S_{2^{h_j}\ldots 2^{h_j}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_j}\ldots 2^{l_j}}(f_{x_0}, x_0)\right| \geq$$

$$\geq \frac{2^{-n+q}}{|\Gamma_{\overline{\eta}^{(2(j_0+j))}, \overline{u}_0^{(2(j_0+j))}}^{(\theta_{4(j_0+j)}-1,0)}|} \int\limits_{\Gamma_{\overline{\eta}^{(2(j_0+j))}, \overline{u}_0^{(2(j_0+j))}}^{(\theta_{4(j_0+j)}-1,0)}} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n -$$

$$- \frac{2^{-n+q}}{|\Gamma_{\overline{\eta}^{(2(j_0+j)-1)}, \overline{u}_0^{(2(j_0+j)-1)}}^{(\theta_{4(j_0+j)-2}-1,0)}|} \int\limits_{\Gamma_{\overline{\eta}^{(2(j_0+j)-1)}, \overline{u}_0^{(2(j_0+j)-1)}}^{(\theta_{4(j_0+j)-2}-1,0)}} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n >$$

$$> 2^{-2n+q}(2^{n\theta_{4(j_0+j)}} - 2^{n\theta_{4(j_0+j)-2}}) \int\limits_{\Gamma_{\overline{\eta}^{(2(j_0+j))}, \overline{u}_0^{(2(j_0+j))}}^{(\theta_{4(j_0+j)}-1,1)}} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n =$$

$$= 2^{-2n+q}(2^{n\theta_{4(j_0+j)}} - 2^{n\theta_{4(j_0+j)-2}}) \cdot 2^{-n\theta_{4(j_0+j)}} > 2^{-4n}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{20}$$

Нерівність (20) означає, що справджується оцінка (8), а отже, у випадку II_1 лему доведено.

Розглянемо випадок II_2. Нехай для будь-якого числа $i = 1,\ldots,n,\ i \neq i_{\mathrm{v}},\ \mathrm{v} = 1,\ldots,q,$ $1 \leq q \leq n-1,\ q \in N,\ i \neq i'_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots,p,\ 1 \leq p \leq n-q-1,\ p \in N,$

$$x_i = \frac{\mu_i - 1}{2^\omega}, \quad 1 \leq \mu_i \leq 2^\omega, \quad \omega \in N.$$

Припустимо, що $j_0 \in N$ — таке число, що $x_i + 2^{-\theta_{2j_0}+1} < 1$ і $\theta_{2j_0} - 1 > \omega$ для будь-якого $i = 1,\ldots,n$, $i \neq i_{\mathrm{v}}$, $\mathrm{v} = 1,\ldots,q$, $1 \leq q \leq n-1$, $q \in N$, $i \neq i'_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots,p$, $1 \leq p \leq n-q-1$, $p \in N$.

Для будь-якого числа $j \geq j_0,\ j \in N,$ кожне $x_i,\ i = 1,\ldots,n,\ i \neq i_{\mathrm{v}},\ \mathrm{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \leq$ $\leq q \leq n-1,\ q \in N,$ можна записати у вигляді

$$x_i = \frac{\mu_j^{(i)} - 1}{2^{\theta_{2j}-1}}, \quad 1 \leq \mu_j^{(i)} \leq 2^{\theta_{2j}-1}, \quad i \neq i'_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots,p, \quad 1 \leq p \leq n-q-1, \quad p \in N,$$

і

$$x'_{i_\nu} = \frac{2^{\theta_{2j}-1}}{2^{\theta_{2j}-1}} \equiv \frac{\mu_j^{(i'_\nu)}}{2^{\theta_{2j}-1}}, \quad \nu = 1,\ldots,p, \quad 1 \leq p \leq n-q-1, \quad p \in N.$$

Нехай

$$\overline{\eta}^{(j)} = (\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \ldots, \eta_n^{(j)}), \quad j = j_0, j_0+1, \ldots,$$

де

$$\eta_i^{(j)} = \mu_j^{(i)}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq i_{\mathrm{v}}, \quad \mathrm{v} = 1,\ldots,q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

$$\eta_{i_{\mathrm{v}}}^{(j)} = \alpha_j^{(\mathrm{v})} \cdot 2^{\theta_{2j}-1} + 1, \quad \mathrm{v} = 1,\ldots,q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

і

$$\overline{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}), \quad j = j_0, j_0+1, \ldots,$$

де

$$u_i^{(j)} = 2, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad i \neq i_{\mathrm{v}}, \quad \mathrm{v} = 1,\ldots,q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

$$i \neq i'_\nu, \quad \nu = 1,\ldots,p, \quad 1 \leq p \leq n-q-1, \quad p \in N,$$

$$u_{i'_\nu}^{(j)} = 1, \quad \nu = 1,\ldots,p, \quad 1 \leq p \leq n-q-1, \quad p \in N,$$

$$u_{i_{\mathrm{v}}}^{(j)} = \begin{cases} 2, & x_{i_{\mathrm{v}}} \in \left(\alpha_j^{(\mathrm{v})}, \dfrac{\alpha_j^{(\mathrm{v})} + \beta_j^{(\mathrm{v})}}{2}\right), \\[2ex] 1, & x_{i_{\mathrm{v}}} \in \left(\dfrac{\alpha_j^{(\mathrm{v})} + \beta_j^{(\mathrm{v})}}{2}, \beta_j^{(\mathrm{v})}\right), \end{cases} \quad \mathrm{v} = 1,\ldots,q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N.$$

Визначимо функцію f_{x_0} таким чином:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (t_1,\ldots,t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \Gamma_{\overline{\eta}^{(2j)}, \overline{u}^{2j}}^{(\theta_{4j}-1,1)}, \\[2ex] 0, & t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{21}$$

Нехай

$$h_j = \theta_{4(j_0+j)} - 1 \quad \text{і} \quad l_j = \theta_{4(j_0+j)-2} - 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\overline{u}_0^{(j)} = (1, \ldots, 1), \quad j = j_0, j_0 + 1, \ldots .$$

На підставі (4), (7) і (21), як і у випадку II_1, отримуємо

$$\left| S_{2^{h_j} \ldots 2^{h_j}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_j} \ldots 2^{l_j}}(f_{x_0}, x_0) \right| > 2^{-4n}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

Нерівність (22) означає, що справджується оцінка (8), а отже, у випадку II_2 лему доведено.

Розглянемо випадок II_3. Нехай

$$\overline{\eta}^{(j)} = (\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \ldots, \eta_n^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\eta_i^{(j)} = 2^{\theta_{2j}-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq i_{\mathrm{v}}, \quad \mathrm{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

$$\eta_{i_{\mathrm{v}}}^{(j)} = \alpha_j^{(\mathrm{v})} \cdot 2^{\theta_{2j}-1} + 1, \quad \mathrm{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

і

$$\overline{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

де

$$u_i^{(j)} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq i_{\mathrm{v}}, \quad \mathrm{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N,$$

$$u_{i_{\mathrm{v}}}^{(j)} = \begin{cases} 2, & x_{i_{\mathrm{v}}} \in \left(\alpha_j^{(\mathrm{v})}, \dfrac{\alpha_j^{(\mathrm{v})} + \beta_j^{(\mathrm{v})}}{2} \right), \\[2ex] 1, & x_{i_{\mathrm{v}}} \in \left(\dfrac{\alpha_j^{(\mathrm{v})} + \beta_j^{(\mathrm{v})}}{2}, \beta_j^{(\mathrm{v})} \right), \end{cases} \quad \mathrm{v} = 1, \ldots, q, \quad 1 \leq q \leq n-1, \quad q \in N.$$

Визначимо функцію f_{x_0} таким чином:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{\overline{\eta}^{(2j)}, \overline{u}^{2j}}^{(\theta_{4j}-1,1)}, \\[2ex] 0, & t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{23}$$

Нехай

$$h_j = \theta_{4(j+1)} - 1 \quad \text{і} \quad l_j = \theta_{4(j+1)-2} - 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\overline{u}_0^{(j)} = (1, \ldots, 1), \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тоді, як і у випадку II_1, отримуємо (див. (4), (7) і (23))

$$\left| S_{2^{h_j} \ldots 2^{h_j}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_j} \ldots 2^{l_j}}(f_{x_0}, x_0) \right| \geq 2^{-4n}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

а це означає справедливість оцінки (8). Таким чином, у випадку II_3, а отже і у випадку **II**, лему доведено.

Розглянемо випадок **III**. Запишемо x_1 у вигляді

$$x_1 = \sum_{\theta=1}^{\infty} b_\theta \cdot 2^{-\theta}, \quad \text{де} \quad b_\theta = 0 \quad \text{або } 1, \quad \theta = 1, 2, \ldots .$$

Будемо вважати, що послідовність $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$ задовольняє умови

$$\theta_{j+1} > \theta_j + 1, \quad b_{\theta_j} = 0, \quad b_{\theta_j+1} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{25}$$

Введемо позначення

$$\left[\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}\right] \equiv \Delta_{[x_i]}^{(\theta_{2j}-1)} = \Delta_{\alpha_j^{(i)} \cdot 2^{\theta_{2j}-1}+1}^{(\theta_{2j}-1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{26}$$

Нехай

$$\overline{\eta}^{(j)} = (\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \ldots, \eta_n^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\eta_i^{(j)} = \alpha_j^{(i)} \cdot 2^{\theta_{2j}-1} + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

і

$$\overline{u}^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

де

$$u_i^{(j)} = \begin{cases} 2, & x_i \in \left(\alpha_j^{(i)}, \dfrac{\alpha_j^{(i)} + \beta_j^{(i)}}{2}\right), \\ 1, & x_i \in \left(\dfrac{\alpha_j^{(i)} + \beta_j^{(i)}}{2}, \beta_j^{(i)}\right), \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Визначимо функцію f_{x_0} таким чином:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (t_1, \ldots, t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{\overline{\eta}^{(2j)}, \overline{u}^{2j}}^{(\theta_{4j}-1,1)}, \\ 0, & t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{27}$$

Нехай

$$h_j = \theta_{4(j+1)} - 1 \quad \text{і} \quad l_j = \theta_{4(j+1)-2} - 1, \quad j = 0, 1, 2 \ldots,$$

$$\overline{u}_0^{(j)} = (1, \ldots, 1), \quad j = 0, 1, 2, \ldots .$$

З огляду на (4), (7) і (27), як і у випадку II_1, отримуємо

$$\left| S_{2^{h_j} \ldots 2^{h_j}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_j} \ldots 2^{l_j}}(f_{x_0}, x_0) \right| \geq 2^{-4n}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

Це означає справедливість оцінки (8), а отже, у випадку **III** лему доведено.

Таким чином, лему повністю доведено (див. (12), (14), (16), (20), (22), (24), (28)).

3. Основний результат.

Теорема 1. *Для будь-якої не більш ніж зліченної множини* F *із* n*-вимірного одиничного куба* $[0,1]^n$ *існує обмежена вимірна функція, задана на* $[0,1]^n$, n*-кратний ряд Фур'є–Хаара якої збігається за Прінгсхеймом на множині* $[0,1]^n \setminus F$ *і* $\lambda = 1$*-розбігається на* F.

Доведення. Нехай $F = \{x_\nu : x_\nu \in [0,1]^n,\ \nu = 1,2,\ldots\}$. За лемою 1 для будь-якої точки x_ν, $\nu = 1,2,\ldots,$ можна побудувати функцію $f_\nu(t),\ t \in [0,1]^n$, що задовольняє умови 1 – 3 леми 1.

Розглянемо функцію

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n} f_\nu(t), \quad t \in [0,1]^n. \tag{29}$$

Зрозуміло, що функція $f(t)$ обмежена. Крім того, за теоремою Леві (див. [16], гл. 5, § 5) маємо (див. (3) – (6), (29))

$$S_{k_1\ldots k_n}(f,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n} S_{k_1\ldots k_n}(f_\nu,t), \quad t \in [0,1]^n. \tag{30}$$

Нехай $x \in [0,1]^n$, $x \neq x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$. Покажемо, що послідовність $\{S_{k_1\ldots k_n}(f,x)\}_{k_1\ldots k_n=1}^{\infty}$ збігається.

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число. Для довільних чисел $k_1,k_2,\ldots,k_n \in N$ і $j_1,j_2,\ldots,j_n \in N$ отримуємо (див. (30))

$$\begin{gathered}\left|S_{k_1\ldots k_n}(f,x) - S_{j_1\ldots j_n}(f,x)\right| \leq \\ \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1\ldots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1\ldots j_n}(f_\nu,x)\right| = \\ = \sum_{\nu=1}^{c} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1\ldots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1\ldots j_n}(f_\nu,x)\right| + \\ + \sum_{\nu=c+1}^{\infty} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1\ldots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1\ldots j_n}(f_\nu,x)\right|,\end{gathered} \tag{31}$$

де c — деяке натуральное число.

Припустимо, що $c > \dfrac{1}{10n}\, \log_2^{4\varepsilon^{-1}}$. Тоді згідно з оцінкою (9) маємо

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=c+1}^{\infty} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1\ldots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1\ldots j_n}(f_\nu,x)\right| < \\ < \sum_{\nu=c+1}^{\infty} 2^{-10\nu n+1} = \frac{2^{-10nc+1}}{2^{10n}-1} < \frac{\varepsilon}{2}\,.\end{gathered} \tag{32}$$

За лемою 1 знайдеться таке число $m_0 \in N$, що для довільних чисел $k_1,k_2,\ldots,k_n,j_1,j_2,\ldots$ $\ldots,j_n > m_0,\ k_i,j_i \in N,\ k_i > j_i,\ i = 1,2,\ldots,n,$ виконується нерівність

$$\left|S_{k_1\ldots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1\ldots j_n}(f_\nu,x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \quad \nu = 1,2,\ldots,c. \tag{33}$$

Оскільки $\sum_{\nu=1}^{c} 2^{-10\nu n} < 1$, то (див. (33))

$$\sum_{\nu=1}^{c} 2^{-10\nu n} \big| S_{k_1 \ldots k_n}(f_\nu, x) - S_{j_1 \ldots j_n}(f_\nu, x) \big| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{34}$$

Таким чином, знайдеться таке число $m_0 \in N$, що для довільних чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $j_1, j_2, \ldots, j_n > m_0$, $k_i, j_i \in N$, $k_i > j_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, виконується нерівність (див. (31), (32) і (34))

$$\big| S_{k_1 \ldots k_n}(f, x) - S_{j_1 \ldots j_n}(f, x) \big| < \varepsilon.$$

Це означає збіжність за Прінгсхеймом на множині $[0,1]^n \setminus F$ n-кратного ряду Фур'є – Хаара функції f.

Покажемо, що послідовність $\{S_{k_1 \ldots k_n}(f)\}_{k_1, \ldots, k_n = 1}^{\infty}$ розбігається в кожній точці множини F.

Виберемо довільну точку x_k, $k = 1, 2, \ldots$, множини F. За лемою 1 (див. (8)) існують послідовності натуральних чисел $h_s \uparrow \infty$ і $l_s \uparrow \infty$, $h_s > l_s$, $h_s = h_s(x_k)$, $l_s = l_s(x_k)$, такі, що

$$\big| S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_k, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_k, x_k) \big| > 2^{-4n}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{35}$$

Розглянемо різницю часткових сум (див. (30))

$$\begin{gathered}
\big| S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f, x_k) \big| = \\
= \Big| \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n} (S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k)) \Big| = \\
= \Big| \sum_{\nu=1}^{k} 2^{-10\nu n} (S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k)) + \\
+ \sum_{\nu=k+1}^{\infty} 2^{-10\nu n} (S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k)) \Big| \geq \\
\geq \Bigg| 2^{-10kn} \Big| S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_k, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_k, x_k) + \\
+ \sum_{\nu=1}^{k-1} 2^{-10\nu n} (S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k)) \Big| - \\
- \sum_{\nu=k+1}^{\infty} 2^{-10\nu n} \big| S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k) \big| \Bigg|, \\
s = 0, 1, 2, \ldots\,.
\end{gathered} \tag{36}$$

За лемою 1 (див. (10)) знайдеться таке число $\theta \in N$, що для будь-якого числа $s = \theta, \theta + 1$, $\theta + 2, \ldots$ маємо

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} 2^{-10\nu n} (S_{2^{h_s} \ldots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s} \ldots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k)) = 0,$$

тому (див. (9), (35), (36))

$$\left|S_{2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f,x_k)-S_{2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f,x_k)\right|\geq$$
$$\geq\left|2^{-10kn}\left|S_{2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f_k,x_k)-S_{2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f_k,x_k)\right|-\right.$$
$$\left.-\sum_{\nu=k+1}^{\infty}2^{-10\nu n}\left|S_{2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f_\nu,x_k)-S_{2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f_\nu,x_k)\right|\right|>$$
$$>2^{-4n-10kn}-\sum_{\nu=k+1}^{\infty}2^{-10\nu n+1}>2^{-15kn},\quad s=\theta,\theta+1,\theta+2,\ldots.$$

Це означає $\lambda=1$-розбіжність n-кратного ряду Фур'є – Хаара функції f у кожній точці множини F.

Теорему доведено.

Література

1. Г. Алексич, *Проблемы сходимости ортогональных рядов*, Изд-во иностр. лит., Москва (1963).
2. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Москва (1984).
3. A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann., **69**, № 3, 331 – 371 (1910).
4. В. И. Прохоренко, *О расходящихся рядах Фурье по системе Хаара*, Изв. вузов. Математика, **1**, 62 – 68 (1971).
5. В. М. Бугадзе, *О расходимости рядов Фурье – Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль*, Мат. заметки, **51**, № 5, 20 – 25 (1992).
6. М. А. Лунина, *О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара*, Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, **4**, 13 – 20 (1976).
7. G. A. Karagulyan, *Divergence of general operators on sets of measure zero*, Colloq. Math., **121**, № 1, 113 – 119 (2010).
8. G. A. Karagulyan, *On a characterization of the sets of divergence points of sequences of operators with the localization property*, Mat. Sb., **202**, № 1, 11 – 36 (2011).
9. О. П. Дзагнидзе, *Представление измеримых функций двух переменных двойными рядами*, Сообщ. АН ГССР, **34**, 277 – 282 (1964).
10. T. Sh. Zerekidze, *Convergence of multiple Fourier – Haar series and strong differentiability of integrals*, Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruzin. SSR, **76**, 80 – 99 (1985).
11. K. Bitsadze, *On divergence of multiple Fourier – Walsh and Fourier – Haar series of bounded function of several variables on set of measure zero*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., **161**, 25 – 45 (2013).
12. R. D. Getsadze, *On divergence of the general terms of the double Fourier – Haar series*, Arch. Math. (Basel), **86**, № 4, 331 – 339 (2006).
13. G. G. Oniani, *On the divergence of multiple Fourier – Haar series*, Anal. Math., **38**, № 3, 227 – 247 (2012).
14. G. G. Oniani, *On the convergence of multiple Haar series*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., **78**, № 1, 99 – 116 (2014).
15. K. Bitsadze, *On set of divergence of multiple Fourier – Haar series*, Bull. Georgian Acad. Sci., **162**, № 3, 421 – 422 (2000).
16. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва (1989).

Одержано 22.08.21