DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6895

УДК 517.9

Л. А. Власенко, А. Г. Руткас (Харків. нац. ун-т радіоелектроніки),
А. О. Чикрій (Ін-т кібернетики НАН України, Київ)

ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІГРИ З НЕАТОМАРНИМ РІЗНИЦЕВИМ ОПЕРАТОРОМ

We study a differential game of approach in a system, which is dynamically described by a linear functional differential equation. The coefficients of the equation are closed linear operators on Hilbert spaces. The operator at the state derivative dependent on the current time is generally non-invertible. The main assumption is a restriction imposed on the characteristic operator pencil of the equation on a ray of the real positive semi-axis. Solutions of the equation are represented by a formula of variation of constants where the delay effect is taken into account by summing shift-type operators. To obtain conditions under which the dynamic vector of the system approaches a cylindrical terminal set, we use constraints on the support functionals of two sets defined by the behavior of pursuer and evader. In this paper, we also present an example of the differential game in a pseudoparabolic system described by a partial functional differential equation.

Вивчається диференціальна гра переслідування у системі, динаміка якої описується лінійним функціонально-диференціальним рівнянням. Коефіцієнти рівняння є замкненими лінійними операторами, що діють у гільбертових просторах. Оператор при похідній стану у поточний час є, взагалі кажучи, необоротним. Основне припущення полягає в обмеженні на характеристичну операторну в'язку рівняння на промені дійсної додатної півосі. Розв'язки рівняння зображуються за допомогою формули варіації сталих, де ефект запізнення враховується шляхом підсумовування операторів типу зсуву. Для отримання умов наближення динамічного вектора системи до циліндричної термінальної множини ми використовуємо обмеження на опорні функціонали двох множин, що визначаються поведінками переслідувача і втікача. Наведено приклад диференціальної гри в псевдопараболічній системі, що описується функціонально-диференціальним рівнянням з частинними похідними.

1. Вступ. Метою даної статті є вивчення диференціальної гри переслідування в системі, динаміка якої описується функціонально-диференціальним рівнянням у нескінченновимірних просторах. Зазначимо, що в монографії [1] було введено термін „диференціальна гра”, в новаторській роботі [2] розвивається теорія диференціальних ігор у нескінченновимірних просторах і розглянуто застосування цієї теорії до ігор з рівняннями з частинними похідними, а в монографіях [3, 4] наведено відповідну бібліографію. Зокрема, у роботах [5 – 7] досліджувались диференціальні ігри переслідування для систем, еволюція яких описується функціонально-диференціальними рівняннями з атомарним різницевим оператором у скінченновимірних просторах. Математичні моделі деяких фізичних процесів містять диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної за часом. Диференціальні ігри для цих систем у скінченновимірних просторах називають дескрипторними іграми [8].

Ми досліджуємо диференціальну гру між переслідувачем з керуванням $u(t)$ і втікачем з керуванням $v(t)$ у динамічній системі з лінійним функціонально-диференціальним рівнянням у гільбертових просторах

$$\frac{d}{dt}[Ay(t)] + By(t) = \int_{-h}^{0} d\eta(\tau)y(\tau + t) + f(t) + K_1u(t) + K_2v(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

де $\eta(\tau)$ — міра Стільтьєса вигляду

$$\eta(\tau) = -\sum_{r=1}^{n} \chi_{(-\infty,-h_r]}(\tau) B_r, \tag{2}$$

$0 < h_1 < \ldots < h_n = h$ — запізнення, $\chi_{(-\infty,-h_r]}(\tau)$ — характеристична функція півнескінченного інтервалу $(-\infty, -h_r]$. Доданок, що відповідає запізненню в (1), записується у вигляді

$$\int_{-h}^{0} d\eta(\tau) y(t+\tau) = \sum_{r=1}^{n} B_r y(t-h_r).$$

Неявне рівняння вигляду (1), що не розв'язне відносно похідної, називають функціонально-диференціальним рівнянням типу Соболєва [9]. Рівняння (1) можна записати у вигляді функціонально-диференціального рівняння нейтрального типу [10] (розділ 2.7)

$$\frac{d}{dt} D y_t = f_0(t, y_t),$$

де символ y_t позначає функцію $y_t(\tau) = y(t+\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$, різницевий оператор D визначено на функціях $\phi(\tau)$ як $D\phi = A\phi(0)$, $f_0(t, \phi)$ — відображення вигляду

$$f_0(t, \phi) = -B\phi(0) + \int_{-h}^{0} d\eta(\tau)\phi(\tau) + f(t) + K_1 u(t) + K_2 v(t).$$

Якщо оператор A є виродженим чи необоротним, різницевий оператор D не є атомарним у нулі (див. означення в [10], розділ 2.5). Такі рівняння зустрічаються у математичних моделях перехідних процесів у мікрохвильових пристроях з лініями передачі [11].

Будемо використовувати такі позначення: Y, Z, U і V — дійсні гільбертові простори; $\|\cdot\|$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — норма і скалярний добуток (індекс $\|\cdot\|_Y$ чи $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y$ буде додано, щоб уникнути двозначності); $\mathcal{L}(Y, Z)$ — простір обмежених лінійних операторів з Y в Z, $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y, Y)$; $L_2(0, T; Y)$ — простір Y-значних функцій, що інтегровні за Бохнером з квадратом норми на $[0, T]$; $W_2^k(0, T; Y)$ — простір Соболєва функцій з $L_2(0, T; Y)$, в яких узагальнені похідні до порядку k належать $L_2(0, T; Y)$; $C\big([0, T], Z\big)$ — клас Z-значних функцій, що неперервні на $[0, T]$; $\mathrm{Ker} A$ — ядро оператора A; $\mathrm{Im}\, A$ — образ оператора A; A^* — оператор, спряжений до оператора A; риска над множиною чи оператором позначає замикання множини чи оператора; E та 0 — тотожний і нульовий оператори. Функції з $W_2^1(0, T; Y)$ вважаються неперервними на $[0, T]$ (при необхідності можна змінити їхні значення на множині нульової міри).

Щодо рівняння (1) ми припускаємо, що A та B — замкнені оператори, що діють з Y у Z з областями визначення D_A та D_B, $D = D_A \cap D_B \neq \{0\}$; $B_r \in \mathcal{L}(Y, Z)$, $K_1 \in \mathcal{L}(U, Z)$, $K_2 \in \mathcal{L}(V, Z)$; $f(t) \in L_2(0, T; Z)$; керування $u(t)$ та $v(t)$ переслідувача та втікача — сильно вимірні вектор-функції зі значеннями в областях керування U_0 та V_0, що є замкненими опуклими обмеженими множинами у просторах U та V. Ці керування називають *допустимими керуваннями переслідувача та втікача*. Позначимо через U_1 і V_1 множини допустимих керувань переслідувача та втікача. Множини U_1 і V_1 задовольняють такі вкладення: $U_1 \subset L_2(0, T; U)$, $V_1 \subset L_2(0, T; V)$. Зауважимо, що опуклі обмежені множини U_1 та V_1 слабко компактні у гільбертових просторах $L_2(0, T; U)$ та $L_2(0, T; V)$ (див. [12], розділи 2.9, 2.10).

Опишемо коротко будову статті. У пункті 2 наведено основні припущення й одержано формулу варіації сталих, щоб описати розв'язки рівняння (1). У пункті 3 ми вивчаємо диференціальну гру зближення у системі, динаміка якої описується рівнянням (1). Вказано умови досягнення термінальної множини динамічним вектором системи $Ay(t)$. У пункті 4 ми використовуємо результати пункту 3, щоб дослідити гру у конфліктно керованій системі, динаміка якої описується функціонально-диференціальним рівнянням з частинними похідними з неатомарним різницевим оператором.

2. Розв'язність початкової задачі. Початкові умови для рівняння (1) задаються у вигляді

$$y(t) = y_0(t), \quad t \in [-h, 0], \tag{3}$$

$$(Ay)(+0) = z_0, \tag{4}$$

де $y_0(t) \in L_2(-h, 0; Y)$. Функція $y(t) \in L_2\big([-h, T], Y\big)$ називається розв'язком задачі (1), (3), (4) на $[-h, T]$, якщо виконано такі умови: $y(t) \in D$ для майже всіх $t \in [0, T]$, $Ay(t) \in \in W_2^1\big([0, T], Z\big)$, $By(t) \in L_2\big([0, T], Z\big)$, $y(t)$ задовольняє рівняння (1) майже для всіх $t \in [0, T]$ та початкову умову (3) майже для всіх $t \in [-h, 0]$, виконується співвідношення (4).

Операторна в'язка $\lambda A + B$ істотно впливає на динаміку рівняння (1). Щоб встановити умови розв'язності задачі (1), (3), (4), ми здійснюємо прямі розклади прообразу $D = D_A \cap D_B$ та образу Z в'язки, відносно яких рівняння розщеплюється на динамічну та функціональну складові. Основне припущення щодо в'язки $\lambda A + B$ полягає в наступному: резольвента в'язки $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(Z, Y)$ існує на промені $\lambda > \omega \geq 0$ і виконуються оцінки

$$\big\|(AR(\lambda))^m\big\| \leq M(\lambda - \omega)^{-m}, \qquad \lambda > \omega \geq 0, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Обмеження (5) для $m = 1$ дозволяє використати ергодичні теореми Хіллє [13] (глава VIII, розділ 4) для псевдорезольвенти $AR(\lambda)$ у гільбертовому просторі Z і застосувати лему 1 [14]. Мають місце такі прямі розклади:

$$Z = Z_1 \dot{+} Z_2, \qquad Z_1 = \overline{\operatorname{Im} AR(\lambda)} = \overline{AD}, \qquad Z_2 = B(\operatorname{Ker} A \cap D),$$

$$D = D_A \cap D_B = D_1 \dot{+} D_2, \qquad D_1 = (\lambda A + B)^{-1} Z_1, \qquad D_2 = \operatorname{Ker} A \cap D,$$

де множина D_1 не залежить від $\lambda > \omega$. Позначимо через P_1, P_2 і Q_1, Q_2 пари взаємно додаткових проєкторів у Y на D_1, D_2 і у Z на Z_1, Z_2 відповідно; Q_1, $Q_2 \in \mathcal{L}(Z)$. Оператор

$$G = A + BP_2 = A + Q_2 B \colon D \to Y, \qquad D_G = D, \tag{6}$$

переводить D_j, у Z_j $j = 1, 2$, і має обернений оператор G^{-1}, що визначений на $AD \dot{+} Z_2$ та задовольняє властивості

$$G^{-1} Q_2 \in \mathcal{L}(Y, Z), \quad BG^{-1} Q_2 = Q_2 \in \mathcal{L}(Z).$$

Оператор

$$W = -Q_1 B G^{-1} = -B G^{-1} Q_1, \qquad D_W = AD \dot{+} Z_2$$

має резольвенту

$$R_W(\lambda) = (W - \lambda E)^{-1} = -AR(\lambda) - \frac{1}{\lambda} Q_2, \quad \lambda > \omega.$$

З оцінок (5) випливають оцінки

$$\left\| R_W^m(\lambda) \right\| \le M_1(\lambda-\omega)^{-m}, \qquad \lambda>\omega, \quad m=1,2,\ldots .$$

З теореми про генератори [15] (глава 1, теорема 5.3) випливає, що оператор W є твірним оператором або генератором сильно неперервної півгрупи $U(t)$, що задовольняє властивість

$$\left\| U(t) \right\| \le M_1 e^{\omega t}, \quad t\ge 0.$$

Далі ми припускаємо, що оператор G^{-1}, обернений до оператора G (6), є обмеженим у своїй області визначення $AD\dot{+}Z_2$. Одержимо формулу варіації сталих для початкової задачі (1), (3), (4). Для цього введемо у розгляд обмежені лінійні оператори L із $L_2(0,T;Z)$ у $L_2(-h,T;Y)$ та F із $L_2(-h,T;Y)$ у $L_2(0,T;Z)$:

$$(Lz)(t)=\chi_{[0,T]}(t)\overline{G^{-1}}\left[\int_0^t U(t-s)Q_1z(s)ds+Q_2z(t)\right], \qquad (Fz)(t)=\int_{-h}^0 d\eta(\tau)z(\tau+t). \quad (7)$$

Оператор зсуву F було введено в [16] (глава III, розділ 18.1) при вивченні задачі керування для системи із запізненням. Доповнимо функцію $y_0(t)$ нулем для значень аргументу $t\in(0,T]$. Тоді $y_0(t)\in L_2(-h,T;Y)$. Покладемо

$$w(t)=\chi_{[-h,0]}(t)y_0(t)+\chi_{[0,T]}(t)\overline{G^{-1}}U(t)z_0, \quad w(t)\in L_2(-h,T;Y).$$

Теорема 1. *Нехай резольвента в'язки $R(\lambda)=(\lambda A+B)^{-1}\in\mathcal{L}(Z,Y)$ існує на промені $\lambda>\omega\ge 0$, оцінка* (5) *виконується, оператор G^{-1}, обернений до оператора G* (6), *є обмеженим у своїй області визначення. Також припустимо, що початкова функція $y_0(t)$ в* (3), *початковий вектор z_0 в* (4), *оператори B_r, $r=1,\ldots,n$, в* (2), *функція $f(t)$, керування $u(t),v(t)$ та оператори K_1,K_2 у правій частині рівняння* (1) *задовольняють такі обмеження*: $y_0(t)\in L_2(-h,0;Y)$, $z_0\in AD$, $\operatorname{Im} Q_1B_r\subset AD$, $Q_1f(t)\in AD$ *майже для всіх* $t\in[0,T]$, $f(t)\in L_2(0,T;Z)$, $u(t)\in L_2(0,T;U)$, $v(t)\in L_2(0,T;V)$, $BG^{-1}Q_1f(t)\in L_2(0,T;Z)$, $\operatorname{Im} Q_1K_1\subset AD$, $\operatorname{Im} Q_1K_2\subset AD$. *Тоді початкова задача* (1), (3), (4) *має єдиний розв'язок $y(t)$, який як функція $y\in L_2(-h,T;Y)$ допускає зображення*

$$y=\sum_{k=0}^{N-1}(LF)^k\big[w+L(f+K_1u+K_2v)\big]+(LF)^Ny_0, \quad N=\min\{j\in\boldsymbol{N}\colon T\le jh_1\}. \quad (8)$$

Доведення. Покладемо

$$\varphi(t)=\int_{-h}^0 d\eta(\tau)y(\tau+t)+f(t)+K_1u(t)+K_2v(t) \quad (9)$$

і запишемо рівняння (1) у вигляді

$$\frac{d}{dt}\big[Ay(t)\big]+By(t)=\varphi(t). \quad (10)$$

Застосовуючи проєктори $Q_1,\ Q_2$ до лівої та правої частин рівняння (10) і позначаючи

$$z(t) = Ay(t), \qquad \varphi_1(t) = Q_1\varphi(t),$$

одержуємо еквівалентну систему рівнянь

$$z'(t) = Wz(t) + \varphi_1(t), \qquad Q_2By(t) = Q_2\varphi(t). \tag{11}$$

Нехай

$$t_j = jh_1, \qquad j = 0, \ldots, N-1, \quad t_{N-1} < T, \quad t_N = T,$$

$$y_j = w + L[f + K_1u + K_2v + Fy_{j-1}], \qquad y_j \in L_2(-h, T; Y), \quad j = 1, \ldots, N. \tag{12}$$

Ми можемо визначити функцію $\varphi(t)$ (9) на $[t_0, t_1]$ як $\varphi(t) = (Fy_0)(t) + f(t) + K_1u(t) + K_2v(t) \in L_2(t_0, t_1; Z)$. Очевидно, що $\varphi_1(t) = Q_1\varphi(t) \in L_2(0, t_1; Z)$ і $\varphi_1(t) \in AD \subset D_W$. Внаслідок результатів [15] (глава 4, теорема 2.9) на інтервалі $[0, t_1]$ існує єдиний розв'язок $z(t) \in W_2^1(0, t_1; Z)$ першого з рівнянь (11), що задовольняє початкову умову $z(0) = z_0$. Цей розв'язок має вигляд

$$z(t) = U(t)z_0 + \int\limits_0^t U(t-s)\varphi_1(s)ds.$$

Тоді функція

$$y(t) = P_1y(t) + P_2y(t) = G^{-1}\big[z(t) + Q_2\varphi(t)\big] =$$

$$= G^{-1}\left[U(t)z_0 + \int\limits_0^t U(t-s)Q_1\varphi(s)ds + Q_2\varphi(t)\right] \tag{13}$$

є єдиним розв'язком задачі (10), (4) на $[0, t_1]$ таким, що $y(t) \in L_2(0, t_1; Y)$, $Ay(t) \in W_2^1(0, t_1; Z)$ і рівняння (10) задовольняється майже для всіх $t \in [0, t_1]$. Отже, існує єдиний розв'язок задачі (1), (3), (4) на інтервалі $[-h, t_1]$ і цей розв'язок збігається з $y_1(t)$ (12) для $t \in [-h, t_1]$. При $N = 1$ теорему доведено.

Якщо $N > 1$, то ми визначаємо функцію $\varphi(t)$ (9) на $[0, t_2]$: $\varphi(t) = (Fy_1)(t) + f(t) + K_1u(t) + K_2v(t)$, $\varphi(t) \in L_2(t_0, t_2; Z)$. Функція $y(t)$ (13) є єдиним розв'язком задачі (10), (4) на інтервалі $[0, t_2]$, а $y_2(t)$ (12), $-h \le t \le t_2$, — єдиним розв'язком задачі (1), (3), (4) на $[-h, t_2]$. Якщо $N = 2$, то теорему доведено. В противному разі, повторюючи ці міркування для $j = 3, \ldots, N$, ми однозначно знаходимо розв'язок задачі (1), (3), (4) на $[-h, t_j]$ у вигляді $y_j(t)$ (12), $-h \le t \le t_j$.

Із співвідношень (12) випливає, що функція $y_N(t)$ $\big($розв'язок задачі (1), (3), (4) на $[-h, T]\big)$ допускає зображення у вигляді (8).

Теорему 1 доведено.

Інший метод дослідження рівняння (1) можна запропонувати, якщо вивчати його у вигляді операторного рівняння

$$\mathcal{S}y = \varphi$$

з оператором $\mathcal{S}$ і функцією φ вигляду

$$\mathcal{S}y = \frac{d}{dt}[Ay] + By - \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\tau)y(\tau + t), \qquad \varphi = f + K_1u + K_2v.$$

Різні умови розв'язності операторних рівнянь розглянуто в [17].

3. Функціонально-диференціальна гра. Сформулюємо ігрову задачу для неявної системи із запізненням (1), (3), (4), припустивши, що умови теореми 1 виконано. Для допустимих керувань $u(t)$ і $v(t)$ розглядаємо єдиний розв'язок $y(t) = y(t;u,v)$ (8) задачі (1), (3), (4). Скажемо, що *гру у системі* (1), (3), (4) *можна завершити у момент часу* θ $(0 < \theta \leq T)$, якщо для будь-якого допустимого керування втікача $v(t)$ завжди знайдеться відповідне допустиме керування переслідувача $u(t)$ таке, що $\|\Pi Ay(\theta;u,v)\| \leq d$, де Π — ортогональний проєктор у просторі Z і d — невід'ємна стала. Термінальна множина $\mathcal{M}$, на яку необхідно перевести динамічний вектор $Ay(t)$ у момент часу θ, має циліндричний вигляд

$$\mathcal{M} = (E - \Pi)Z \oplus \mathcal{B}_d,$$

де $\mathcal{B}_d$ — d-окіл нуля у підпросторі ΠZ. У цій постановці ігрової задачі ми накладаємо термінальне обмеження не на стан $y(t)$, як у [3, 18], а на функцію $Ay(t)$. Як зазначено в [19, 20], для неявної системи динамічний вектор задається не станом $y(t)$, а функцією $Ay(t)$, яка міститься в рівнянні (1) під знаком похідної і для якої формулюється початкова умова (4).

Покладемо

$$\Phi = \sum_{k=0}^{N-1} (FL)^k, \qquad \xi = \sum_{k=0}^{N-1} (LF)^k (w + Lf) + (LF)^N y_0, \quad \zeta = \Pi A\xi, \tag{14}$$

де оператори L, F визначені в (7). Використовуючи співвідношення (8), отримуємо зображення динамічного вектора $Ay(t;u,v)$ системи (1), (3), (4):

$$Ay(t;u,v) = \int_0^t U(t-s)Q_1(\Phi K_1 u)(s)ds + \int_0^t U(t-s)Q_1(\Phi K_2 v)(s)ds + A\xi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Зауважимо, що $Q_1(\Phi K_1 u)(s) \subset AD$ і $Q_1(\Phi K_2 v)(s) \subset AD$.

Для заданого числа $\theta \in [0,T]$ введемо обмежені лінійні оператори $\Phi_1 = \Phi_1(\theta) \in$ $\in \mathcal{L}(L_2(0,T;U),Z)$ і $\Phi_2 = \Phi_2(\theta) \in \mathcal{L}\big(L_2(0,T;V),Z\big)$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta)u &= \Pi \int_0^\theta U(\theta - s)Q_1(\Phi K_1 u)(s)ds, \\ \Phi_2(\theta)v &= \Pi \int_0^\theta U(\theta - s)Q_1(\Phi K_2 v)(s)ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Має місце співвідношення

$$\big\langle q, \Pi Ay(\theta;u,v)\big\rangle = \big\langle q, \Phi_1(\theta)u\big\rangle + \big\langle q, \Phi_2(\theta)v\big\rangle + \big\langle q, \zeta(\theta)\big\rangle. \tag{17}$$

Розглянемо опуклі замкнені обмежені множини

$$\Omega_U = \Phi_1 U_1 \subset Z, \qquad \Omega_V = \Phi_2 V_1 \subset Z$$

та їхні опорні функціонали

$$\varphi_U(q) = \varphi_U(q,\theta) = \sup_{u\in U_1} \big\langle q, \Phi_1 u\big\rangle, \qquad \varphi_V(q) = \varphi_V(q,\theta) = \sup_{v\in V_1} \big\langle q, \Phi_2 v\big\rangle, \quad q \in Z. \tag{18}$$

Нехай

$$p(q,\theta) = \varphi_V(q,\theta) - \varphi_U(-q,\theta) + \big\langle q, \zeta(\theta)\big\rangle, \qquad q \in Z, \quad \theta \in [0,T]. \tag{19}$$

Використовуючи рівність $\varphi_U(-h) = -\inf_{u\in U_1}\big\langle h, \Phi_1 u\big\rangle$ і співвідношення (17), одержуємо

$$p(q,\theta) = \sup_{v\in V_1} \inf_{u\in U_1} \langle q, \Pi A y(\theta; u, v)\rangle = \inf_{u\in U_1} \sup_{v\in V_1} \langle q, \Pi A y(\theta; u, v)\rangle, \quad q \in Z.$$

Справедливим є таке твердження.

Твердження 1. *Якщо виконуються умови теореми* 1, *то опорні функціонали* $\varphi_U(q,\theta)$, $\varphi_V(q,\theta)$ (18) *та функція* $p(q,\theta)$ (19) *неперервні за сукупністю змінних* $(q,\theta) \in Z \times [0,T]$.

Доведення. Щоб довести неперервність за сукупністю змінних опорних функціоналів (18), ми повинні показати, що для довільної послідовності $\big\{(q_m,\theta_m)\big\}_{m=1}^{\infty} \subset Z\times[0,T]$, яка збігається до $(q_0,\theta_0) \in Z \times [0,T]$, існують такі границі:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_U(q_m,\theta_m) = \varphi_U(q_0,\theta_0), \qquad \lim_{m\to\infty} \varphi_V(q_m,\theta_m) = \varphi_V(q_0,\theta_0). \tag{20}$$

Із слабкої компактності U_1, V_1 випливає, що точна верхня межа в означеннях опорних функціоналів (18) досягається. Отже, існують відображення $\psi_U(q,\theta)\colon Z \times [0,T] \to U_1$ і $\psi_V(q,\theta)\colon Z \times [0,T] \to V_1$ такі, що

$$\varphi_U(q,\theta) = \big\langle q, \Phi_1(\theta)\psi_U(q,\theta)\big\rangle, \qquad \varphi_V(q,\theta) = \big\langle q, \Phi_2(\theta)\psi_V(q,\theta)\big\rangle. \tag{21}$$

Згідно з означенням φ_U в (18) та зображенням φ_U в (21) одержуємо нерівності

$$\begin{aligned} a_m \doteq \big\langle q_m, \Phi_1(\theta_m)\psi_U(q_0,\theta_0)\big\rangle - \big\langle q_0, \Phi_1(\theta_0)\psi_U(q_0,\theta_0)\big\rangle \le \varphi_U(q_m,\theta_m) - \varphi_U(q_0,\theta_0) \le \\ \le b_m \doteq \big\langle q_m, \Phi_1(\theta_m)\psi_U(q_m,\theta_m)\big\rangle - \big\langle q_0, \Phi_1(\theta_0)\psi_U(q_m,\theta_m)\big\rangle. \end{aligned} \tag{22}$$

Оскільки $\Phi_1(\theta)$ (16) є сильно неперервною оператор-функцією за змінною $\theta \in [0,T]$, то неважко бачити, що $a_m \to 0$ при $m \to \infty$. Значення b_m обчислюються за формулою

$$b_m = \int\limits_{\theta_0}^{\theta_m} \big\langle q_m, \Pi U(\theta_m - s) g_m(s)\big\rangle ds + \int\limits_{0}^{\theta_0} \big\langle q_m - q_0, \Pi U(\theta_m - s) g_m(s)\big\rangle ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\theta_0} \big\langle [U^*(\theta_m - s) - U^*(\theta_0 - s)]\Pi q_0, g_m(s)\big\rangle ds, \quad g_m(s) = (\Phi K_1 \psi_U(q_m,\theta_m))(s),$$

де $U^*(t)$ — сильно неперервна півгрупа, що є спряженою до $U(t)$ і має генератор W^* [15] (розділ 1.10, наслідок 10.6). Звідси випливає, що $b_m \to 0$ при $m \to \infty$. Отже, перша границя в (20) випливає з нерівності (22).

Другу границю в (20) можна встановити аналогічним чином. Тоді $\varphi_U(q,\theta)$ і $\varphi_V(q,\theta)$ (18) є неперервними за сукупністю змінних $(q,\theta) \in Z \times [0,T]$.

На підставі означення ζ (14) одержуємо $\zeta(\theta) \in C\big([0,T], Z\big)$. Отже, $p(q,\theta)$ (19) є неперервною за сукупністю змінних $(q,\theta) \in Z \times [0,T]$.

Твердження доведено.

Тепер можна встановити умови для завершення гри у момент часу θ.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі припущення*: *резольвента в'язки* $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ *існує на промені* $\lambda > \omega \geq 0$, *задовольняється оцінка* (5), *оператор* G^{-1}, *обернений до оператора* G (6), *є обмеженим у своїй області визначення,* $y_0(t) \in L_2(-h, 0; Y)$, $z_0 \in AD$, $\operatorname{Im} Q_1 B_r \subset AD$, $r = 1, \ldots, n$, $Q_1 f(t) \in AD$ *майже для всіх* $t \in [0, T]$, $f(t) \in L_2(0, T; Z)$, $BG^{-1} Q_1 f(t) \in L_2(0, T; Z)$, $\operatorname{Im} Q_1 K_1 \subset AD$, $\operatorname{Im} Q_1 K_2 \subset AD$. *Гру у системі* (1), (3), (4) *можна завершити у момент часу* θ *тоді й лише тоді*, *коли функція* $p(q, \theta)$ (19) *задовольняє співвідношення*

$$p(q, \theta) \leq d, \qquad \forall q \in Z: \ \|q\| = 1. \tag{23}$$

Доведення. *Необхідність.* Припустимо супротивне: нехай θ — час завершення гри, але існує вектор q з одиничною нормою $\|q\| = 1$ такий, що

$$p(q, \theta) > d. \tag{24}$$

Оскільки V_1 — слабко компактна множина у гільбертовому просторі $L_2(0, T; V)$, то точна верхня межа в означенні $\varphi_V(q)$ (18) досягається і $\varphi_V(h) = \big\langle q, \Phi_2 v_0 \big\rangle$ для $v_0 \in V_1$. Враховуючи (17), (18) і (24), отримуємо

$$d < \big\langle q, \Phi_1 u + \Phi_2 v_0 + \zeta(\theta) \big\rangle = \big\langle q, \Pi A y(\theta; u, v_0) \big\rangle, \quad \forall q \in Z: \|q\| = 1, \quad \forall u \in U_1.$$

Звідси випливає, що існує допустиме керування втікача $v_0 \in V_1$ таке, що

$$\big\| \Pi A y(\theta; u, v_0) \big\| > d \tag{25}$$

для кожного допустимого керування переслідувача $u \in U_1$. Це суперечить тому, що θ — час завершення гри. Необхідність доведено.

Достатність. Припустимо супротивне: існує допустиме керування втікача $v_0 \in V_1$ таке, що виконується нерівність (25) для будь-якого допустимого керування переслідувача $u \in U_1$. Неперервний опуклий функціонал $\varphi(u) = \big\| \Pi A y(\theta; u, v_0) \big\|$, що визначений у гільбертовому просторі $L_2(0, T; U_1)$, досягає мінімуму в опуклій замкненій обмеженій множині U_1 (див. [21], глава 1, теорема 1.8). Отже, існує таке $\varepsilon > 0$, що $\min_{u \in U_1} \varphi(u) > d + \varepsilon$. Використовуючи зображення (15) для $t = \theta$ і $v = v_0$, переконуємось, що у просторі Z опукла множина $\Omega = \Omega_U + \Phi_2 v_0 + \zeta(\theta)$ і замкнена куля $S_{d+\varepsilon}$ радіуса $d + \varepsilon$ з центром у нулі не перетинаються. З теореми віддільності [12] (розділ 2.6) робимо висновок, що існує вектор $q \in Z$ одиничної норми, для якого $\sup_{z \in S_{d+\varepsilon}} \big\langle q, z \big\rangle \leq \inf_{\omega \in \Omega} \big\langle q, \omega \big\rangle$. Отже,

$$d < \inf_{u \in U_1} \big\langle q, \Pi A y(\theta; u, v_0) \big\rangle = -\varphi_U(-q) + \big\langle q, \Phi_2 v_0 \big\rangle + \big\langle q, \zeta(\theta) \big\rangle \leq$$

$$\leq -\varphi_U(-q) + \varphi_V(q) + \big\langle q, \zeta(\theta) \big\rangle = p(q, \theta).$$

Звідси випливає, що нерівність (23) не виконується, а це суперечить припущенню.

Теорему 2 доведено.

Визначимо найменший час T_0 для завершення гри у системі (1), (3), (4). Покладемо

$$p_0(\theta) = \sup_{\|q\| = 1} p(q, \theta). \tag{26}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються такі припущення*: *резольвента в'язки* $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ *існує на промені* $\lambda > \omega \geq 0$, *виконується оцінка* (5), *оператор* G^{-1}, *обернений до оператора* G (6), *є обмеженим у своїй області визначення*, $y_0(t) \in L_2(-h, 0; Y)$, $\operatorname{Im} Q_1 B_r \subset AD$, $r = 1, \ldots, n$, $Q_1 f(t) \in AD$ *майже для всіх* $t \in [0, T]$, $f(t) \in L_2(0, T; Z)$, $BG^{-1}Q_1 f(t) \in \in L_2(0, T; Z)$, $\operatorname{Im} Q_1 K_1 \subset AD$, $\operatorname{Im} Q_1 K_2 \subset AD$, *вектор* $z_0 \in AD$ *задовольняє співвідношення*

$$\|\Pi z_0\| > d \tag{27}$$

й існує таке $\theta_* \in (0, T]$, *що*

$$p_0(\theta_*) \leq d. \tag{28}$$

Тоді гру у системі (1), (3), (4) *можна завершити за мінімальний час*

$$T_0 = \min\big\{\theta \in [0, T] : p_0(\theta) \leq d\big\} > 0. \tag{29}$$

Доведення. За теоремою 2 знаходимо множину Θ моментів часу завершення гри у системі (1), (3), (4):

$$\Theta = \{\theta \in [0, T] : p_0(\theta) \leq d\}.$$

З припущень (27) і (28) випливає, що $0 \notin \Theta$ і $\Theta \neq \varnothing$.

За твердженням 1 функція $p(q, \theta)$ (19) неперервна за сукупністю змінних. Звідси випливає, що множина Θ є замкненою. Отже, T_0 (29) — найменший час завершення гри у системі (1), (3), (4).

Теорему 3 доведено.

4. Застосування до систем, що описуються функціонально-диференціальними рівняннями з частинними похідними. Різні фізичні задачі приводять до вивчення псевдопараболічних диференціальних рівнянь, що не розв'язні відносно старшої похідної за часом [22, 23]. У цьому пункті ми вивчаємо конфліктно керовану псевдопараболічну систему, що описується функціонально-диференціальним рівнянням з частинними похідними на $[0, T] \times [0, \pi]$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + y(t,x)\right) - \frac{\partial^4 y(t,x)}{\partial x^4} = B_1 y(t-h, x)) + K(u(t,x) + v(t,x)) \tag{30}$$

з крайовими

$$y(t,0) = y(t,\pi) = \frac{\partial^2 y(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(t,\pi)}{\partial x^2} = 0, \quad t \in [0, T], \tag{31}$$

і початковими

$$y(t,x) = y_0(t,x), \quad (t,x) \in [-h, 0] \times [0, \pi], \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right) y(0,x) = z_0(x), \quad x \in [0, \pi], \tag{32}$$

умовами. У (30) і (32) ми припускаємо, що $B_1, K \in \mathcal{L}\big(L_2(0,\pi)\big)$, $y_0(t,x) \in L_2([-h,0] \times [0,\pi])$, $z_0(x) \in L_2(0,\pi)$. Допустимі керування переслідувача $u(t,x) \in L_2\big([0,T] \times [0,\pi]\big)$ і втікача $v(t,x) \in L_2\big([0,T] \times [0,\pi]\big)$ задовольняють такі обмеження: $u(t,\cdot) \in U_0$ і $v(t,\cdot) \in V_0$, де U_0 та V_0 — замкнені кулі в $L_2(0,\pi)$ з центром у нулі та радіусами $\varrho_1 > 0$ і $\varrho_2 > 0$. Введемо у розгляд множини допустимих керувань $U_1, V_1 \subset L_2\big([0,T] \times [0,\pi]\big) = L_2\big(0, T; L_2(0,\pi)\big)$ $(\doteq H)$. *Мета гри в системі* (30) – (32) полягає у приведенні динамічного вектора $\dfrac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + y(t,x)$ в термінальну множину $\mathcal{M} \subset L_2(0,\pi)$ за час, що не перевищує T, у класі допустимих керувань переслідувача для довільного допустимого керування втікача. Виберемо термінальну множину $\mathcal{M} = (E-\Pi)L_2(0,\pi)\oplus\mathcal{B}_d$, де Π — ортогональний проєктор у просторі $L_2(0,\pi)$, а $\mathcal{B}_d$, — d-окіл нуля у підпросторі $\Pi L_2(0,\pi)$.

У просторі $L_2(0,\pi)$ введемо оператори

$$Ag = \frac{d^2g(x)}{dx^2} + g(x), \qquad D_A = \bigl\{g(x) \in W_2^2(0,\pi), g(0) = g(\pi) = 0\bigr\},$$

$$Bg = -\frac{d^4g(x)}{dx^4}, \qquad D_B = \bigl\{g(x) \in W_2^4(0,\pi), g(0) = g(\pi) = g''(0) = g''(\pi) = 0\bigr\}.$$

Мішану задачу (30) – (32) інтерпретуємо як абстрактну задачу (1), (3), (4) у просторі $Y = Z = U = V = L_2(0,\pi)$ з $f(t) = 0$, $K_1 = K_2 = K$ і $\int_{-h}^{0} d\eta(\tau)y(t+\tau) = B_1y(t-h)$. Оператор A є виродженим: $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\sin x\}$. Операторна в'язка $\lambda A + B$ визначена на $D = D_B$ і має резольвенту

$$R(\lambda)g = (\lambda A + B)^{-1}g = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m e_m(x)}{\lambda(1-m^2) - m^4}, \qquad \lambda \neq \lambda_m = \frac{m^4}{1-m^2}, \quad m = 2, 3, \ldots,$$

де g_m — коефіцієнти Фур'є функції $g(x) \in L_2(0,\pi)$ у розвиненні в ряд $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m e_m(x)$ за ортонормованим базисом $e_m(x) = \sqrt{2/\pi}\sin mx$. Зауважимо, що в [24, 25] використано розклади Фур'є за системами синусів і косинусів. Псевдорезольвента $AR(\lambda)$ задовольняє обмеження (5) зі сталими $M = 1$, $\omega = 0$.

Нехай Π_m — ортогональні проєктори у підпросторах $\mathrm{Lin}\{\sin mx\}$. Позначимо $\Pi_0 = E - \Pi_1$. Знаходимо

$$Z_1 = (\mathrm{Ker}A)^{\perp}, \qquad Z_2 = D_2 = \mathrm{Ker}A, \qquad D_1 = D_B \cap (\mathrm{Ker}A)^{\perp},$$

$$\overline{P_1} = Q_1 = \Pi_0, \qquad P_2 = Q_2 = \Pi_1, \qquad G^{-1}g = -g_1e_1(x) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{g_m e_m(x)}{1-m^2}, \tag{33}$$

$$Wg = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{m^4 g_m e_m(x)}{1-m^2}, \qquad U(t)g = g_1e_1(x) + \sum_{m=2}^{\infty} e^{\lambda_m t} g_m e_m(x).$$

Бачимо, що $\overline{G}^{-1} = \overline{G^{-1}} \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$. Розв'язок мішаної задачі (30) – (32) розуміємо в сенсі розв'язку абстрактної задачі (1), (3), (4). Припустимо, що $z_0(x) \in D_A \cap (\mathrm{Ker}A)^{\perp}$ і $\mathrm{Im}\,B_1 \cup \mathrm{Im}\,K \subset D_A$. За теоремою 1 існує єдиний розв'язок $y(t,x) \in L_2\bigl([-h,T] \times [0,\pi]\bigr)$ мішаної задачі (30) – (32) такий, що $y(t,\cdot) \in W_2^1\bigl(0,T; L_2(0,\pi)\bigr)$, $y(t,x) \in D_B$ майже для всіх $t \in [0,T]$ і співвідношення (30) – (32) задовольняються майже для всіх $t \in [0,T]$, $x \in [0,\pi]$. Розв'язок зображується у вигляді (8) за допомогою співвідношень (33).

Скористаємося тепер теоремами 2 і 3, щоб розв'язати ігрову задачу у системі (30) – (32). Введемо оператор

$$(\Psi_\theta z)(t,x) = \chi_{[0,\theta]}(t)\Pi U(\theta - t)Q_1(\Phi K z)(t,x), \quad \Psi_\theta \in \mathcal{L}(H).$$

Тут $\chi_{[0,\theta]}(t)$ — характеристична функція сегмента $[0,\theta]$, $\Phi \in \mathcal{L}(H)$ — оператор, що означений в (14). Отже, ми маємо такі зображення для опорних функціоналів (18):

$$\varphi_U(q,\theta)=\sup_{u\in U_1}\langle q,\Psi_\theta u\rangle_H=\sup_{u\in U_1}\langle \Psi_\theta^* q,u\rangle_H=\sup_{u\in U_1}\int\limits_0^T\langle \Psi_\theta^* q,u\rangle_Y\,dt,$$

$$\varphi_V(q,\theta)=\sup_{v\in V_1}\langle q,\Psi_\theta v\rangle_H=\sup_{v\in V_1}\langle \Psi_\theta^* q,v\rangle_H=\sup_{v\in V_1}\int\limits_0^T\langle \Psi_\theta^* q,v\rangle_Y\,dt.$$

Точна верхня межа досягається при $u=\varrho_1\Psi_\theta^* q\|\Psi_\theta^* q\|_Y^{-1}$, $v=\varrho_2\Psi_\theta^* q\|\Psi_\theta^* q\|_Y^{-1}$, і ми одержуємо зображення для функцій (18), (19):

$$\varphi_U(q,\theta)=\varrho_1\int\limits_0^T\|(\Psi_\theta^* q)(t,x)\|_Y dt,\qquad \varphi_V(q,\theta)=\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\varphi_U(q,\theta),$$

$$p(q,\theta)=(\varrho_2-\varrho_1)\int\limits_0^T\|\Psi_\theta^* q\|_Y dt+\langle q,\zeta(\theta)\rangle_Y.$$

Тут функція $\zeta(t,x)\in H$ із означення (14) зображується у вигляді

$$\zeta=\Pi A\sum_{k=0}^{N-1}(LF)^k w,\quad w(t,x)=\chi_{[0,T]}(t)G^{-1}U(t)z_0(x)+\chi_{[-h,0]}(t)y_0(t,x). \tag{34}$$

За теоремою 2 необхідні та достатні умови (23) для завершення гри у системі (30)–(32) в момент часу θ набирають вигляду

$$(\varrho_2-\varrho_1)\int\limits_0^T\|\Psi_\theta^* q\|_Y dt+\langle q,\zeta(\theta)\rangle_Y\le d,\quad \forall q\in L_2(0,\pi):\|q\|=1. \tag{35}$$

Для визначеності покладемо $K=B_1=\Pi_2$, $\Pi=E$, $y_0(t,x)=0$, $z_0(x)=z_{02}e_2(x)$. У цьому випадку, використовуючи зображення для операторів L і F (7), одержуємо

$$(LFz)(t,x)=\chi_{[0,T]}(t)\int\limits_0^t e^{\lambda_2(t-s)}z_2(s-h)ds\frac{e_2(x)}{-3},\qquad w(t,x)=\chi_{[0,T]}(t)\frac{e^{\lambda_2 t}z_{02}}{-3}e_2(x),$$

$$(F^*L^*z)(t,x)=(L^*F^*z)(t,x)=\chi_{[0,T-h]}(t)\int\limits_{t+h}^T e^{\lambda_2(s-t-h)}z_2(s)ds\frac{e_2(x)}{-3},$$

де $z(t,x)=\sum_{m=1}^\infty z_m(t)e_m(x)$, $z_0(x)=\sum_{m=1}^\infty z_{0m}e_m(x)$.

Маємо

$$\Psi_\theta^* z=\Pi_2\Phi^*[\chi_{[0,\theta]}(t)U(\theta-t)z(t,x)],\quad \Phi^*=\sum_{k=0}^{N-1}(L^*F^*)^k.$$

Це дозволяє знайти зображення

$$(\Psi_\theta^* q)(t,x)=\alpha(t,\theta)q_2e_2(x),$$

$$\alpha(t,\theta) = \sum_{k=0}^{N_0-1} \chi_{[0,\theta-kh]}(t) e^{\lambda_2(\theta-t-kh)} \frac{(\theta-t-kh)^k}{k!\,(-3)^k}, \qquad N_0 = \min\{j \in \mathbf{N} : \theta \le jh\}.$$

Функція $\zeta(t,x)$ (34) набирає вигляду

$$\zeta(t,x) = \beta(t) z_{02} e_2(x), \quad \beta(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{[kh,T]}(t) e^{\lambda_2(t-kh)} \frac{(t-kh)^k}{k!\,(-3)^k}.$$

Зрозуміло, що

$$\varphi_U(q,\theta) = \varrho_1 |q_2| \int_0^\theta |\alpha(t,\theta)| dt, \quad p(q,\theta) = (\varrho_2 - \varrho_1)|q_2| \int_0^\theta |\alpha(t,\theta)| dt + q_2 \beta(\theta) z_{02}.$$

Нерівність (35) для завершення гри у момент часу θ має вигляд

$$(\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^\theta |\alpha(t,\theta)| dt + |z_{02}\beta(\theta)| \le d.$$

Знаходимо функцію $p_0(\theta)$ (26):

$$p_0(\theta) = \max\left\{0,\ (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^\theta |\alpha(t,\theta)| dt + |z_{02}\beta(\theta)|\right\}.$$

Умова (27) набирає вигляду $|z_{02}| > d$. Якщо $T \ge h$ і

$$\varrho_1 - \varrho_2 \ge \frac{d\lambda_2 - |z_{02}|\lambda_2 e^{\lambda_2 h}}{1 - e^{\lambda_2 h}},$$

то умова (28) виконується для $\theta_* = h$. За теоремою 3 гру у системі (30) – (32) можна завершити за мінімальний час

$$T_0 = \frac{1}{\lambda_2} \ln\left[\frac{\varrho_1 - \varrho_2 - d\lambda_2}{\varrho_1 - \varrho_2 - |z_{02}|\lambda_2}\right].$$

Застосовуючи метод розв'язуючих функцій [3, 18], для довільного допустимого керування втікача $v(t,x)$ можна побудувати допустиме керування переслідувача $u(t,x)$, що дозволяє завершити гру у системі (30) – (32). Наприклад, нехай мета гри полягає в переведенні динамічного вектора $Ay(t,x)$ в нуль. У цьому випадку

$$d = 0, \qquad \varrho_1 - \varrho_2 \ge \frac{|z_{02}|\lambda_2 e^{\lambda_2 h}}{e^{\lambda_2 h} - 1}, \qquad T_0 = \frac{1}{\lambda_2} \ln\left[\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2 - |z_{02}|\lambda_2}\right].$$

Оскільки $T_0 \le h$, то за допомогою (8) одержуємо зображення динамічного вектора $Ay(t,x)$ для $(t,x) \in [0,T_0] \times [0,\pi]$:

$$Ay(t,x) = A\big[w(t,x) + L(u+v)(t,x)\big] = e^{\lambda_2 t}\left\{z_{02} + \int_0^t e^{-\lambda_2 s}\big[u_2(s) + v_2(s)\big] ds\right\} e_2(x). \quad (36)$$

Якщо $v(t,x)$ — допустиме керування втікача, то допустиме керування переслідувача виберемо у вигляді

$$u(t,x)=\begin{cases}-\varrho_1 \operatorname{sign} z_{02}e_2(x), & t\in[0,t_*),\\ -v(t,x), & t\in[t_*,T_0],\end{cases} \tag{37}$$

де час t_* задовольняє співвідношення

$$\int\limits_0^{t_*} e^{-\lambda_2 s}\,\frac{\varrho_1-v_2(s)\operatorname{sign} z_{02}}{|z_{02}|}ds=1. \tag{38}$$

Покажемо, що при такому виборі керування переслідувача гра буде завершена за мінімальний час T_0. Спочатку доведемо існування числа $t_*\in(0,T_0]$, що задовольняє співвідношення (38). Оскільки $\delta_0(t)=e^{-\lambda_2 t}|z_{02}|^{-1}(\varrho_1-v_2(t)\operatorname{sign} z_{02})\geq 0$ для $t\in[0,T_0]$, то $\delta(t)=\int_0^t\delta_0(s)ds$ — монотонно неспадна неперервна функція така, що $\delta(0)=0$ і $\delta(T_0)\geq 1$. Тоді існує число $t_*\in(0,T_0]$, для якого $\delta(t_*)=1$, що й потрібно було довести. Тепер неважко бачити, що при виборі керування у вигляді (37) динамічний вектор (36) буде переведено в нуль при $t=T_0$:

$$Ay(T_0,x)=e^{\lambda_2 T_0}\left\{z_{02}+\int\limits_0^{t_*}e^{-\lambda_2 s}[v_2(s)-\varrho_1 \operatorname{sign} z_{02}]ds\right\}e_2(x)=0.$$

Література

1. R. Isaacs, *Differential games*, John Wiley and Sons, New York etc. (1965).
2. A. Friedman, *Differential games of pursuit in Banach spaces*, Math. Anal. and Appl., **25**, 93 – 113 (1969); https://doi.org/10.1016/0022-247X(69)90215-7.
3. A. A. Chikrii, *Conflict-controlled processes*, Springer Sci. and Business Media, Dordrecht (2013); http://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7.
4. J. Yong, *Differential games: a concise introduction*, World Sci. Publ., New Jersey etc. (2015); https://doi.org/10.1142/9121.
5. Н. Н. Красовский, Ю. С. Осипов, *Линейные дифференциально-разностные игры*, Докл. АН СССР, **197**, 777 – 780 (1971).
6. E. N. Chukwu, *Capture in linear functional differential games of pursuit*, J. Math. Anal. and Appl., **70**, 326 – 336 (1979); https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90047-7.
7. А. А. Чикрий, Г. Ц. Чикрий, *Групповое преследование в дифференциально-разностных играх*, Дифференц. уравнения, **20**, 802 – 810 (1984).
8. P. V. Reddy, J. C. Engwerda, *Feedback properties of descriptor systems using matrix projectors and applications to descriptor differential games*, SIAM J. Matrix Anal. and Appl., **34**, 686 – 708 (2013); https://doi.org/10.1137/100819321.
9. J. H. Lightbourne, S. M. Rankin, *A partial functional differential equation of Sobolev type*, J. Math. Anal. and Appl., **93**, 328 – 337 (1983); https://doi.org/10.1016/0022-247X(83)90178-6.
10. J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York (1993).
11. A. G. Rutkas, L. A. Vlasenko, *Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements*, Proc. 5th IEEE Int. Conf. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals (Sevastopol, Crimea), 102 – 104 (2010); https://doi.org/10.1109/UWBUSIS.2010.5609106.
12. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, Providence, Rhode Island (1957).
13. K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1980).

14. L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, *Optimal control of undamped Sobolev-type retarded systems*, Math. Notes, **102**, 297 – 309 (2017); https://doi.org/10.1134/S0001434617090012.
15. A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York etc. (1983).
16. J. L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Springer-Verlag, New York etc. (1971).
17. O. A. Boichuk, V. L. Makarov, V. A. Feruk, *A criterion of solvability of resonant equations and construction of their solutions*, Ukr. Math. J., **71**, № 11, 1510 – 1521 (2020); https://doi.org/10.1007/s11253-020-01728-7.
18. A. A. Chikrii, *An analytical method in dynamic pursuit games*, Proc. Steklov Inst. Math., **271**, 69 – 85 (2010); https://doi.org/10.1134/S0081543810040073.
19. L. A. Vlasenko, A. G. Rutkas, *On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation*, Different. Equat., **51**, 798 – 807 (2015); http://doi.org/10.1134/S0012266115060117.
20. L. A. Vlasenko, A. A. Chikrii, *On a differential game in a system with distributed parameters*, Proc. Steklov Inst. Math., **292**, Issue 1 Supplement, 276 – 285 (2016); https://doi.org/10.1134/S0081543816020243.
21. A. V. Balakrishnan, *Introduction to optimization theory in a Hilbert space*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
22. R. E. Showalter, T. W. Ting, *Pseudoparabolic partial differential equations*, SIAM J. Math. Anal., **1**, 1 – 26 (1970); https://doi.org/10.1137/0501001.
23. A. Rutkas, L. Vlasenko, *Implicit operator differential equations and applications to electrodynamics*, Math. Methods Appl. Sci., **23**, 1 – 15 (2000); https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(20000110)23:1<1::AID-MMA100>3.0.CO;2-5.
24. В. Л. Макаров, Н. В. Майко, *Вагові оцінки точності методу перетворення Келі для абстрактних крайових задач у банаховому просторі*, Доп. НАН України, № 5, 3 – 9 (2020); https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.05.003.
25. V. L. Makarov, N. V. Mayko, *Weighted estimates of the Cayley transform method for boundary value problems in a Banach space*, Numer. Funct. Anal. and Optim., **42**, 211 – 233 (2021); https://doi.org/10.1080/01630563.2020.1871010.

Одержано 26.08.21