DOI: 10.37863/umzh.v74i1.6879

УДК 517.937, 519.21

В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича)

КЛАСИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ЛОКАЛЬНИХ ФЛУКТУАЦІЙ ГРАВІТАЦІЙНИХ ПОЛІВ РІССА ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

We consider a pseudodifferential equation involving the Riesz operator of fractional differentiation, which is a natural generalization of the well-known equation of fractal diffusion. Its fundamental solution to the Cauchy problem is the density of probability distribution of local interaction forces for moving objects in the corresponding Riesz gravitational field. For this equation, we establish the correct solvability of the Cauchy problem in the class of unbounded, discontinuous initial functions with an integrable singularity. In addition, the form of the classical solution of this problem is found and its smoothness properties and behavior at infinity are investigated. Moreover, under certain conditions on the fluctuation coefficient, we obtain an analogue of the maximum principle and use it to prove the uniqueness of the solution to the Cauchy problem.

Розглядається псевдодиференціальне рівняння з оператором Рісса дробового диференціювання, яке природно узагальнює відоме рівняння фрактальної дифузії. Його фундаментальний розв'язок задачі Коші є щільністю розподілу ймовірностей для сили локальної взаємодії рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі Рісса. Для цього рівняння встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класі необмежених, розривних з інтегровною особливістю початкових функцій. При цьому знайдено форму класичного розв'язку цієї задачі та досліджено властивості його гладкості й поведінку на нескінченності. Також, за певних умов на коефіцієнт флуктуації, встановлено аналог принципу максимуму, за допомогою якого обґрунтовано єдиність розв'язку задачі Коші.

1. Вступ. У системі рухомих об'єктів з масами m_j виникає гравітаційне поле локального впливу на розглядуваний об'єкт Z_0, спричинене його близьким оточенням Z_j. Найпростіший приклад таких систем — зоряні галактики, в яких об'єктами Z_j є зірки. Оскільки це оточення непередбачувано змінюється, то сила F локального впливу на об'єкт Z_0 є випадковою величиною.

Нехай взаємодія між масами системи підпорядкована потенціалу М. Рісса [1], тобто гравітаційний вплив між її двома довільними об'єктами мас M і m описується законом

$$F = G\frac{Mm}{|r|^{\beta}}r^0, \quad \beta > 0, \tag{1}$$

де G — відповідна гравітаційна стала, r — вектор відстані між цими об'єктами, а $r^0 := r/|r|$ — орт вектора $r \in \mathbb{R}^3$. Тут $\mathbb{R}^n$ — евклідів простір розмірності n зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $|r| = (r,r)^{1/2}$; $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$. При $\beta = 2$ рівність (1) характеризує відомий гравітаційний закон Ньютона.

Припустимо, що розглядуваний об'єкт Z_0 знаходиться в початку координат системи. Тоді нестаціонарний розподіл $W_\beta(F;t)$ ймовірностей для сили $F(t)$, яка діє на одиницю маси об'єкта Z_0 у момент часу t внаслідок гравітації близького оточення, визначається рівністю [2]

$$W_\beta(F;t) = \mathbb{F}^{-1}\Big[e^{-a_\beta(t)|\xi|^{3/\beta}}\Big](F;t), \quad \beta > 3/2, \tag{2}$$

де $\mathbb{F}$ — оператор перетворення Фур'є, а $a_\beta(\cdot)$ — коефіцієнт локальної флуктуації поля.

Зазначимо, що кожен розподіл $W_\beta(\cdot;t)$, $\beta > 3/2$, при фіксованому $t \in (0;T]$ відноситься до класу розподілів П. Леві

$$\mathcal{L}_\lambda^\alpha(\cdot) = \mathbb{F}^{-1}\big[e^{-\lambda|\xi|^\alpha}\big](\cdot), \quad \alpha \in (0;2], \tag{3}$$

симетричних стійких випадкових процесів [3, 4]. Зокрема, при $\beta = 2$ W_β — відомий розподіл Хольцмарка [5, 6].

Очевидно, що $W_\beta = \mathcal{L}_\lambda^\alpha$ при $\alpha = 3/\beta$ і $\lambda = a_\beta(t),\ t \in (0;T]$. Ця рівність характеризує загальну природу симетричних стійких випадкових процесів Леві. Кожен такий процес $\mathcal{L}_\lambda^\alpha$ при $\alpha \in (0;2)$ можна розглядати як процес локального впливу рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі М. Рісса.

За певних умов на коефіцієнт локальної флуктуації $a_\beta(\cdot)$ розподіл W_β на множині $(0;T]\times\mathbb{R}^3$ є фундаментальним розв'язком задачі Коші для псевдодиференціального рівняння (ПДР) [2, 7]

$$\partial_t u(x;t) + a'_\beta(t) A_\nu u(x;t) = 0, \qquad t \in (0;T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Тут $n = 3,\ \nu := 3/\beta,\ a'_\beta(t) := \dfrac{da_\beta(t)}{dt},\ A_\nu$ — оператор Рісса дробового диференціювання порядку ν [8], тобто $A_\nu = (-\Delta)^{\nu/2}$, де Δ — оператор Лапласа.

З огляду на цей факт рівняння (4) природно назвати ПДР локальних флуктуацій гравітаційних полів Рісса, спричинених рухомими об'єктами.

У простішому випадку $a'_\beta(t) \equiv \mathrm{const}$ рівняння (4) відоме як „рівняння фрактальної дифузії" [9] або „рівняння ізотропної супердифузії" [10, с. 251]. Це рівняння є джерелом багатьох випадкових процесів [11]. Загалом відомо, що дробовий лапласіан A_ν є нескінченно малим генератором процесів Леві (див., наприклад, [12, 13]).

У сучасній літературі наведено багато прикладів застосувань розподілів Леві в астрономії, ядерній фізиці, економіці, соціології, в промисловій та військовій галузях тощо [14 – 17]. Важливий приклад для мотивації дослідження рівняння фрактальної дифузії наведено в монографії [18, с. 7]. Там запропоновано ймовірнісну модель випадкового блукання частинки X стрибками в довжину — „політ Леві" і показано, що ймовірність $u(x;t)$ перебування частинки X в момент часу t у просторовій точці x є розв'язком рівняння (4) при $a'_\beta(t) \equiv 1$. Процеси такого типу в природі спостерігаються досить часто (див. біологічні спостереження в [19, 20] та математичні дискусії в [21, 22]).

Домовимось далі фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (4) позначати $G_\nu(x;t)$:

$$G_\nu(x;t) := \mathbb{F}^{-1}\left[e^{-|\xi|^\nu \int_0^t da_\beta(\tau)}\right](x;t), \qquad t \in (0;T], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Дослідження функції G_ν для рівняння (4) при $a'_\beta(t) \equiv \mathrm{const}$ розпочато у 80-х роках минулого століття у працях [23 – 25], в яких запропоновано один метод, що ґрунтується на перетворенні Фур'є. Завдяки цьому методу одержано такі оцінки:

$$|\partial_x^k G_\nu(x;t)| \le c_1 t (t^{1/\nu} + |x|)^{-(n+|k|+[\nu])}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \quad t \in (0;T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

де $[\cdot]$ — ціла частина числа, а $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів. Проте цей метод накладає обмеження на порядок ν ПДР: $\nu > 1$. Оцінки (6) дозволили в [24] встановити коректну розв'язність відповідної задачі Коші в класі обмежених гельдерових функцій.

Точну асимптотичну поведінку функції Гріна $G_\nu(\cdot;t)$ в околі нескінченно віддалених точок було встановлено в [26]:

$$G_\nu(\cdot;t) \sim |\cdot|^{-n-\nu}, \quad t > 0. \tag{7}$$

Також цю асимптотику в дещо інший спосіб було одержано в [27]. Зазначимо, що задовго до появи публікації [26] асимптотику (7) для ПДР (4) при $a_\beta(t) = t$ і $\nu \in (0;1]$ було описано в роботі [28].

Новий підхід до дослідження властивостей функції $G_\nu(\cdot;t)$ застосував А. Н. Кочубей у [29, 30]. Для рівнянь загальної структури з додатним головним символом псевдодиференціювання він уперше одержав оцінки (6), в яких $[\nu]$ замінено на ν, у випадку, коли $n>1$ і $\nu\geq 1$; методом параметрикса побудував фундаментальний розв'язок задачі Коші для ПДР зі змінними символами псевдодиференціювання і встановив розв'язність задачі Коші у класі обмежених неперервних початкових функцій. Для окремого класу ПДР порядку $\nu\in[1;2]$ дослідив питання існування невід'ємних розв'язків, сформулював аналог принципу максимуму, за допомогою якого обґрунтував єдиність розв'язку задачі Коші та встановив важливі зв'язки з марковськими випадковими процесами.

Задачу Коші для параболічних ПДР порядку $\nu>0$ з однорідними негладкими сталими символами й узагальненими початковими даними розглянуто у [31, 32]. Тут дослідження проводилось у спеціальних просторах Φ_ν, Φ'_ν основних і узагальнених функцій, породжених властивостями функції $G_\nu(\cdot;t)$. У [32] встановлено коректну розв'язність цієї задачі у випадку, коли початковий функціонал $f\in\Phi'_\nu$ є згортувачем у відповідному просторі Φ_ν, і досліджено властивості її розв'язків.

Для побудови конструкції фундаментального розв'язку оператора L типу Леві зі змінним символом порядку $\nu\in(0;1)$ у [33–35] запропоновано параметрикс у дещо іншій формі, ніж у [30]. Тут також встановлено градієнтні оцінки цього розв'язку, які важливі при дослідженні відповідних марковських процесів.

Зазначимо, що клас згортувачів у просторі Φ_ν не охоплює всі обмежені неперервні на $\mathbb{R}^n$ функції, тому поширення результатів із [30] про розв'язність задачі Коші для ПДР зі сталими символами псевдодиференціювання на проблемний випадок $\nu\in(0;1)$ досі залишається не завершеним. Крім цього, важливою також є задача розширення класу граничних значень на початковій гіперплощині класичних розв'язків ПДР (4) при $\nu\in(0;2)$. Вирішенню цих проблем присвячено дану роботу.

Опишемо коротко структуру статті. У пункті 2 наведено необхідну інформацію про властивості функції G_ν та форми зображення оператора A_ν, що дозволяють розширити його на ширші класи функцій. Задачу Коші для ПДР (4) порядку $\nu\in(0;2)$ у класі розривних необмежених початкових функцій з інтегровною особливістю розв'язано в пункті 3. Тут встановлено існування класичного розв'язку цієї задачі, знайдено його форму та досліджено властивості гладкості й поведінку на нескінченності. У пункті 4 встановлено принцип екстремуму (аналог принципу максимуму), з'ясовано питання єдиності розв'язку цієї задачі Коші та деякі властивості її розв'язків, при цьому введено поняття точки перевалу інтенсивності коефіцієнта флуктуації $a_\beta(\cdot)$ та проміжку його стабільної інтенсивності й доведено, що на таких проміжках ця задача може мати не більше одного розв'язку. У пункті 5 наведено приклад задачі Коші з початковою функцією, що є ядром Рісса дробового порядку, який дозволяє зробити певний висновок про природний зміст задачі Коші для ПДР (4).

2. Попередні відомості. Нехай $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел, $\mathbb{C}^l(Q)$ — клас усіх неперервно диференційовних до порядку l функцій на множині Q, $\mathbb{S}$ — простір Л. Шварца швидко спадних функцій з класу $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ [36], а $\Pi_Q:=\big\{(x;t): x\in\mathbb{R}^n, t\in Q\big\}$.

Позначимо через $\mathbb{H}^{l,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ сукупність усіх функцій $f\in\mathbb{C}^l(\mathbb{R}^n)$, обмежених на множині $\mathbb{R}^n$ разом зі своїми похідними, таких що старша похідна $\partial^l f(\cdot)$ є локально гельдеровою на $\mathbb{R}^n$

функцією порядку $\alpha \in (0;1]$, тобто такою, що для кожної компактної множини $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$ існує така додатна стала c, що для всіх $\{x, y\} \subset \mathbb{K}$ виконується нерівність

$$\left|\partial^l f(x) - \partial^l f(y)\right| \leq c|x-y|^\alpha.$$

Далі вважатимемо, що коефіцієнт $a_\beta(\cdot)$ локальної флуктуації гравітаційного поля є неперервно диференційовною функцією на відрізку $[0;T]$, такою що

$$\hat{a}_\beta(t) := a_\beta(t) - a_\beta(0) > 0 \quad \forall t \in (0;T]. \tag{8}$$

За таких умов безпосередньо з [32] випливає, що для всіх $\nu > 0$ функція $G_\nu(x;t)$ на множині $\Pi_{(0;T]}$ є диференційовною по t і нескінченно диференційовною за змінною x, причому для її похідних виконуються такі оцінки:

$$\left|\partial_x^k G_\nu(x;t)\right| \leq c_1 \hat{a}_\beta(t) \left(\left(\hat{a}_\beta(t)\right)^{1/\nu} + |x|\right)^{-n-|k|-\nu}, \tag{9}$$

$$\left|\partial_t \partial_x^k G_\nu(x;t)\right| \leq c_2 |a'_\beta(t)| \left(\left(\hat{a}_\beta(t)\right)^{1/\nu} + |x|\right)^{-n-|k|-\nu} \tag{10}$$

із додатними сталими c_1 і c_2.

Як вже було зазначено, оператором Рісса дробового диференціювання називають дробовий степінь оператора Лапласа, взятого зі знаком „мінус”: $A_\nu = (-\triangle)^{\nu/2}$. На елементах простору $\mathbb{S}$ цей оператор визначається рівністю

$$(-\triangle)^{\nu/2} f = \mathbb{F}^{-1}\left[|\xi|^\nu \mathbb{F}[f]\right]. \tag{11}$$

Однак класична форма дробового диференціювання (11) є малопридатною для розширення оператора A_ν на ширші класи функцій. Якщо врахувати відому формулу перетворення Фур'є згортки

$$\mathbb{F}[f * \varphi] = \mathbb{F}[f] \cdot \mathbb{F}[\varphi]$$

і покласти

$$\widetilde{\|\cdot\|}^\nu = \mathbb{F}^{-1}[|\xi|^\nu](\cdot),$$

то рівність (11) можна формалізувати до більш зручної для розширення форми:

$$(-\triangle)^{\nu/2} f = \widetilde{\|\cdot\|}^\nu * f. \tag{12}$$

Реалізація цієї схеми стала можливою завдяки появі теорії розподілів Шварца [37]. Саме тлумачачи оператор $\mathbb{F}^{-1}$ у сенсі узагальнених функцій, можна явно знайти $\widetilde{\|\cdot\|}^\nu$ [8]:

$$\widetilde{\|\cdot\|}^\nu = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\nu)} \begin{cases} |\cdot|^{-\nu-n}, & \nu + n + 2k \neq 0, \quad \nu \neq 2k, \\ |\cdot|^{-\nu-n} \ln |\cdot|^{-1}, & \nu + n + 2k = 0, \\ (-\triangle)^{\nu/2}\delta(\cdot), & \nu = 2k, \end{cases}$$

де $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака, а $\gamma_n(\nu)$ — спеціальний нормуючий множник. При $\mathrm{Re}\nu < 0$ функція $\widetilde{\|\cdot\|}^\nu$ є локально сумовною. Згортку з цією функцією називають потенціалом Рісса [8]

$$I^\nu f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\|x-y\|}^{\nu} f(y)dy, \tag{13}$$

а функцію $\widetilde{\|\cdot\|}^{\nu}$ — ядром Рісса. Вперше потенціал з ядром $|\cdot|^{-\nu-n}$, $\mathrm{Re}\nu < 0$, з'явився в дисертаційній роботі О. Фростмана [38], виконаній під керівництвом М. Рісса. Широке використання оператора I^ν починається з праць М. Рісса [1, 39]. Потенціали Рісса у просторах $L_p(\mathbb{R}^n)$ сумовних за Лебегом функцій досліджували С. Соболєв [40], G. Thorin [41] та ін.

У випадку $\mathrm{Re}\nu > 0$ інтеграл (13) має порядок особливості в точці x більший за розмірність простору $\mathbb{R}^n$. Такий інтеграл завжди розбігається, тому реалізація згортки (12) у вигляді (13) потребує коректного означення. Зміст інтегралу (13) можна надати шляхом його регуляризації, наприклад відніманням відрізка ряду Тейлора функції f або взяттям скінченної різниці f:

$$(-\triangle)^{\nu/2} f(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\nu)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\triangle_y^l f)(x)}{|y|^{n+\nu}} dy, \quad l > \nu. \tag{14}$$

Тут

$$(\triangle_y^l f)(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} f(x-ky)$$

— скінченна різниця функції f у точці x порядку l з кроком y, а $d_{n,l}(\nu)$ — спеціальний нормуючий множник, який вибирається так, щоб $(-\triangle)^{\nu/2}$ не залежав від l. Так визначений оператор $(-\triangle)^{\nu/2}$, $\mathrm{Re}\nu > 0$, у класичній літературі прийнято називати оператором Рісса дробового диференціювання порядку ν, який ми позначаємо символом A_ν.

У рамках просторів Лебега $L_p(\mathbb{R}^n)$ гіперсингулярний інтеграл (14) породжує обернений оператор до потенціалу Рісса I^ν. Реалізація дробового диференціювання Рісса $(-\triangle)^{\nu/2}$ у вигляді гіперсингулярного інтеграла при $0 < \nu < 2$ вперше з'явилась у праці І. Стейна [42]. Загальний випадок $0 < \nu$ розглядали П. Лізоркін [43] і С. Самко [44]. У [44] також проводилось дослідження нормуючих множників $d_{n,l}(\nu)$ як функцій параметра ν, з'ясовувалась збіжність гіперсингулярних інтегралів (14) на диференційовних функціях і можливість зниження порядку l скінченних різниць.

Наведемо зображення оператора A_ν у формі, більш зручній для наших досліджень. Для $\nu \in (0;2)$ на елементах f простору $\mathbb{S}$ означимо оператор $\hat{A}_\nu$ рівностями

$$(\hat{A}_\nu f)(x) = c(\nu) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(x+y) + [\nu]\big(y, \mathrm{grad} f(x)\big)}{|y|^{n+\nu}} dy, \quad \nu \neq 1, \tag{15}$$

і

$$(\hat{A}_1 f)(x) = c(1) \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x) - f(x+y)}{|y|^{n+1}} dy \tag{16}$$

з деяким ваговим співмножником $c(\nu)$. Стандартним способом [8], тобто дією оператора перетворення Фур'є $\mathbb{F}$ на праві частини рівностей (15) і (16), переконуємось у правильності рівності

$$\hat{A}_\nu f = A_\nu f \quad (\forall f \in \mathbb{S})$$

при

$$c(\nu) = \begin{cases} \dfrac{2^{\nu}\Gamma(1+\nu/2)\Gamma((n+\nu)/2)}{\pi^{n/2}\Gamma(\nu/2)\Gamma(1-\nu/2)}, & 0<\nu<1, \\ \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}, & \nu=1, \\ \dfrac{\nu\Gamma((3-\nu)/2)\Gamma((n+\nu)/2)}{\pi^{(n+1)/2}\Gamma(2-\nu)}, & 1<\nu<2 \end{cases} \tag{17}$$

(тут $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера).

Зазначимо, що інтеграл з рівності (15) збігається абсолютно, наприклад, для функцій із класу $\mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$ (тут $\{\cdot\}$ — дробова частина числа). Тому формула (15) дозволяє застосовувати оператор A_ν до функцій із ширших класів, ніж простір $\mathbb{S}$. При $\nu = 1$ рівність (16) також сприяє розширенню оператора A_ν, проте тут збіжність може бути лише умовною.

Означення 1. *Сукупність усіх визначених на* $\mathbb{R}^n$ *функцій* f, *для яких має зміст права частина зображення* (15) *або* (16) *із* $c(\nu)$, *що визначається рівністю* (17), *позначимо через* $\mathcal{D}(A_\nu)$ *і назвемо областю визначення відповідного оператора* A_ν.

Очевидно, що стала функція $f(x) \equiv C$ належить до множини $\mathcal{D}(A_\nu)$ при кожному $\nu \in \in (0;2)$, при цьому $A_\nu f = 0$.

Відомості про розширення оператора Рісса дробового диференціювання на ширші класи функцій, а також оцінки (9), (10) нам знадобляться при розв'язуванні задачі Коші для ПДР (4) з необмеженими початковими даними та дослідженні властивостей розв'язків цієї задачі.

3. Задача Коші. Нехай функція $f(\cdot)$ неперервна на множині $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ і така, що

$$|f(x)| \le \frac{c}{|x-x_0|^{\gamma}}, \quad 0 \le \gamma < n. \tag{18}$$

Для ПДР (4) розглянемо задачу Коші з початковою умовою

$$u(\cdot;t)\big|_{t=0} = f(\cdot). \tag{19}$$

Означення 2. *Розв'язком задачі Коші* (4), (19) *на множині* $\Pi_{(0;T]}$ *назвемо функцію* $u(x;t)$, *яка на цій множині диференційовна за змінною* t *і* $u(\cdot;t) \in \mathcal{D}(A_\nu)$, $t \in (0;T]$. *При цьому функція* u *на* $\Pi_{(0;T]}$ *задовольняє рівняння* (4) *у звичайному розумінні*, *а початкову умову* (19) *у сенсі поточкової границі*

$$u(x;t) \underset{t\to+0}{\longrightarrow} f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}. \tag{20}$$

Правильним є таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* $a_\beta(\cdot) \in \mathbb{C}^1\big([0;T]\big)$ *і виконується умова* (8). *Тоді функція*

$$u(x;t) = (f * G_\nu)(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{21}$$

є:

1) *на* $\mathbb{R}^n$ *нескінченно диференційовною за змінною* x *при фіксованому* $t \in (0;T]$ *і обмеженою разом з усіма своїми похідними*;

2) *на* $(0;T]$ *диференційовною по* t *при фіксованому* $x \in \mathbb{R}^n$.

При цьому виконуються рівності

$$\partial_x^k u(x;t) = (f * \partial_x^k G_\nu)(x;t), \qquad \partial_t u(x;t) = (f * \partial_t G_\nu)(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{22}$$

і при $\gamma \ne 0$ *справджується граничне співвідношення*

$$\lim_{|x|\to+\infty} u(x;t) = 0 \quad \forall t \in (0;T]. \tag{23}$$

Доведення. Зазначимо, що

$$(f * G_\nu)(x;t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) G_\nu(x-y;t)dy, \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Враховуючи оцінки (9) і (18), одержуємо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \partial_x^k G_\nu(x-y;t)dy \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{|y-x_0|<1} \big|f(y)\big| \big|\partial_{x-y}^k G_\nu(x-y;t)\big| dy + \int\limits_{|y-x_0|\geq 1} |f(y)||\partial_{x-y}^k G_\nu(x-y;t)| dy \leq$$

$$\leq \frac{c_k}{\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{n+|k|}} \int\limits_{|y-x_0|<1} \frac{dy}{|y-x_0|^\gamma} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{c_k \hat{a}_\beta(t) dy}{\Big(\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{1/\nu} + |x-y|\Big)^{n+|k|+\nu}} =$$

$$= \frac{\tilde{c}_k}{\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{n+|k|}} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{c_k \big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{-|k|/\nu} dz}{\big(1+|z|\big)^{n+|k|+\nu}} \equiv$$

$$\equiv \frac{\tilde{c}_k}{\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{n+|k|}} + \frac{\tilde{b}_k}{\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{|k|/\nu}} \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \forall (x;t) \in \Pi_{(0;T]}$$

(тут додатні величини $\tilde{c}_k$ і $\tilde{b}_k$ залежать лише від k).

Ці оцінки забезпечують виконання рівності

$$\partial_x^k (f * G_\nu)(x;t) = (f * \partial_x^k G_\nu)(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]},$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n$, тобто нескінченну диференційовність функції $u(x;t)$ за змінною x на множині $\Pi_{(0;T]}$ та обмеженість похідних $\partial_x^k u$.

Аналогічним способом переконуємось у диференційовності функції u за змінною t та виконанні другої рівності з (22).

Перейдемо до встановлення граничного співвідношення (23). Скористаємось оцінкою

$$\big|u(x;t)\big| \leq \int\limits_{|y-x_0|<1} \big|f(y) G_\nu(x-y;t)\big| dy + \int\limits_{|y-x_0|\geq 1} \big|f(y) G_\nu(x-y;t)\big| dy \equiv Z_1(x;t) + Z_2(x;t).$$

Оскільки при $|y-x_0|<1$ справджується співвідношення

$$|x-y| = \big|x-x_0-(y-x_0)\big| \geq |x-x_0| - 1,$$

то, враховуючи оцінки (9), (18), для всіх $t \in (0;T]$ і $|x| > |x_0|$ знаходимо

$$Z_1(x;t) \leq \int\limits_{|y-x_0|<1} \frac{c \hat{a}_\beta(t) dy}{|y-x_0|^\gamma |x-y|^{n+\nu}} \leq \frac{c \hat{a}_\beta(t)}{\big(|x-x_0|-1\big)^{n+\nu}} \int\limits_{|y-x_0|<1} \frac{dy}{|y-x_0|^\gamma} \underset{|x|\to+\infty}{\to} 0.$$

Покажемо тепер, що

$$\lim_{|x|\to+\infty} Z_2(x;t) = 0 \quad \forall t \in (0;T]. \tag{24}$$

Для $|y - x_0| \geq 1$ маємо

$$\frac{1}{|y-x_0|^\gamma} = \frac{|y-x_0+x_0|^\gamma}{|y-x_0|^\gamma}\frac{1}{|y|^\gamma} \leq \frac{2^\gamma(|y-x_0|^\gamma + |x_0|^\gamma)}{|y-x_0|^\gamma}\frac{1}{|y|^\gamma} \leq \frac{c_\gamma}{|y|^\gamma},$$

де $c_\gamma := 2^\gamma(1 + |x_0|^\gamma)$. Звідси знаходимо, що

$$Z_2(x;t) \leq \int\limits_{|y-x_0|\geq 1} \frac{cc_\gamma}{|y|^\gamma} G_\nu(x-y;t)dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{cc_\gamma}{|y|^\gamma} G_\nu(x-y;t)dy =$$

$$= cc_\gamma \left(\int\limits_{2|y|\geq|x|} \frac{G_\nu(x-y;t)}{|y|^\gamma}dy + \int\limits_{2|y|<|x|} \frac{G_\nu(x-y;t)}{|y|^\gamma}dy \right) \quad \forall (x;t) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Використовуючи тепер формулу

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\nu(x;t)dx = 1, \quad t \in (0;T], \tag{25}$$

отримуємо

$$\int\limits_{2|y|\geq|x|} \frac{G_\nu(x-y;t)}{|y|^\gamma}dy \leq \frac{2^\gamma}{|x|^\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\nu(z;t)dz \equiv \frac{2^\gamma}{|x|^\gamma} \underset{|x|\to+\infty}{\to} 0.$$

Далі, при $2|y| < |x|$ виконується нерівність

$$|x-y| \geq \big||x| - |y|\big| = |x|\big|1 - |y|/|x|\big| \geq |x|/2.$$

Тоді згідно з оцінкою (9)

$$\int\limits_{2|y|<|x|} \frac{G_\nu(x-y;t)}{|y|^\gamma}dy \leq \int\limits_{2|y|<|x|} \frac{c_1\hat{a}_\beta(t)dy}{|y|^\gamma|x-y|^{\nu/2}\left(\left(\hat{a}_\beta(t)\right)^{1/\nu} + |x-y|\right)^{n+\nu/2}} \leq$$

$$\leq c_1\frac{\sqrt{2^\nu}}{|x|^{\nu/2}}\int\limits_{2|y|<|x|} \frac{\hat{a}_\beta(t)dy}{|y|^\gamma\left(\left(\hat{a}_\beta(t)\right)^{1/\nu} + |x-y|\right)^{n+\nu/2}} \leq$$

$$\leq c_1\frac{\sqrt{2^\nu}}{|x|^{\nu/2}}\left(\int\limits_{2|y|<1} \frac{\left(\hat{a}_\beta(t)\right)^{1/2-n/\nu}dy}{|y|^\gamma} + \int\limits_{1\leq 2|y|<|x|} \frac{2^\gamma\hat{a}_\beta(t)dy}{\left(\left(\hat{a}_\beta(t)\right)^{1/\nu} + |x-y|\right)^{n+\nu/2}}\right) \leq$$

$$\leq c_1\frac{\sqrt{2^\nu}}{|x|^{\nu/2}}\left(\int\limits_{2|y|<1} \frac{\left(\hat{a}_\beta(t)\right)^{1/2-n/\nu}dy}{|y|^\gamma} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{2^\gamma\sqrt{\hat{a}_\beta(t)}dz}{(1+|z|^2)^{n+1/\nu}}\right) \underset{|x|\to+\infty}{\to} 0 \quad \forall t \in (0;T].$$

Таким чином, виконання граничного співвідношення (24) обґрунтовано.

Лему доведено.

Теорема 1. *Якщо для коефіцієнта* $a_\beta(\cdot)$ *виконується умова* (8) *і* $a_\beta(\cdot) \in \mathbb{C}^1\big([0;T]\big)$, *то розв'язок задачі Коші* (4), (19) *визначається формулою* (21).

Доведення. Безпосередньо з леми 1 та оцінок (9) фундаментального розв'язку G_ν випливають належність функції $u(\cdot;t)$ з (21) до області $\mathcal{D}(A_\nu)$ при кожному $\nu \in (0;2)$ і фіксованому $t \in (0;T]$, а також виконання рівності

$$A_\nu u(x;t) = (f * A_\nu G_\nu)(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}. \tag{26}$$

Функція G_ν — розв'язок рівняння (4), тому з рівності (26) і формули (22) знаходимо

$$A_\nu u(x;t) = -(f * \partial_t G_\nu)(x;t) = -\partial_t u(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Отже, на множині $\Pi_{(0;T]}$ класичний розв'язок ПДР (4) визначається рівністю (21).

Покажемо тепер, що цей розв'язок задовольняє початкову умову (19) у сенсі співвідношення (20).

Зафіксуємо довільно точку x з множини $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ і позначимо $r := |x - x_0|$. Згідно з формулою (25) маємо

$$\big|(f * G_\nu)(x;t) - f(x)\big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G_\nu(\xi;t)|\big|f(x-\xi) - f(x)\big|d\xi \equiv \Im(x;t).$$

Оскільки f — неперервна функція на $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $t_0 \in (0;r)$, що $t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}} < \varepsilon$ і $|f(x-\xi) - f(x)| < \varepsilon$, якщо $|\xi| < t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}$. Тоді

$$\Im(x;t) < \varepsilon \int\limits_{|\xi| < t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} \big|G_\nu(\xi;t)\big|d\xi + \int\limits_{|\xi| \ge t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} \big|G_\nu(\xi;t)\big|\big|f(x-\xi) - f(x)\big|d\xi \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{c_1 \hat{a}_\beta(t) d\xi}{\Big(\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{1/\nu} + |\xi|\Big)^{n+\nu}} + \int\limits_{|\xi| \ge t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} \big|G_\nu(\xi;t)\big|\big|f(x-\xi) - f(x)\big|d\xi \le$$

$$\le c_1 \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1+|z|)^{n+\nu}} + \Im_0(x;t) + \Im_1(x;t),$$

де

$$\Im_0(x;t) := |f(x)| \int\limits_{|\xi| \ge t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} |G_\nu(\xi;t)|d\xi, \quad \Im_1(x;t) := \int\limits_{|\xi| \ge t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} |G_\nu(\xi;t)||f(x-\xi)|d\xi,$$

а c_1 — стала з оцінки (9).

Далі, з огляду на оцінки (9) і (18) для $t \in (0;T]$ отримуємо

$$\Im_0(x;t) \le c_0 r^{-\gamma} \hat{a}_\beta(t) \int\limits_{|\xi| \ge t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} |\xi|^{-n-\nu} d\xi \equiv \nu \tilde{c}_1 \hat{a}_\beta(t) \int\limits_{t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}}^{+\infty} \rho^{-1-\nu} d\rho = \tilde{c}_1 \hat{a}_\beta(t) t_0^{-\frac{\nu}{2(n+\nu)}}. \tag{27}$$

Для оцінки інтеграла $\mathfrak{I}_1$ скористаємось зображенням

$$\mathfrak{I}_1(x;t) = \int\limits_{2r\geq|\xi|\geq t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} |G_\nu(\xi;t)||f(x-\xi)|d\xi + \int\limits_{|\xi|\geq 2r} |G_\nu(\xi;t)||f(x-\xi)|d\xi \equiv \mathfrak{I}_{11}(x;t)+\mathfrak{I}_{12}(x;t).$$

Знову враховуючи (9) і (18), для $t\in(0;T]$ одержуємо

$$\mathfrak{I}_{11}(x;t)\leq c \int\limits_{2r\geq|x-z|\geq t_0^{\frac{1}{2(n+\nu)}}} \frac{\hat{a}_\beta(t)}{\Big(\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{1/\nu}+|x-z|\Big)^{n+\nu}}\frac{dz}{|x_0-z|^\gamma}\leq$$

$$\leq c\hat{a}_\beta(t)t_0^{-\frac{n+\nu}{2(n+\nu)}} \int\limits_{2r\geq|x-z|}\frac{dz}{|x_0-z|^\gamma}\leq c\hat{a}_\beta(t)t_0^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{3r\geq|\xi|}|\xi|^{-\gamma}d\xi\equiv c_2\hat{a}_\beta(t)t_0^{-\frac{1}{2}}, \tag{28}$$

$$\mathfrak{I}_{12}(x;t)\leq c\int\limits_{|\xi|\geq 2r}\frac{\hat{a}_\beta(t)}{\Big(\big(\hat{a}_\beta(t)\big)^{1/\nu}+|\xi|\Big)^{n+\nu}}\frac{d\xi}{|x-x_0-\xi|^\gamma}\leq c\hat{a}_\beta(t)\int\limits_{|\xi|\geq 2r}\frac{d\xi}{|\xi|^{n+\nu}\big||\xi|-r\big|^\gamma}\leq$$

$$\leq\frac{c\hat{a}_\beta(t)}{r^\gamma}\int\limits_{|\xi|\geq 2r}|\xi|^{-n-\nu}d\xi\equiv c_3\hat{a}_\beta(t). \tag{29}$$

Зазначимо, що функція $\hat{a}_\beta(\cdot)$ на множині $(0;T]$ додатна, при цьому $a_\beta(\cdot)\in\mathbb{C}^1\big([0;T]\big)$, тому, згідно з теоремою Лагранжа про скінченні прирости,

$$\exists\delta>0\quad\forall t\in[0;T]:\quad \hat{a}_\beta(t)\equiv a_\beta(t)-a_\beta(0)\leq\delta t.$$

Звідси та з нерівностей (27)–(29) випливає, що для всіх $t\leq t_0$ виконується оцінка

$$\mathfrak{I}_0(x;t)+\mathfrak{I}_1(x;t)\leq\delta\left(\tilde{c}_1t_0^{\frac{2n+\nu}{2(n+\nu)}}+c_2t_0^{\frac{1}{2}}+c_3t_0\right)<\delta\Big(\tilde{c}_1\varepsilon^{2n+\nu}+c_2\varepsilon^{n+\nu}+c_3\varepsilon^{2(n+\nu)}\Big).$$

Отже,

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\{x_0\}\ \exists c>0\ \forall\varepsilon>0\ \exists t_0<\varepsilon^{2(n+\nu)}\ \forall t\leq t_0:\ \mathfrak{I}(x;t)<c(\varepsilon+\varepsilon^{n+\nu}+\varepsilon^{2n+\nu}+\varepsilon^{2(n+\nu)}),$$

тобто справджується граничне співвідношення (20).

Теорему доведено.

У наступному пункті з'ясуємо достатні умови єдиності розв'язку задачі Коші (4), (19).

4. Принцип екстремуму та його наслідки. Раніше ми припускали, що на множині $[0;T]$ коефіцієнт локальної флуктуації $a_\beta(\cdot)$ є неперервно диференційовною функцією, такою що виконується умова (8):

$$a_\beta(t)>a_\beta(0)\quad\forall t\in(0;T].$$

При виконанні цієї умови функція $a_\beta(\cdot)$ повинна зростати якщо не на всьому проміжку $(0;T]$, то хоча б на деякій його частині $(0;t_0)$, $t_0<T$. При цьому на $[t_0;T]$ функція $a_\beta(\cdot)$ може бути незростаючою. У цьому випадку маємо

$$a'_\beta(t_0)=0;\qquad a'_\beta(t)>0,\quad t\in(0;t_0);\qquad a'_\beta(t)\leq 0,\quad t\in[t_0;T].$$

Таку точку t_0 будемо називати ***точкою перевалу інтенсивності*** коефіцієнта локальної флуктуації $a_\beta(\cdot)$ на проміжку $(0;T]$. Множину $[t_1;t_2] \subset [0;T]$, на якій $a_\beta(\cdot)$ не спадає, тобто

$$a'_\beta(t) \geq 0, \quad t \in [t_1;t_2],$$

назвемо ***проміжком стабільної інтенсивності*** коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$. Говоритимемо, що множина $[t_1;t_2]$ — ***проміжок згасання інтенсивності*** коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$, якщо

$$a'_\beta(t) \leq 0, \quad t \in [t_1;t_2].$$

Очевидно, що якщо t_0 — перша точка перевалу інтенсивності $a_\beta(\cdot)$, то відрізок $[0;t_0]$ є проміжком стабільної інтенсивності цього коефіцієнта.

Правильним є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $[t_1;t_2] \subset [0;T]$, а u — розв'язок ПДР* (4), *такий що $u(\cdot;t) \in \mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, при $t \in [t_1;t_2]$. Тоді якщо $[t_1;t_2]$ — проміжок стабільної інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ і для u виконується граничне співвідношення* (23) *на $(t_1;t_2]$, то цей розв'язок на множині $\Pi_{[t_1;t_2]}$ зберігає знак, який він має в точці t_1. Якщо ж $[t_1;t_2]$ — проміжок згасання інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ і для u на $[t_1;t_2)$ виконується* (23), *то розв'язок u на $\Pi_{[t_1;t_2]}$ зберігає знак, який він має в точці t_2. При цьому якщо $u(x;t_1) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, у випадку, коли $[t_1;t_2]$ — проміжок стабільної інтенсивності, або $u(x;t_2) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, якщо $[t_1;t_2]$ — проміжок згасання інтенсивності, то $u(x;t) \equiv 0$ на $\Pi_{[t_1;t_2]}$.*

Доведення. Будемо використовувати позначення

$$Lw(x;t) := \partial_t w(x;t) + a'_\beta(t) A_\nu w(x;t).$$

Розглянемо спочатку випадок проміжку $[t_1;t_2]$ стабільної інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$. Нехай $u(x;t_1) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, і

$$\lambda = \inf_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t).$$

Скористаємось методом від протилежного. Припустимо, що $\lambda < 0$. Розглянемо допоміжну функцію

$$v_+(x;t) = u(x;t) + (t - t_1)\chi_+, \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]},$$

де χ_+ — фіксоване число, таке що $0 < \chi_+ < -\lambda/T$.

Очевидно, що на множині $\Pi_{(0;T]}$ функція v_+ диференційовна за змінною t і $v_+(\cdot;t) \in \in \mathcal{D}(A_\nu)$, а також $v_+(\cdot;t) \in \mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $t \in [t_1;t_2]$, до того ж

$$\inf_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} v_+(x;t) < 0.$$

Крім цього,

$$v_+(x;t_1) = u(x;t_1) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

і

$$v_+(x;t) \underset{|x|\to\infty}{\to} (t - t_1)\chi_+ > 0, \quad t \in (t_1;t_2]$$

(тут враховано виконання для u співвідношення (23)). З викладеного робимо висновок, що функція v_+ на множині $\Pi_{[t_1;t_2]}$ має від'ємний глобальний мінімум у деякій точці $(x_*;t_*)$, $t_1 < t_* \leq t_2$. Тоді обов'язково виконується нерівність

$$v_+(x_*;t_*) - v_+(x_* + y;t_*) \le 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

При цьому, згідно з необхідними умовами екстремуму гладкої функції, справджуються співвідношення

$$\partial_t v_+(x_*;t_*) = 0, \quad t_* < t_2; \qquad \partial_t v_+(x_*;t_*) \le 0, \quad t_* = t_2,$$

і

$$\mathrm{grad}_x v_+(x_*;t_*) \equiv \big(\partial_{x_1} v_+(x_*;t_*); \ldots ; \partial_{x_n} v_+(x_*;t_*)\big) = \vec{0}, \quad \nu \ge 1.$$

У зв'язку з цим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{v_+(x_*;t_*) - v_+(x_* + y;t_*) + [\nu]\big(y, \mathrm{grad}_x v_+(x_*;t_*)\big)}{|y|^{n+\nu}} dy \le 0$$

і

$$\int\limits_{|y|>\varepsilon} \frac{v_+(x_*;t_*) - v_+(x_* + y;t_*)}{|y|^{n+1}} dy \le 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Тоді згідно із зображеннями (15), (16)

$$A_\nu v_+(x_*;t_*) \le 0 \quad \forall \nu \in (0;2).$$

Тут при $\nu = 1$ ми припускаємо, що $\lim_{\varepsilon \to 0}$ в зображенні (16) зберігає знак в нерівностях. Звідси знаходимо

$$Lv_+(x_*;t_*) = \partial_t v_+(x_*;t_*) + a'_\beta(t_*) A_\nu v_+(x_*;t_*) = a'_\beta(t_*) A_\nu v_+(x_*;t_*) \le 0.$$

З іншого боку, для всіх $(x;t) \in \Pi_{(0;T]}$ маємо

$$Lv_+(x;t) = L\big(u(x;t) + (t - t_1)\chi_+\big) = Lu(x;t) + L((t - t_1)\chi_+) =$$
$$= L\big((t - t_1)\chi_+\big) = \chi_+ + (t - t_1) a'_\beta(t) A_\nu \chi_+ = \chi_+ > 0.$$

Прийшли до суперечності.

Отже, припущення, що $\lambda < 0$, є хибним. Тому $\lambda \ge 0$ і

$$u(x;t) \ge \lambda \ge 0, \quad (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]},$$

при цьому якщо $u(x;t_1) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, то і $\lambda = 0$, тобто

$$\inf_{(x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t) = 0. \tag{30}$$

У випадку $u(x;t_1) \le 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, діємо аналогічно. Припускаємо, що

$$\mu = \sup_{(x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t) > 0$$

і розглядаємо функцію

$$v_-(x;t) = u(x;t) - (t - t_1)\chi_-, \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}$$

(тут χ_- — фіксоване число, таке що $0 < \chi_- < \mu/T$). Тоді

$$\sup_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} v_-(x;t) > 0.$$

На множині $\Pi_{(0;T]}$ функція v_- також є диференційовною за змінною t і $v_-(\cdot;t) \in \mathcal{D}(A_\nu)$, причому $v_-(\cdot;t) \in \mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $t \in [t_1;t_2]$. Крім цього,

$$v_-(x;t_1) = u(x;t_1) \le 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

і

$$v_-(x;t) \underset{|x|\to\infty}{\to} (t_1-t)\chi_- < 0, \quad t \in (t_1;t_2],$$

тому v_- має додатний глобальний максимум на $\Pi_{[t_1;t_2]}$ в деякій точці $(x_*;t_*) \in \Pi_{(t_1;t_2]}$. При цьому

$$\partial_t v_-(x_*;t_*) = 0, \quad t_* < t_2; \qquad \partial_t v_-(x_*;t_*) \ge 0, \quad t_* = t_2,$$

і

$$\mathrm{grad}_x v_-(x_*;t_*) \equiv \big(\partial_{x_1} v_-(x_*;t_*);\ldots;\partial_{x_n} v_-(x_*;t_*)\big) = \vec{0}, \quad \nu \ge 1,$$

а також

$$v_-(x_*;t_*) - v_-(x_*+y;t_*) \ge 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді

$$A_\nu v_-(x_*;t_*) \ge 0 \quad \forall \nu \in (0;2).$$

Звідси знаходимо

$$Lv_-(x_*;t_*) = \partial_t v_-(x_*;t_*) + a'_\beta(t_*)A_\nu v_-(x_*;t_*) = a'_\beta(t_*)A_\nu v_-(x_*;t_*) \ge 0.$$

З іншого боку, маємо

$$Lv_-(x;t) = L\big(u(x;t) - (t-t_1)\chi_-\big) = Lu(x;t) - L((t-t_1)\chi_-) =$$
$$= -L((t-t_1)\chi_-) = -(\chi_- + (t-t_1)a'_\beta(t)A_\nu\chi_-) = -\chi_- < 0$$

для всіх $(x;t) \in \Pi_{(0;T]}$.

Отримана суперечність доводить, що $\mu \le 0$. У розглядуваному випадку це означає виконання співвідношення

$$u(x;t) \le \mu \le 0, \quad (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]}.$$

При цьому якщо $u(x;t_1) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$, то $\mu = 0$, тобто

$$\sup_{(x;t)\in\Pi_{[t_1;t_2]}} u(x;t) = 0.$$

Остання рівність у поєднанні з (30) забезпечують виконання тотожності

$$u(x;t) \equiv 0 \quad \forall (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]}$$

для $u(x;t_1) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$.

У випадку проміжку $[t_1; t_2]$ згасання інтенсивності коефіцієнта $a_\beta(\cdot)$ міркування проводяться аналогічно за допомогою відповідних функцій

$$v_\pm(x;t) = u(x;t) \pm (t_2 - t)\chi_\pm, \quad (x;t) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Теорему доведено.

Внаслідок лінійності оператора L ПДР (4) для розв'язків цього рівняння, які мають граничну поведінку (23) і щодо просторової змінної є елементами з класу $\mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, з теореми 2 безпосередньо випливає таке твердження.

***Наслідок* 1.** *На проміжку* $[t_1; t_2]$ *стабільної інтенсивності коефіцієнта* $a_\beta(\cdot)$:

1) *у точці* t_1 *розгалуження розв'язків відповідного ПДР* (4) *є неможливим, тобто на множині* $\Pi_{[t_1;t_2]}$ *не існує двох різних розв'язків* u_1 *і* u_2 *цього рівняння, таких що*

$$u_1(x;t_1) = u_2(x;t_1), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

2) *якщо розв'язки* u_1 *і* u_2 *рівняння* (4) *на гіперплощині* $t = t_1$ *мають різні значення, тобто*

$$u_1(x;t_1) < u_2(x;t_1), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$u_1(x;t) < u_2(x;t), \quad (x;t) \in \Pi_{[t_1;t_2]};$$

3) *задача Коші для рівняння* (4) *у класі* $\mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, *може мати не більше одного розв'язку, що прямує до нуля при* $|x| \to \infty$.

Звідси, враховуючи лему 1 і теорему 1, отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $T_0 = T$, *якщо коефіцієнт* $a_\beta(\cdot)$ *на інтервалі* $(0;T)$ *не має точки перевалу інтенсивності, інакше* $T_0 = t_0$, *де* t_0 — *перша точка перевалу інтенсивності* $a_\beta(\cdot)$. *Тоді на множині* $\Pi_{(0;T_0]}$ *задача Коші* (4), (19) *у класі* $\mathbb{H}^{[\nu],\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > \{\nu\}$, *має єдиний розв'язок. Він визначається формулою* (21) *і на* $\mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$ *зберігає знак початкової функції* f.

5. Приклад. Нехай

$$k_\alpha(\cdot) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} |\cdot|^{\alpha - n}$$

— ядро Рісса порядку α з ваговим коефіцієнтом

$$\gamma_n(\alpha) = 2^\alpha \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right),$$

тобто

$$k_\alpha(\cdot) \equiv \widetilde{\|\cdot\|}^{-\alpha}.$$

Розглянемо випадок, коли початкова функція $f(\cdot)$ — ядро $k_\alpha(\cdot)$:

$$f(\cdot) = k_\alpha(\cdot), \quad 0 < \alpha < n. \tag{31}$$

На достатньо „хороших" функціях $\varphi(\cdot)$ оператор $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ дробового інтегрування Рісса порядку α є потенціалом Рісса [8, с. 357]

$$(I^\alpha_x \varphi)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \equiv (-\Delta)^{-\alpha/2} \varphi(x),$$

для якого, очевидно, правильним є зображення

$$(I_x^{\alpha}\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} k_{\alpha}(x-y)\varphi(y)dy \equiv (k_{\alpha} * \varphi)(x).$$

Скористаємося тут цим фактом.

При зазначеному α для функції $f(\cdot)$ виконується умова (18) із $x_0 = 0$, тому, згідно з теоремою 3, єдиним розв'язком відповідної задачі Коші (4), (19) на множині $\Pi_{(0;T_0]}$ є функція

$$u(x;t) = (k_{\alpha} * G_{\nu})(x;t) \equiv (-\Delta)^{-\alpha/2} G_{\nu}(x;t), \tag{32}$$

яка разом з усіма своїми похідними є обмеженою, додатною і прямує до нуля при $|x| \to +\infty$.

Оскільки при $a_{\beta}(0) = 0$ фундаментальний розв'язок G_{ν} задачі Коші для рівняння (4) є щільністю W_{β} розподілу ймовірностей для сили F локальної взаємодії рухомих об'єктів системи, з рівності (32) випливає такий **природний зміст** задачі Коші (4), (19): *у випадку, коли для коефіцієнта локальної флуктуації виконується умова* $a_{\beta}(0) = 0$, *задача Коші* (4), (19) *з початковою функцією* (31) *є математичною моделлю перетворення оператором* $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ *випадкового процесу локальної взаємодії рухомих об'єктів у відповідному гравітаційному полі Рісса.*

Література

1. M. Riesz, *Potentiels de divers ordres et leurs fonctions de Green*, C. R. Congr. Intern. Math. Oslo, **2**, 62 – 63 (1936).
2. В. А. Літовченко, *Флуктуації Хольцмарка нестаціонарних гравітаційних полів*, Укр. мат. журн., **73**, № 1, 69 – 76 (2021); DOI: https://doi.org/10.37863/umzh.v73i1.6113.
3. P. Lévy, *Calcul des probabilities*, Gauthier-Villars, Paris (1925).
4. В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва (1983).
5. J. Holtsmark, *Über die Verbreiterung von Spektrallinier*, Ann. Phys., **58**, 577 – 630 (1919).
6. S. Chandrasekhar, *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Modern Phys., **15**, № 1, 1 – 89 (1943).
7. V. A. Litovchenko, *Pseudodifferential equation of fluctuations of nonstationary gravitational fields*, J. Math., **2021**, Article ID 6629780 (2021), 8 p.; https://doi.org/10.1155/2021/6629780.
8. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
9. Oliver Ibe, *Markov processes for stochastic modeling*, 2nd ed., Elsevier (2013); https://doi.org/10.1016/C2012-0-06106-6.
10. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск (2008).
11. N. Jacob, *Pseudo differential operators and Markov processes*, in 3 vols., Imperial College Press, London (2001, 2002, 2005).
12. J. Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Math., vol. 121, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).
13. D. Applebaum, *Lévy processes and stochastic calculus*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2009); https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781.
14. Т. А. Агекян, *Теория вероятностей для астрономов и физиков*, Наука, Москва (1974).
15. I. I. Sobel'man, *An introduction to the theory of atomic spectra*, Int. Ser. Natur. Phil., vol. 40 (1972); https://doi.org/10.1016/C2013-0-02394-8.
16. М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, Москва (1965).
17. А. Ф. Никифоров, В. Г. Новиков, В. Б. Уваров, *Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния*, Физматлит, Москва (2000).
18. C. Bucur, E. Valdinoci, *Non-local diffusion and applications*, Lec. Notes Unione Mat. Ital., **20** (2016); DOI: 10.1007/978-3-319-28739-3.
19. A. Reynolds, *Liberating Lévy walk research from the shackles of optimal foraging*, Phys. Life Rev., **14**, 59 – 83 (2015).
20. G. M. Viswanathan, V. Afanasyev, S. V. Buldyrev, S. Havlin, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, H. E. Stanley, *Lévy flights in random searches*, Phys. A, **282**, № 1-2, 1 – 12 (2000); https://doi.org/10.1016/S0378-4371(00)00071-6.

21. A. Friedman, *PDE problems arising in mathematical biology*, Netw. Heterog. Media, **7**, № 4, 691 – 703 (2012); DOI: 10.3934/nhm.2012.7.691.
22. E. Montefusco, B. Pellacci, G. Verzini, *Fractional diffusion with Neumann boundary conditions: the logistic equation*, Discrete and Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **18**, № 8, 2175 – 2202 (2013); DOI: 10.3934/dcdsb.2013.18.2175.
23. С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь, *Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений*, Приближенные методы математического анализа, 60 – 69 (1974).
24. Я. М. Дрінь, *Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій*, Доп. АН УРСР. Сер. А, № 1, 19 – 21 (1974).
25. С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь, *Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений*, Мат. исслед., вып. 63, 60 – 69 (1981).
26. М. В. Федорюк, *Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения*, Дифференц. уравнения, **14**, № 7, 1296 – 1301 (1978).
27. W. R. Schneider, *Stable distributions: Fox function representation and generalization*, Lect. Notes Phys., **262**, 497 – 511 (1986).
28. R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, *Some theorems on stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**, 263 – 273 (1960).
29. А. Н. Кочубей, *Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **52**, № 5, 909 – 934 (1988).
30. S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*, Birkhäuser, Basel (2004).
31. В. А. Літовченко, *Задача Коші з оператором Рісса дробового диференціювання*, Укр. мат. журн., **57**, № 12, 1653 – 1667 (2005).
32. В. А. Литовченко, *Задача Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных систем с негладкими символами*, Сиб. мат. журн, **49**, № 2, 375 – 394 (2008); https://doi.org/10.1007/s11202-008-0030-z.
33. V. Knopova, A. Kulik, *Parametrix construction of the transition probability density of the solution to an SDE driven by α-stable noise*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., **54**, № 1, 100 – 140 (2018); DOI: 10.1214/16-AIHP796.
34. V. P. Knopova, A. N. Kochubei, A. M. Kulik, *Parametrix methods for equations with fractional Laplacians*, vol. 2, Fractional differential equations, De Gruyter, Berlin, Boston (2019), p. 267 – 298; https://doi.org/10.1515/9783110571660-013.
35. Wei Liu, Renming Song, Longjie Xie, *Gradient estimates for the fundamental solution of Levy type operator*, Adv. Nonlinear Anal., **9**, № 1, 1453 – 1462 (2020); https://doi.org/10.1515/anona-2020-0062.
36. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
37. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1951).
38. O. Frostman, *Potentiel d'equilibre et capacité des ensembles avec quelques applications a la théorie des fonctions*, Medd. Lunds Univ. Mat. Sémin., **3**, 1 – 118 (1935).
39. M. Riesz, *Integrales de Riemann – Liouville et potentiels*, Acta Litt. Acad. Sci. Szeged, **9**, 1 – 42 (1938).
40. С. Л. Соболев, *Об одной теореме функционального анализа*, Мат. сб., **4**, № 3, 471 – 497 (1938).
41. G. Thorin, *Convexiti theorems*, Comm. Semin. Math. Univ. Lund. Uppsala, **9**, 1 – 57 (1948).
42. E. Stein, *The characterisation of functions arising as potentials*, Bull. Amer. Math. Soc., **67**, № 1, 102 – 104 (1961).
43. П. И. Лизоркин, *Описание пространств $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов*, Мат. сб., **81**, № 1, 79 – 91 (1970).
44. С. Г. Самко, *О пространствах риссовых потенциалов*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **40**, № 5, 1143 – 1172 (1976).

Одержано 18.08.21