DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6935

УДК 519.62

М. В. Кутнів (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів; Жешув. технол. ун-т, Польща),
М. Круль (Жешув. технол. ун-т, Польща)

НОВА АЛГОРИТМІЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТОЧНИХ ТРИТОЧКОВИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

In this paper, we propose and justify three-point difference schemes of higher order of accuracy on a non-uniform grid for systems of nonlinear ordinary differential equations of the second order with a derivative on the right-hand side and boundary conditions of the first kind. We construct a new approximation of the derivative of the solution to the boundary value problem at grid nodes, prove the existence and uniqueness of the solution, and establish the order of accuracy of the difference schemes. Additionally, an iterative Newton-type method for determining the solution of these schemes is developed and an algorithm for the automatic selection of grid points, which guarantees the achievement of the specified accuracy, is suggested. We also present numerical examples, which confirm the efficiency and reliability of our algorithm.

Побудовано та обгрунтовано триточкові різницеві схеми високого порядку точності на нерівномірній сітці для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з похідною у правій частині і крайовими умовами першого роду. Побудовано нову апроксимацію похідної розв'язку крайової задачі у вузлах сітки. Доведено існування та єдиність розв'язку, встановлено порядок точності різницевих схем. Розроблено ітераційний метод типу Ньютона знаходження розв'язку цих схем. Запропоновано алгоритм автоматичного вибору точок сітки, який гарантує досягнення заданої точності. Наведено числові приклади, які підтверджують ефективність і надійність розробленого алгоритму.

1. Вступ. Різницеву схему називатимемо точною, якщо її розв'язок збігається з проєкцією точного розв'язку крайової задачі на сітку. Підхід до побудови точних триточкових різницевих схем (ТТРС) на рівномірній сітці та їх алгоритмічної реалізації, яка приводить до триточкових різницевих схем (ТРС) довільного порядку точності, для нелінійних крайових задач вигляду

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] = -f\left(x,u\right), \quad x\in(0,1), \quad u(0)=\mu_1, \quad u(1)=\mu_2$$

було запропоновано в [1 – 3]. Ці результати узагальнено і розвинено в [4] для випадку нерівномірної сітки, а також у [5 – 7] для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з похідною у правій частині і крайовими умовами третього роду. У [8 – 10] результати, отримані для скалярних нелінійних ЗДР, було узагальнено для систем нелінійних ЗДР другого порядку.

У цій статті розроблено нову ефективну алгоритмічну реалізацію ТТРС на нерівномірній сітці через усічені ТРС для систем нелінійних ЗДР

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x,u,\frac{du}{dx}\right), \quad x\in(0,1), \tag{1}$$

$$f(x,u,\xi)\colon [0,1]\to\mathbb{R}^s, \quad u,\xi\colon[0,1]\to\mathbb{R}^s,$$

з крайовими умовами

$$u(0)=\mu_1, \quad u(1)=\mu_2, \tag{2}$$

де $\mathbb{R}^s$ — простір s-вимірних векторів. Для знаходження правої частини ТРС в кожному вузлі $x_j, j = 1, 2, \ldots, N-1$, сітки необхідно розв'язати дві допоміжні задачі Коші для систем нелінійних ЗДР другого порядку (1) на інтервалах $[x_{j-1}, x_j]$ (вперед) і $[x_j, x_{j+1}]$ (назад). Задачі Коші потрібно розв'язувати лише за один крок за допомогою будь-якого однокрокового методу порядку точності $\bar{m} = 2[(m+1)/2]$ (m — задане додатне число, $[\cdot]$ означає цілу частину числа). В результаті отримано реалізацію ТТРС через триточкові різницеві схеми рангу $\bar{m}$, для яких доведено, що вони мають порядок точності $\bar{m}$. Зауважимо, що застосування однокрокових методів розв'язування задач Коші для систем другого порядку (1) дозволяє зменшити об'єм обчислень та потребує меншої комп'ютерної пам'яті у порівнянні з застосуванням однокрокових методів для систем першого порядку подвійної розмірності (див., наприклад, [11, с. 283, 284]). Побудовано нову апроксимацію похідної du/dx у вузлах сітки, порядок точності якої такий же, як і розв'язку, тобто $\bar{m}$. Для знаходження розв'язку різницевих схем використовуються ітераційні методи. Розроблено ефективний алгоритм чисельного розв'язання крайових задач (1), (2), який автоматично генерує сітку для заданої допустимої точності. Наведено кілька числових прикладів, які підтверджують ефективність запропонованих алгоритмів.

2. Існування та єдиність розв'язку. Достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) дає така теорема.

Теорема 1. *Якщо* $f(x,u,\xi) = [f_i(x,u,\xi)]_{i=1}^s$ *задовольняє умови*

$$\begin{gathered} f_{iu\xi}(x) \equiv f_i\,(x,u,\xi) \in Q^0[0,1] \quad \forall u,\xi \in \mathbb{R}^s, \\ f_{ix}\,(u,\xi) \equiv f_i\,(x,u,\xi) \in C(\mathbb{R}^{2s}) \quad \forall x \in [0,1], \end{gathered} \tag{3}$$

$$|f_i\,(x,u,\xi) - f_{0i}(x)| \le C_i \sum_{p=1}^{s} |u_p|\,[g_i(x) + |\xi_i|^2] \quad \forall x \in [0,1],\ u,\xi \in \mathbb{R}^s, \tag{4}$$

$$\begin{gathered} (f\,(x,u,\xi) - f\,(x,v,\eta), u - v) \le c\left(\|u-v\|^2 + \|\xi-\eta\|^2\right) \\ \forall x \in [0,1],\ u,v,\xi,\eta \in \mathbb{R}^s, \quad 0 \le c < \frac{\pi^2}{\pi^2+1}, \end{gathered} \tag{5}$$

то задача (1), (2) *має єдиний розв'язок* $u(x) = \{u_i(x)\}_{i=1}^s$. *Крім того,* $u_i(x),\ \dfrac{du_i}{dx} \in C[0,1]$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

Тут (u,v) *— скалярний добуток в* $\mathbb{R}^s$, $\|u\| = (u,u)^{1/2}$ *— норма вектора в* $\mathbb{R}^s$, $Q^0[0,1]$ *— клас кусково-неперервних функцій із скінченною кількістю точок розриву першого роду,* $C_i(t)$ *— невід'ємна, неперервна функція,* $f_{0i}(x) \in L_2(0,1)$, $g_i(x) \in L_1(0,1)$ *і* c *— стала.*

Доведення можна знайти в [10].

3. Алгоритмічна реалізація точних триточкових різницевих схем. На інтервалі $(0,1)$ введемо нерівномірну сітку

$$\hat{\omega}_h = \{x_j \in (0,1),\ j = 1, 2, \ldots, N-1,\ h_j = x_j - x_{j-1} > 0,\ h_1 + h_2 + \ldots + h_N = 1\}$$

так, щоб точки розриву функції $f\,(x,u,\xi)$ збігалися з вузлами сітки $\hat{\omega}_h$. Множину всіх точок розриву позначимо через ρ і припустимо, що N таке, що $\rho \subseteq \hat{\omega}_h$.

ТТРС для задачі (1), (2) має вигляд (див. [7, 10])

$$u_{\bar{x}\hat{x},j} = \varphi(x_j, u), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \quad u_0 = \mu_1, \quad u_N = \mu_2, \tag{6}$$

де

$$u_j = u(x_j), \quad u_{\bar{x},j} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h_j}, \quad u_{\hat{x},j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\hbar_j},$$

$$\hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \quad u_{x,j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{h_{j+1}}, \quad u_{\bar{x}\hat{x},j} = \frac{u_{x,j} - u_{\bar{x},j}}{\hbar_j},$$

$$\varphi(x_j, u) = \frac{1}{\hbar_j h_j} \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} (\xi - x_{j-1}) f\left(\xi, u(\xi), \frac{du}{d\xi}\right) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_j h_{j+1}} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} (x_{j+1} - \xi) f\left(\xi, u(\xi), \frac{du}{d\xi}\right) d\xi.$$

Значення першої похідної у вузлах сітки $x_{j+(-1)^\alpha}$, $j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1, 2$, можна обчислити за формулами

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x = x_{j+(-1)^\alpha}} = u_{\bar{x},j-1+\alpha} + \frac{(-1)^{\alpha+1}}{h_{j-1+\alpha}} \int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} (\xi - x_j) f\left(\xi, u(\xi), \frac{du}{d\xi}\right) d\xi. \tag{7}$$

Насамперед врахуємо, що

$$\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} (\xi - x_{j+(-1)^\alpha}) f\left(\xi, u(\xi), \frac{du}{d\xi}\right) d\xi =$$

$$= (-1)^{\alpha+1} h_{j-1+\alpha} l_\alpha^j(x_j, u) - w_\alpha^j(x_j, u), \tag{8}$$

$$\int\limits_{x_{j+(-1)^\alpha}}^{x_j} (\xi - x_j) f\left(\xi, u(\xi), \frac{du}{d\xi}\right) d\xi = -w_\alpha^j(x_j, u), \tag{9}$$

де $w_\alpha^j(x, u) \in \mathbb{R}^s$, $j = 2-\alpha,\ 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1, 2$, — розв'язки задач Коші

$$\begin{gathered}\frac{d^2 w_\alpha^j(x, u)}{dx^2} = f\left(x, Y_\alpha^j(x, u), Z_\alpha^j(x, u)\right), \quad x_{j-2+\alpha} < x < x_{j-1+\alpha}, \\ w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u) = 0, \quad \frac{dw_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha}, u)}{dx} = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

При цьому справджуються рівності (див. [7, с. 87])

$$u(x) = Y_\alpha^j(x, u) = u_{j+(-1)^\alpha} + (x - x_{j+(-1)^\alpha}) \left.\frac{du}{dx}\right|_{x = x_{j+(-1)^\alpha}} + w_\alpha^j(x, u),$$

$$Z_\alpha^j(x, u) = \frac{dY_\alpha^j(x, u)}{dx} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{x = x_{j+(-1)^\alpha}} + l_\alpha^j(x, u), \quad x_{j-2+\alpha} \le x \le x_{j-1+\alpha},$$

де $l_\alpha^j(x,u) = \dfrac{dw_\alpha^j(x,u)}{dx}$.

Використовуючи (8), (9), праву частину ТТРС (6) та похідну (7) можна записати у вигляді

$$\varphi(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[l_\alpha^j(x_j,u) + \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}w_\alpha^j(x_j,u)\right], \tag{11}$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = u_{\bar{x},j-1+\alpha} + \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}w_\alpha^j(x_j,u). \tag{12}$$

Зауважимо, що на відміну від [7, 10] значення похідних (12), які входять у праву частину системи ЗДР (10), для кожного $j = 1,2,\ldots,N-1$ і $\alpha = 1,2$ залежать від значень розв'язку $u(x)$ лише в трьох вузлах сітки: x_{j-1}, x_j і x_{j+1}. Крім того, формули (12) визначають відповідну похідну неявно.

Отже, для побудови ТТРС (6), (11), (12) необхідно для будь-якого $x_j \in \hat{\omega}_h$ розв'язати дві задачі Коші (10) з гладкими правими частинами: одну ($\alpha = 1$) вперед на відрізку $[x_{j-1},x_j]$ і одну ($\alpha = 2$) назад на відрізку $[x_j,x_{j+1}]$. Будемо розв'язувати їх чисельно за допомогою однокрокових методів для ЗДР другого порядку:

$$w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u) = (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_1\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right), \tag{13}$$

$$l_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u) = (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\Phi_2\left(x_{j+(-1)^\alpha},0,0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\right), \tag{14}$$

де $\Phi_1(x,u,u',h)$ і $\Phi_2(x,u,u',h)$ — функції приросту, $u' = \dfrac{du}{dx}$, $w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u), l_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,u)$ апроксимують відповідно $w_\alpha^j(x_j,u)$, $l_\alpha^j(x_j,u)$ з порядком точності $\bar{m}$.

У випадку, коли використовується метод рядів Тейлора, маємо

$$\Phi_1(x_{j+(-1)^\alpha},0,0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}) =$$
$$= \frac{(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}}{2}f(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha}) +$$
$$+\sum_{p=3}^{\bar{m}}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^p w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^p},$$

$$\Phi_2(x_{j+(-1)^\alpha},0,0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}) = f\left(x_{j+(-1)^\alpha},u_{j+(-1)^\alpha},u'_{j+(-1)^\alpha}\right) +$$
$$+\sum_{p=2}^{\bar{m}}\frac{[(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{p-1}}{p!}\frac{d^{p+1}w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},u)}{dx^{p+1}}.$$

У випадку методів Рунге – Кутта для ЗДР другого порядку отримуємо

$$\Phi_1(x_{j+(-1)^\alpha},0,0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}) = (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\left(\bar{b}_1g_1 + \bar{b}_2g_2 + \ldots + \bar{b}_{s-1}g_{s-1}\right),$$
$$\Phi_2(x_{j+(-1)^\alpha},0,0,(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}) = b_1g_1 + b_2g_2 + \ldots + b_sg_s,$$

де

$$g_1 = f\left(x_{j+(-1)^\alpha},\, u_{j+(-1)^\alpha},\, u'_{j+(-1)^\alpha}\right),$$

$$g_i = f\Bigg(x_{j+(-1)^\alpha} + c_i(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha},\, u_{j+(-1)^\alpha} + c_i(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}u'_{j+(-1)^\alpha} +$$

$$+h^2_{j-1+\alpha}\sum_{p=1}^{i-1}\bar{a}_{ip}g_p,\, u'_{j+(-1)^\alpha} + (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}\sum_{p=1}^{i-1}a_{ip}g_p\Bigg), \quad i = 2,3,\ldots,s,$$

$$\bar{a}_{ip} = \sum_{k=p+1}^{i-1} a_{ik}a_{kp}, \quad p = 1,2,\ldots,i-2, \quad i = 3,4,\ldots,s,$$

$$\bar{a}_{i,i-1} = 0, \quad i = 2,3,\ldots,s, \quad \bar{b}_i = \sum_{k=i+1}^{s} b_k a_{ki}, \quad i = 1,2,\ldots,s-1,$$

$c_i,\ a_{ik},\ b_k$ — дійсні коефіцієнти.

Якщо права частина диференціального рівняння $f(x,u,\xi)$ достатньо гладка, то існують розвинення

$$w^j_\alpha(x_j,u) = w^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u) + [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar{m}+1}\psi^j_\alpha(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h^{\bar{m}+2}_{j-1+\alpha}), \tag{15}$$

$$l^j_\alpha(x_j,u) = l^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u) + [(-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}]^{\bar{m}+1}\tilde{\psi}^j_\alpha(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h^{\bar{m}+2}_{j-1+\alpha}). \tag{16}$$

Лема 1. *Нехай*

$$f_i(x,u,\xi) \in \bigcup_{j=1}^{N} C^m\left([x_{j-1},x_j]\times\mathbb{R}^2\right)$$

і для однокрокових чисельних методів (13), (14) *справджуються розвинення* (15), (16). *Тоді*

$$w^j_\alpha(x_j,u) = w^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u) +$$
$$+ (-1)^{\alpha+1}h^{\bar{m}+1}_{j-1+\alpha}\psi^{j-1+\alpha}_1(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h^{\bar{m}+2}_{j-1+\alpha}), \tag{17}$$

$$l^j_\alpha(x_j,u) = l^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u) +$$
$$+ (-1)^{\alpha+1}h^{\bar{m}+1}_{j-1+\alpha}\tilde{\psi}^{j-1+\alpha}_1(x_{j+(-1)^\alpha},u) + O(h^{\bar{m}+2}_{j-1+\alpha}), \tag{18}$$

$$j = 2-\alpha,\ 3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2.$$

Доведення. Нехай у формулах (13), (14) для $\alpha = 1$ індекс j замінено на $j+1$. Тоді приєднаним методом до цього методу є (13), (14) з $\alpha = 2$. Застосовуючи теорему 8.4 (див. [11, с. 220]), отримуємо $\psi^j_2 = (-1)^{\bar{n}}\psi^{j+1}_1$. З рівнянь (15), (16) і з того, що $\bar{m}$ — парне число, випливає твердження леми.

Якщо в ТТРС (6), (11) точні розв'язки задач Коші (10) замінити чисельними $w^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u)$, $l^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u)$, то отримаємо відповідну усічену ТРС рангу $\bar{m}$:

$$y^{(\bar{m})}_{\bar{x}\hat{x},j} = \varphi^{(\bar{m})}(x_j,y^{(\bar{m})}), \quad j = 1,2,\ldots,N-1, \quad y^{(\bar{m})}_0 = \mu_1, \quad y^{(\bar{m})}_N = \mu_2, \tag{19}$$

де $y^{(\bar{m})}_j \approx u_j$,

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j,u) = \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[l^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u) + \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}w^{(\bar{m})j}_\alpha(x_j,u)\right]. \tag{20}$$

Наближення першої похідної у вузлах сітки обчислюється за формулами

$$\left.\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = y^{(\bar m)}_{\bar x, j-1+\alpha} + \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}} w^{(\bar m)j}_\alpha(x_j, y^{(\bar m)}),$$
$$j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2. \tag{21}$$

Наступне твердження встановлює точність наближення правої частини різницевої схеми (19).

Лема 2. *Нехай виконуються припущення леми* 1. *Тоді справджується співвідношення*

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = -\left[h_j^{\bar m}\left(\psi_1^j(x,u)\right)_{x=x_j+0}\right]_{\hat x} +$$
$$+ O\left(\frac{h_j^{\bar m+1} + h_{j+1}^{\bar m+1}}{\hbar_j}\right), \quad j = 1,2,\ldots,N-1. \tag{22}$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = \hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\Big\{l_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - l_\alpha^j(x_j,u) +$$
$$+ \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}\left[w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - w_\alpha^j(x_j,u)\right]\Big\}. \tag{23}$$

З леми 1 маємо

$$l_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - l_\alpha^j(x_j,u) + \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}\left[w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u) - w_\alpha^j(x_j,u)\right] =$$
$$= h_{j-1+\alpha}^{\bar m}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) - (-1)^{\alpha+1}h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}\tilde\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) +$$
$$+ O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+2}) = h_{j-1+\alpha}^{\bar m}\psi_1^{j-1+\alpha}(x_{j+(-1)^\alpha}, u) + O(h_{j-1+\alpha}^{\bar m+1}). \tag{24}$$

Тоді рівності (23), (24) приводять до співвідношення

$$\varphi^{(\bar m)}(x_j, u) - \varphi(x_j, u) = -\frac{1}{\hbar_j}\left[h_{j+1}^{\bar m}\psi_1^{j+1}(x_{j+1}, u) - h_j^{\bar m}\psi_1^j(x_{j-1}, u)\right] +$$
$$+ O\left(\frac{h_j^{\bar m+1} + h_{j+1}^{\bar m+1}}{\hbar_j}\right). \tag{25}$$

Оскільки

$$\psi_1^j(x_{j-1}, u) = \psi_1^j(x_j, u) + O(h_j),$$

то з (25) випливає, що виконується співвідношення (22).

У просторі сіткових функцій $H(\hat\omega_h)$ визначимо скалярні добутки

$$(u,v)_{\hat\omega_h} = \sum_{\xi\in\hat\omega_h}\hbar(\xi)(u(\xi), v(\xi)), \quad (u,v)_{\hat\omega_h^+} = \sum_{\xi\in\hat\omega_h^+} h(\xi)(u(\xi), v(\xi)), \quad \hat\omega_h^+ = \hat\omega_h \cup x_N,$$

$$(u,v)_{\hat{\hat{\omega}}_h} = \sum_{\xi\in\hat{\hat{\omega}}_h} \hbar(\xi)(u(\xi),v(\xi)), \quad \hat{\hat{\omega}}_h = \hat{\omega}_h^+ \cup x_0, \quad \hbar_0 = 0,5h_1, \quad \hbar_N = 0,5h_N,$$

і норми

$$\|u\|_{0,2,\hat{\omega}_h} = (u,u)_{\hat{\omega}_h}^{1/2}, \quad \|u\|_{0,2,\hat{\omega}_h^+} = (u,u)_{\hat{\omega}_h^+}^{1/2},$$

$$\|u\|_{0,2,\hat{\hat{\omega}}_h} = (u,u)_{\hat{\hat{\omega}}_h}^{1/2}, \quad \|u\|_{1,2,\hat{\omega}_h} = \left(\|u\|_{0,2,\hat{\omega}_h}^2 + \|u_{\bar{x}}\|_{0,2,\hat{\omega}_h^+}^2\right)^{1/2}.$$

Тепер ми можемо довести таку теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і леми* 1. *Тоді існує таке* $h_0 > 0$, *що для всіх* $\{h_j\}_{j=1}^N$ *таких, що* $|h| = \max_{1\le j\le N} h_j \le h_0$, *ТРС* (19), (20) *має єдиний розв'язок, точність якого характеризується оцінкою*

$$\left\|y^{(\bar{m})} - u\right\|_{1,2,\hat{\hat{\omega}}_h}^* = \left[\left\|y^{(\bar{m})} - u\right\|_{0,2,\hat{\omega}_h}^2 + \left\|\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx} - \frac{du}{dx}\right\|_{0,2,\hat{\hat{\omega}}_h}^2\right]^{1/2} \le M\,|h|^{\bar{m}},$$

де $\left.\dfrac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$ *обчислюється за формулою* (21) *і* M *— стала, незалежна від* $|h|$.

Доведення. Розглянемо оператор

$$A_h^{(\bar{m})}(x_j,u) = -u_{\bar{x}\hat{x},j} + \varphi^{(\bar{m})}(x_j,u), \quad j = 1,2,\ldots,N-1, \tag{26}$$

який визначено у просторі $H(\hat{\omega}_h)$.

Використовуючи формулу підсумовування за частинами (див. [13, с. 233]) і співвідношення (22), отримуємо

$$\left(A_h^{(\bar{m})}(x,u) - A_h^{(\bar{m})}(x,v), u-v\right)_{\hat{\omega}_h} = \|u_{\bar{x}} - v_{\bar{x}}\|_{0,2,\hat{\omega}_h^+}^2 +$$

$$+\left(\varphi^{(\bar{m})}(x,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x,v), u-v\right)_{\hat{\omega}_h} = (A_h(x,u) - A_h(x,v), u-v)_{\hat{\omega}_h} + O\left(|h|^{\bar{m}}\right).$$

Оскільки (див. доведення теореми 2 [10])

$$(\varphi(x,u) - \varphi(x,v), u-v)_{\hat{\omega}_h} \ge \int_0^1 \left\{\frac{d}{d\eta}\left[\hat{u}(\eta) - \hat{v}(\eta) - u(\eta) + v(\eta)\right]\right\}^2 d\eta,$$

$$\hat{u}(\eta) = u(x_j)\frac{\eta - x_{j-1}}{h_j} + u(x_{j-1})\frac{x_j - \eta}{h_j}, \quad x_{j-1} \le \eta \le x_j,$$

то на підставі (22) існує $h_0 > 0$ таке, що для всіх $\{h_j\}_{j=1}^N$ таких, що $|h| = \max_{1\le j\le N} h_j \le h_0$, справджується оцінка

$$\left(\varphi^{(\bar{m})}(x,u) - \varphi^{(\bar{m})}(x,v), u-v\right)_{\hat{\omega}_h} \ge 0.$$

Тоді з нерівності (див. [13, с. 241])

$$8\,\|u\|_{0,2,\hat{\omega}_h}^2 \le \|u_{\bar{x}}\|_{0,2,\hat{\omega}_h^+}^2 \tag{27}$$

випливає, що

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v),u-v\right)_{\hat\omega_h}\ge \|u_{\bar x}-v_{\bar x}\|^2_{0,2,\hat\omega_h^+}\ge 8\,\|u-v\|^2_{0,2,\hat\omega_h}\,. \tag{28}$$

Таким чином, оператор $A_h^{(\bar m)}(x,u)$ є строго монотонним і для $|h|\le h_0$ ТРС (19) має єдиний розв'язок [14, с. 461] $y^{(\bar m)}(x), x\in\hat\omega_h$.

Похибка $z(x)=y^{(\bar m)}(x)-u(x),\ x\in\hat\omega_h$, різницевої схеми (19) є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} z_{\bar x\hat x}(x)+\varphi^{(\bar m)}(x,u)-\varphi^{(\bar m)}(x,y^{(\bar m)})=\varphi^{(\bar m)}(x,u)-\varphi(x,u),\quad x\in\hat\omega_h,\\ z(0)=z(1)=0. \end{gathered} \tag{29}$$

Застосовуючи (26), (29), отримуємо

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,y^{(\bar m)}),z\right)_{\hat\omega_h}=\left(\varphi^{(\bar m)}(x,u)-\varphi(x,u),z\right)_{\hat\omega_h}, \tag{30}$$

що разом з (28) дає оцінку

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,y^{(\bar m)}),z\right)_{\hat\omega_h}\ge \|z_{\bar x}\|^2_{0,2,\hat\omega_h^+}\,. \tag{31}$$

Використовуючи формули підсумовування за частинами і нерівності Коші – Буняковського, з (22) одержуємо оцінку правої частини (30):

$$\left(\varphi^{(\bar m)}(x,u)-\varphi(x,u),z\right)_{\hat\omega_h}=\left(h^{\bar m}\psi_1^j,z_{\bar x}\right)_{\hat\omega_h^+}\le M\,|h|^{\bar m}\,\|z_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}\,. \tag{32}$$

Оцінки (31), (32) дають $\|z_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}\le M\,|h|^{\bar m}$. Далі внаслідок еквівалентності норм $\|z\|_{1,2,\hat\omega_h}$, $\|z_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}$ отримуємо

$$\|z\|_{1,2,\hat\omega_h}\le M\,|h|^{\bar m}\,. \tag{33}$$

Згідно з (33), (17) маємо

$$\begin{gathered}\left\|\left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\right\|\le\|z_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}+\frac{1}{h_{j-1+\alpha}}\left\|w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)-w_\alpha^j(x_j,u)\right\|+\\ +\frac{1}{h_{j-1+\alpha}}\left\|w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,y^{(\bar m)})-w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)\right\|\le\\ \le M\,|h|^{\bar m}+\frac{1}{h_{j-1+\alpha}}\left\|\frac{\partial}{\partial u}w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)\Big|_{u=\tilde u}\right\|\|z\|_{0,2,\hat\omega_h}+\\ +\frac{1}{h_{j-1+\alpha}}\left\|\frac{\partial}{\partial u'}w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)\Big|_{u'=\tilde u'}\right\|\left\|\left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\right\|,\\ j=2-\alpha,\ 3-\alpha,\dots,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2,\end{gathered}$$

де $\tilde u=\theta_1 y^{(\bar m)}+(1-\theta_1)u,\ 0<\theta_1<1,\ \tilde u'=\theta_2\dfrac{dy^{(\bar m)}}{dx}+(1-\theta_2)u',\ 0<\theta_2<1$. Звідси при $|h|\le h_0$ одержуємо

$$\left\|\frac{dz}{dx}\right\|_{0,2,\hat{\bar\omega}_h} \le \max_{\substack{j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha\\ \alpha=1,2}} \left\|\left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\right\| \le M\,|h|^{\bar m}.$$

Отже, враховуючи (33), маємо $\|z\|^*_{1,2,\hat{\bar\omega}_h} \le M\,|h|^{\bar m}$.

Оскільки величини $w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j, y_j^{(\bar m)})$, $l_\alpha^{(\bar m)j}(x_j, y_j^{(\bar m)})$ залежать від $y_j^{(\bar m)}$, $j = 1, 2, \ldots, N-1$, і $\left.\dfrac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1, 2$, то (19), (21) є системою нелінійних рівнянь щодо цих невідомих. Для розв'язування цієї системи застосуємо ітераційні методи.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення теореми* 2. *Тоді*

$$\left\|\varphi^{(\bar m)}(x,u) - \varphi^{(\bar m)}(x,v)\right\| \le \tilde L\,\|u - v\|$$

й існує таке $h_0 > 0$, *що для всіх* $\{h_j\}_{j=1}^N$ *таких, що* $|h| \le h_0$, *виконується нерівність*

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u) - A_h^{(\bar m)}(x,v), u - v\right)_{\hat\omega_h} \ge \|u_{\bar x} - v_{\bar x}\|^2_{0,2,\hat\omega_h^+},$$

а ітераційний метод

$$\begin{gathered}
B_h\frac{y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m,n-1)}}{\tau} + A_h^{(\bar m)}(x, y^{(\bar m,n-1)}) = 0, \quad x \in \hat\omega_h,\\
y^{(\bar m,n)}(0) = \mu_1, \quad y^{(\bar m,n)}(1) = \mu_2,\\
\left.\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = y^{(\bar m,n)}_{\bar x,j-1+\alpha} + (-1)^\alpha\frac{w_\alpha^{(\bar m)j}\left(x_j, y^{(\bar m,n-1)}\right)}{h_{j-1+\alpha}},\\
j = 2-\alpha,\ 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha,\ \alpha = 1,2, \quad n = 1,2,\ldots,\\
y^{(\bar m,0)}(x) = (1-x)\mu_1 + x\mu_2, \quad \frac{dy^{(\bar m,0)}(x)}{dx} = \mu_2 - \mu_1, \quad x \in \hat\omega_h,\\
B_h y = -y_{\bar x\hat x}, \quad A_h^{(\bar m)}(x,y) = B_h y + \varphi^{(\bar m)}(x,y),
\end{gathered} \tag{34}$$

з $\tau = \tau_0 = \left(1 + \tilde L/8\right)^{-2}$ *збігається з оцінкою похибки*

$$\left\|y^{(\bar m,n)} - u\right\|^*_{1,2,\hat\omega_h} \le M(|h|^{\bar m} + q^n), \quad q = \sqrt{1-\tau_0}, \tag{35}$$

де стала M *не залежить від* $|h|, m, n$.

Доведення. З теорема 2 випливає, що

$$\begin{aligned}
\left\|y^{(\bar m,n)} - u\right\|^*_{1,2,\hat{\bar\omega}_h} &\le \left\|y^{(\bar m)} - u\right\|^*_{1,2,\hat{\bar\omega}_h} + \left\|y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)}\right\|^*_{1,2,\hat{\bar\omega}_h} \le\\
&\le M\,|h|^{\bar m} + \left\|y^{(\bar m,n)} - y^{(\bar m)}\right\|^*_{1,2,\hat{\bar\omega}_h}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Оскільки $f_i(x,u,\xi) \in \bigcup_{j=1}^N C^{\bar m}([x_{j-1}, x_j] \times \mathbb{R}^2)$, маємо

$$\left\|\varphi^{(\bar m)}(x,u)-\varphi^{(\bar m)}(x,v)\right\|\le\tilde L\left\|u-v\right\|.$$

Введемо простір сіткових функцій H_{B_h}, який складається з елементів $H(\hat\omega_h)$, зі скалярним добутком $(B_hu,v)_{\hat\omega_h}$ і нормою $\|u\|_{B_h}=(B_hu,u)^{1/2}_{\hat\omega_h}$. Використовуючи нерівність Коші–Буняковського, отримуємо оцінку

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v),w\right)_{\hat\omega_h}\le\|u-v\|_{B_h^{(\bar m)}}\|w\|_{B_h}+$$
$$+\left\|\varphi^{(\bar m)}(x,u)-\varphi^{(\bar m)}(x,v)\right\|_{0,2,\hat\omega_h}\|w\|_{0,2,\hat\omega_h}\le\|u-v\|_{B_h}\|w\|_{B_h}+$$
$$+\tilde L\left\|u-v\right\|_{0,2,\hat\omega_h}\|w\|_{0,2,\hat\omega_h}\le\|u-v\|_{B_h}\|w\|_{B_h}+$$
$$+\frac{\tilde L}{8}\|u_{\bar x}-v_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}\|w_{\bar x}\|_{0,2,\hat\omega_h^+}=\left(1+\frac{\tilde L}{8}\right)\|u-v\|_{B_h}\|w\|_{B_h}.$$

Покладемо тут $w=(B_h)^{-1}\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v)\right)$, тоді

$$\left\|(B_h)^{-1}\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v)\right)\right\|_{B_h}\le\left(1+\frac{\tilde L}{8}\right)\|u-v\|_{B_h}. \tag{37}$$

З (29), (37) випливає, що

$$\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v),(B_h)^{-1}\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v)\right)\right)_{\hat\omega_h}\le$$
$$\le\left(1+\frac{\tilde L}{8}\right)^2\|u-v\|^2_{B_h}\le\left(1+\frac{\tilde L}{8}\right)^2\left(A_h^{(\bar m)}(x,u)-A_h^{(\bar m)}(x,v),u-v\right)_{\hat\omega_h}.$$

Використовуючи теорему 1 з [13, с. 502], робимо висновок, що метод (34) є збіжним у просторі H_{B_h}, який еквівалентний простору $\overset{\circ}{H}(\hat\omega_h)$, і для похибки маємо оцінку

$$\left\|y^{(\bar m,n)}-y^{(\bar m)}\right\|_{1,2,\hat\omega_h}\le M_1q^n.$$

Крім того,

$$\left\|\left[\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx}\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}-\left[\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\right\|\le\left\|y^{(\bar m,n)}_{\bar x,j-1+\alpha}-y^{(\bar m)}_{\bar x,j-1+\alpha}\right\|+$$
$$+\frac{1}{h_{j-1+\alpha}}\left\|w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,y^{(\bar m,n)})-w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,y^{(\bar m)})\right\|+$$
$$\le\left\|y^{(\bar m,n)}_{\bar x}-y^{(\bar m)}_{\bar x}\right\|_{0,2,\hat\omega_h^+}+\frac{1}{h_{j-1+\alpha}}\left\|\frac{\partial}{\partial u}w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)\Big|_{u=\tilde y}\right\|\left\|y^{(\bar m,n)}-y^{(\bar m)}\right\|_{0,2,\hat\omega_h}+$$
$$+\frac{1}{h_{j-1+\alpha}}\left\|\frac{\partial}{\partial u'}w_\alpha^{(\bar m)j}(x_j,u)\Big|_{u'=\tilde y'}\right\|\left\|\left[\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx}\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}-\left[\frac{dy^{(\bar m)}}{dx}\right]_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\right\|,$$

$$j = 2-\alpha,\ 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha, \quad \alpha = 1,2,$$

де $\tilde{y} = \theta_1 y^{(\bar{m},n)} + (1-\theta_1) y^{(\bar{m})}$, $0 < \theta_1 < 1$, $\tilde{y}' = \theta_2 \dfrac{dy^{(\bar{m},n)}}{dx} + (1-\theta_2)\dfrac{dy^{(\bar{m})}}{dx}$, $0 < \theta_2 < 1$. Отже, при $|h| \leq h_0$

$$\left\| \frac{dy^{(\bar{m},n)}}{dx} - \frac{dy^{(\bar{m})}}{dx} \right\|_{0,2,\hat{\bar{\omega}}_h} \leq M \left\| y^{(\bar{m},n)} - y^{(\bar{m})} \right\|_{1,2,\hat{\omega}_h},$$

звідки отримуємо

$$\left\| y^{(\bar{m},n)} - y^{(\bar{m})} \right\|^*_{1,2,\hat{\bar{\omega}}_h} \leq M q^n. \tag{38}$$

Нерівності (36), (38) дють оцінку (35).

З практичної точки зору для знаходження розв'язку різницевої схеми (19), (21) доцільніше використати ітераційний метод Ньютона. Для того щоб зменшити вплив похибок заокруглень, будемо використовувати менші величини

$$z^{(\bar{m})}_{\alpha,j} = \left.\frac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} - y^{(\bar{m})}_{\bar{x},j-1+\alpha} = O(h_{j-1+\alpha}).$$

Тоді рівняння (21) наберуть вигляду

$$z^{(\bar{m})}_{\alpha,j} = \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}} w^{(\bar{m})j}_\alpha (x_j, y^{(\bar{m})}). \tag{39}$$

Нехай $y_j^{(\bar{m},n-1)}$, $j = 1,2,\ldots,N-1$, $z^{(\bar{m},n-1)}_{\alpha,j}$, $j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1,2$, буде $(n-1)$-м наближенням до розв'язку системи (19), (39). Лінеаризуємо праві частини рівнянь (19), (39) в околі цього наближення:

$$\varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m})}) \approx \varphi^{(\bar{m})}(x_j, y^{(\bar{m},n-1)}) +$$

$$+ \frac{1}{\hbar_j} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[\frac{h_{j-1+\alpha}}{2} \left(f_{u,j+(-1)^\alpha} \left(y^{(\bar{m})}_{j+(-1)^\alpha} - y^{(\bar{m},n-1)}_{j+(-1)^\alpha} \right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + f_{\xi,j+(-1)^\alpha} \left(y^{(\bar{m})}_{\bar{x},j-1+\alpha} - y^{(\bar{m},n-1)}_{\bar{x},j-1+\alpha} + z^{(\bar{m})}_{\alpha,j} - z^{(\bar{m},n-1)}_{\alpha,j} \right) \right) + O\left(h^2_{j-1+\alpha}\right) \right],$$

$$\frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}} w^{(\bar{m})j}_\alpha (x_j, y^{(\bar{m})}) \approx \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}} w^{(\bar{m})j}_\alpha (x_j, y^{(\bar{m},n-1)}) +$$

$$+ (-1)^\alpha \frac{h_{j-1+\alpha}}{2} \left[f_{u,j+(-1)^\alpha} \left(y^{(\bar{m})}_{j+(-1)^\alpha} - y^{(\bar{m},n-1)}_{j+(-1)^\alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + f_{\xi,j+(-1)^\alpha} \left(y^{(\bar{m})}_{\bar{x},j-1+\alpha} - y^{(\bar{m},n-1)}_{\bar{x},j-1+\alpha} + z^{(\bar{m})}_{\alpha,j} - z^{(\bar{m},n-1)}_{\alpha,j} \right) \right] + O\left(h^2_{j-1+\alpha}\right),$$

де

$$f_{u,j+(-1)^\alpha} = \frac{\partial f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, y^{(\bar{m},n-1)}_{j+(-1)^\alpha}, \left.\dfrac{dy^{(\bar{m},n-1)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} \right)}{\partial u},$$

$$f_{\xi,j+(-1)^\alpha} = \frac{\partial f\left(x_{j+(-1)^\alpha}, y^{(\bar m,n-1)}_{j+(-1)^\alpha}, \left.\dfrac{dy^{(\bar m,n-1)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}\right)}{\partial \xi}.$$

Якщо величини $z^{(\bar m,n)}_{\alpha,j}$ вилучити з отриманої для (19) ітераційної схеми, то спрощений ітераційний метод Ньютона буде мати вигляд

$$\nabla y^{(\bar m,n)}_{\bar x\hat x,j} - \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}P^{-1}_{j+(-1)^\alpha}\left(f_{u,j+(-1)^\alpha}\nabla y^{(\bar m,n)}_{j+(-1)^\alpha} + f_{\xi,j+(-1)^\alpha}\nabla y^{(\bar m,n)}_{\bar x,j-1+\alpha}\right)\right] =$$

$$= r^{(n-1)}_j + \frac{1}{\hbar_j}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}P^{-1}_{j+(-1)^\alpha} f_{\xi,j+(-1)^\alpha}\delta^{(n-1)}_{\alpha,j}\right], \quad j=1,2,\ldots,N-1, \tag{40}$$

$$\nabla y^{(\bar m,n)}_0 = 0, \quad \nabla y^{(\bar m,n)}_N = 0, \qquad y^{(\bar m,n)}_j = y^{(\bar m,n-1)}_j + \nabla y^{(\bar m,n)}_j, \quad n=1,2,\ldots,$$

$$\nabla z^{(\bar m,n)}_{\alpha,j} = P^{-1}_{j+(-1)^\alpha}\left[(-1)^\alpha\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}\left(f_{u,j+(-1)^\alpha}\nabla y^{(\bar m,n)}_{j+(-1)^\alpha} + f_{\xi,j+(-1)^\alpha}\nabla y^{(\bar m,n)}_{\bar x,j-1+\alpha}\right) +\right.$$

$$\left. +\delta^{(n-1)}_{\alpha,j}\right], \qquad z^{(\bar m,n)}_{\alpha,j} = z^{(\bar m,n-1)}_{\alpha,j} + \nabla z^{(\bar m,n)}_{\alpha,j}, \qquad n=1,2,\ldots, \tag{41}$$

$$\left.\frac{dy^{(\bar m,n)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = y^{(\bar m,n)}_{\bar x,j-1+\alpha} + z^{(\bar m,n)}_{\alpha,j}, \quad j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha, \quad \alpha=1,2,$$

де

$$P_{j+(-1)^\alpha} = I + (-1)^{\alpha+1}\frac{h_{j-1+\alpha}}{2}f_{\xi,j+(-1)^\alpha}, \quad I \text{ — одинична матриця},$$

$$r^{(n)}_j = \varphi^{(\bar m)}\left(x_j, y^{(\bar m,n)}\right) - y^{(\bar m,n)}_{\bar x\hat x,j}, \quad \delta^{(n)}_{\alpha,j} = \frac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}w^{(\bar m)j}_\alpha(x_j, y^{(\bar m,n)}) - z^{(\bar m,n)}_{\alpha,j},$$

$$y^{(\bar m,0)}(x_j) = (1-x_j)\mu_1 + x_j\mu_2, \quad j=1,2,\ldots,N-1,$$

$$z^{(\bar m,0)}_{\alpha,j} = w^{(\bar m)j}_\alpha(x_j, y^{(\bar m,0)}), \quad j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha, \quad \alpha=1,2.$$

Зауважимо, що матриця системи лінійних рівнянь (40) є блочною тридіагональною.

4. Алгоритм апостеріорної оцінки похибки та вибору вузлів сітки. Для того щоб побудувати алгоритм, який автоматично генерує сітку, так щоб забезпечити задану точність наближеного розв'язку, можна використовувати різні стратегії. Часто використовують класичну стратегію $h - h/2$ (екстраполяцію Річардсона). Основним недоліком цієї стратегії є те, що сітка для різницевої схеми (19), (21) може бути лише рівномірною або квазірівномірною.

Розглянемо підхід до автоматичного вибору точок сітки, який ґрунтується на такій простій ідеї. На підставі теореми 2 різницева схема (19), (21) має порядок точності $\bar m$, який є парним цілим числом. Щоб отримати різницеві схеми порядків $\bar m$ і $\bar m + 2$, слід розв'язати задачі Коші (10) за один крок однокроковими методами (13), (14) відповідних порядків. Використаємо вкладені методи Рунге – Кутта порядків $\bar m$ і $\bar m + 2$. Тоді апостеріорна оцінка похибки для різницевої схеми (19), (21) задається формулою $\left\|y^{(\bar m)} - y^{(\bar m+2)}\right\|^*_{1,2,\hat{\bar\omega}_h}$, оскільки

$$\left\|y^{(\bar{m})}-y^{(\bar{m}+2)}\right\|^{*}_{1,2,\hat{\bar{\omega}}_h}=\left\|y^{(\bar{m})}-u\right\|^{*}_{1,2,\hat{\bar{\omega}}_h}+O\left(|h|^{\bar{m}+1}\right).$$

Співвідношення (17), (18) і теорема 2 гарантують, що похибка наближеного розв'язку крайової задачі (1) знаходиться в межах заданої допустимої точності ε за умови, що для кожного $j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha$ і $\alpha=1,2$ розв'язки задач Коші (10) на кожному з інтервалів $[x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}]$ обчислені з точністю ε. Розв'язуючи задачі Коші (10) з точністю ε за допомогою вкладених методів Рунге – Кутта, ми можемо побудувати нерівномірну сітку $\hat{\bar{\omega}}_h$. (Детальний опис алгоритму автоматичного вибору розміру кроку за допомогою вкладених методів Рунге – Кутта див., наприклад, в [11, с. 167].) Таким чином, за умови, що $\left\|y^{(\bar{m})}-y^{(\bar{m}+2)}\right\|^{*}_{1,2,\hat{\bar{\omega}}_h}<\varepsilon$, ми обчислимо наближений розв'язок задачі (1) за допомогою різницевої схеми (19), (21) з точністю ε.

Опишемо алгоритм розв'язування крайової задачі з заданою точністю ε за допомогою триточкових різницевих схем порядку точності $\bar{m}+2$ і $\bar{m}$.

1. Задати ε.

2. Задати $n:=0$. Визначити початкове наближення, наприклад,

$$y^{(\bar{m}+2,0)}(x_j)=(1-x_j)\mu_1+x_j\mu_2,\quad j=1,2,\ldots,N-1,$$

$$\left.\frac{dy^{(\bar{m}+2,0)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}=y^{(\bar{m}+2,0)}_{\bar{x},j-1+\alpha},\quad j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\quad \alpha=1,2.$$

3. Чисельно розв'язати задачі Коші (10) з заданою точністю ε за допомогою вкладених методів Рунге – Кутта порядків точності $\bar{m}$ і $\bar{m}+2$ та вибрати сітку $\hat{\bar{\omega}}_h$.

4. Обчислити $\varphi^{(\bar{m}+2)}(x_j,y^{(\bar{m}+2,n)})$ згідно з (20) для всіх $j=1,2,\ldots,N-1$ і $\dfrac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}w_\alpha^{(\bar{m}+2)j}(x_j,y^{(\bar{m}+2,n)})$ для $j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2$.

5. Задати $z^{(\bar{m}+2,n)}_{\alpha,j}:=\dfrac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}w_\alpha^{(\bar{m}+2)j}(x_j,y^{(\bar{m}+2,n)})$, $j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha$, $\alpha=1,2$.

6. Задати $n:=n+1$.

7. Знайти $y_j^{(\bar{m}+2,n)}$, $j=1,2,\ldots,N-1$, розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (40) з блочною тридіагональною матрицею.

8. Обчислити $z^{(\bar{m}+2,n)}_{\alpha,j}$, $\left.\dfrac{dy^{(\bar{m}+2,n)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2$, за допомогою формул (41).

9. Якщо $\left\|\dfrac{y^{(\bar{m}+2,n)}-y^{(\bar{m}+2,n-1)}}{\max\left(\left|y^{(\bar{m}+2,n)}\right|,1\right)}\right\|^{*}_{1,2,\hat{\bar{\omega}}_h}>0,5\varepsilon$, то перейти на крок 5, інакше $y_j^{(\bar{m}+2)}=$ $=y_j^{(\bar{m}+2,n)}$, $j=0,1,\ldots,N$, $\left.\dfrac{dy^{(\bar{m}+2)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}=\left.\dfrac{dy^{(\bar{m}+2,n)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $j=2-\alpha,3-$ $-\alpha,\ldots,N+1-\alpha,\ \alpha=1,2$.

10. Обчислити $\varphi^{(\bar{m})}(x_j,y^{(\bar{m},n)})$ згідно з (20) для всіх $j=1,2,\ldots,N-1$ та $\dfrac{(-1)^\alpha}{h_{j-1+\alpha}}w_\alpha^{(\bar{m})j}(x_j,y^{(\bar{m},n)})$ для $j=2-\alpha,3-\alpha,\ldots,N+1-\alpha\ \alpha=1,2$.

11. Знайти розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь (40) $y_j^{(\bar{m})} \equiv y_j^{(\bar{m},n)}$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$ і обчислити $\left.\dfrac{dy^{(\bar{m})}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = \left.\dfrac{dy^{(\bar{m},n)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}}$, $j = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+1-\alpha$, $\alpha = 1, 2$, за допомогою (41).

12. Якщо $\left\| \dfrac{y^{(\bar{m}+2)} - y^{(\bar{m})}}{\max\left(\left|y^{(\bar{m}+2)}\right|, 1\right)} \right\|^*_{1,2,\hat{\bar{\omega}}_h} > \varepsilon$, то $n := 0$; знайти нове початкове наближення, інтерполюючи значення $y_i^{(\bar{m}+2)}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $\left.\dfrac{dy^{(\bar{m}+2)}}{dx}\right|_{x=x_{i+(-1)^\alpha}}$, $i = 2-\alpha, 3-\alpha, \ldots, N+$ $+1-\alpha$, $\alpha = 1, 2$, за формулами

$$y_j^{(\bar{m}+2,0)} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \left[y_i^{(\bar{m}+2)}(x_j - x_{i-1}) + y_{i-1}^{(\bar{m}+2)}(x_i - x_j) \right], \quad x_j \in (x_{i-1}, x_i),$$

$$\left.\frac{dy^{(\bar{m}+2,0)}}{dx}\right|_{x=x_{j+(-1)^\alpha}} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \left[\left.\frac{dy^{(\bar{m}+2)}}{dx}\right|_{x=x_i} (x_{j+(-1)^\alpha} - x_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + \left.\frac{dy^{(\bar{m}+2)}}{dx}\right|_{x=x_{i-1}} (x_i - x_{j+(-1)^\alpha}) \right], \quad x_{j+(-1)^\alpha} \in (x_{i-1}, x_i),$$

перейти на крок 3.

13. Кінець.

5. Числові приклади.

***Приклад* 1.** Розглянемо крайову задачу

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{du}{dx}\right)^2, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0, \tag{42}$$

з відомим точним розв'язком $u(x) = -\ln(x + e^{-1}(1-x))$. Для чисельного розв'язування задачі (42) на рівномірній сітці $\bar{\omega}_h = \{x_j = jh, j = 0, 1, \ldots, N, h = 1/N\}$ застосовувалася ТРС (19), (21) шостого порядку точності ($m = \bar{m} = 6$). Задачі Коші (10) розв'язувалися за допомогою явного методу Рунге – Кутта шостого порядку точності (див. таблицю 6.1 [11, с. 202]). Для знаходження розв'язку різницевої схеми (19) використовувався ітераційний метод Ньютона (40), (41) з $P_{j+(-1)^\alpha} = I$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею (40) відносно невідомих $\nabla y^{(6,n)}(x)$, $x \in \hat{\bar{\omega}}_h$ розв'язувалася методом виключення Гаусса.

Для досягнення заданої точності EPS використовувався алгоритм $h - h/2$ оцінки апостеріорної точності. Результати чисельного розв'язування задачі наведено в табл. 1. Порівняння з похибкою

$$Er = \left\| y^{(6)} - u \right\|^*_{1,2,\bar{\omega}_h}$$

показує, що точності досягнуто. Для порівняння ця задача розв'язувалася ТРС шостого порядку точності (див. [5, 7]) за допомогою стратегії $h - h/2$. Числові результати наведено в табл. 2 (див. [7, с. 119]).

Слід зазначити, що чисельний розв'язок, отриманий за допомогою схеми (19), (21), є більш точним і вимагає менших обчислювальних затрат.

Таблиця 1

EPS	*N*	*Er*
10^{-4}	8	$0.4461{\cdot}10^{-6}$
10^{-6}	16	$0.3977{\cdot}10^{-9}$
10^{-8}	64	$0.1804{\cdot}10^{-9}$

Таблиця 2

EPS	*N*	*Er*
10^{-4}	128	$0.4899{\cdot}10^{-5}$
10^{-6}	1024	$0.8035{\cdot}10^{-7}$
10^{-8}	8192	$0.1047{\cdot}10^{-8}$

Таблиця 3

EPS	N	$NFUN$	Er
10^{-4}	256	53760	$0.1858{\cdot}10^{-7}$
10^{-6}	256	68096	$0.8991{\cdot}10^{-10}$
10^{-8}	512	139776	$0.2088{\cdot}10^{-11}$

Таблиця 4

EPS	N	$NFUN$	Er
10^{-4}	27	5292	$0.9138{\cdot}10^{-5}$
10^{-6}	82	13776	$0.2203{\cdot}10^{-8}$
10^{-8}	258	43358	$0.13914{\cdot}10^{-11}$

***Приклад* 2.** Розглянемо крайову задачу (див. [15])

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2}+\left(\frac{du}{dx}\right)^2=1,\quad x\in(0,1),$$
$$u(0)=1+\varepsilon\ln\cosh(-0,745/\varepsilon),\quad u(1)=1+\varepsilon\ln\cosh(0,255/\varepsilon) \tag{43}$$

з точним розв'язком $u(x)=1+\varepsilon\ln\cosh((x-0,745)/\varepsilon)$. В табл. 3 для $\varepsilon=10^{-1}$ наведено похибку (Er) різницевої схеми (19), (21) шостого порядку точності ($m=\bar{m}=6$) і кількість обчислень правих частин диференціального рівняння ($NFUN$) для заданої точності EPS, використовуючи стратегію $h-h/2$. В табл. 4 наведено результати, отримані за допомогою алгоритму, запропонованого в цій статті, використовуючи вкладені методи Рунге – Кутта (див. [16]). На підставі порівняння результатів табл. 3 і 4 ми можемо зробити висновок, що запропонований алгоритм вимагає меншої кількості обчислень правих частин диференціального рівняння у порівнянні зі стратегією $h-h/2$.

Література

1. V. L. Makarov, A. A. Samarskii, *Exact three-point difference schemes for second-order nonlinear ordinary differential equations and their implementation*, Soviet Math. Dokl., **41**, № 3, 495 – 500 (1991).

2. M. V. Kutniv, V. L. Makarov, A. A. Samarskii, *Accurate three-point difference schemes for second-order nonlinear ordinary differential equations and their implementation*, Comput. Math. and Math. Phys., **39**, № 1, 45 – 60 (1999).
3. M. V. Kutniv, *Accurate three-point difference schemes for second-order monotone ordinary differential equations and their implementation*, Comput. Math. and Math. Phys., **40**, № 3, 368 – 382 (2000).
4. M. V. Kutniv, *Modified three-point difference schemes of high-accuracy order for second order nonlinear ordinary differential equations*, Comput. Methods Appl. Math., **3**, № 2, 287 – 312 (2003).
5. L. B. Gnativ, M. V. Kutniv, A. I. Chukhrai, *Generalized three-point difference schemes of high order of accuracy for nonlinear ordinary differential equations of second order*, J. Math. Sci., **167**, № 1, 62 – 75 (2010).
6. M. Krol, M. V. Kutniv, *Three-point difference schemes of high-order accuracy for second-order nonlinear differential equations with boundary conditions of the third kind*, J. Comput. and Appl. Math., № 2(116), 43 – 62 (2014).
7. I. P. Gavrilyuk, M. Hermann, V. L. Makarov, M. V. Kutniv, *Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs*, Springer AG, Basel (2011).
8. M. V. Kutniv, *Three-point difference schemes of high accuracy order for systems of nonlinear ordinary differential equations of the second order*, Comput. Math. and Math. Phys., **41**, № 6, 860 – 873 (2001).
9. M. V. Kutniv, *High-order accurate three-point difference schemes for systems of second-order ordinary differential equations with a monotone operator*, Comput. Math. and Math. Phys., **42**, № 5, 724 – 738 (2002).
10. L. B. Gnativ, M. V. Kutniv, V. L. Makarov, *Generalized three-point difference schemes of high-order accuracy for systems of second order nonlinear ordinary differential equations*, Different. Equat., **45**, № 7, 998 – 1019 (2009).
11. E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1987).
12. L. B. Gnativ, M. Krol, M. V. Kutniv, *Exact three-point difference schemes for second order nonlinear differential equations with boundary conditions of the third kind*, J. Numer. Appl. Math., № 3(109), 34 – 52 (2012).
13. A. A. Samarskii, E. S. Nikolaev, *Numerical methods for grid equations*, vol. 2, *Iterative methods,* Birkhäuser, Basel etc. (1989).
14. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1980).
15. J. R. Cash, F. Mazzia, *Hybrid mesh selection algorithms based on conditioning for two-point boundary value problems*, J. Numer. Anal., Industrial and Appl. Math., **1**, № 6, 81 – 90 (2006).
16. Ch. Tsitouras, S. N. Papakostas, *Cheap error estimation for Runge – Kutta methods*, SIAM J. Sci. Comput., **20**, № 6, 2067 – 2088 (1999).

Одержано 30.09.21