DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6932

УДК 517.51

А. С. Романюк, С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ НІКОЛЬСЬКОГО – БЄСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

We obtain the order estimates of M-dimensional Kolmogorov width for the Nikol'skii – Besov classes of periodic functions of many variables with dominating mixed derivative in the metric of the space of quasicontinuous functions (QC-space).

Отримано порядкові оцінки M-вимірних колмогоровських поперечників класів Нікольського – Бєсова періодичних функцій багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною у метриці простору квазінеперервних функцій (QC-простору).

1. Вступ. У роботі продовжено вивчення асимптотичних характеристик класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною [1 – 3]. Основну увагу зосереджено на знаходженні оцінок для M-вимірних колмогоровських поперечників даних класів у метриці простору квазінеперервних функцій (QC-простору). Інтерес до відшукання порядкових оцінок апроксимативних характеристик у метриці QC-простору, який за своїми властивостями близький до L_∞, зумовлений тим, що у деяких випадках вдається одержати нові результати, які досі не встановлені у рівномірній метриці. Зокрема, для класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ знайдено точну за порядком оцінку для M-вимірного колмогоровського поперечника у випадку $d \geq 2,\ 2 \leq p \leq \infty,\ 2 \leq \theta < \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$. У зв'язку з цим зауважимо, що порядок M-вимірного колмогоровського поперечника класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторі L_∞ відомий лише у двовимірному випадку ($d = 2$) [1].

2. Означення класів функцій та апроксимативних характеристик. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. Через $L_p(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi),\ 1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір функцій f, які є 2π-періодичними за кожною змінною зі скінченною нормою

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x} \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

У подальших міркуваннях будемо розглядати лише ті функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для яких виконано умову

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) dx_j = 0, j = \overline{1, d}, \text{ майже скрізь.}$$

Множину таких функцій будемо позначати $L^0_p(\mathbb{T}^d)$.

Для функції $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, розглянемо різницю першого порядку по j-й змінній із кроком $h \in \mathbb{R}$:

© А. С. РОМАНЮК, С. Я. ЯНЧЕНКО, 2022

$$\Delta_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_d) - f(\boldsymbol{x})$$

і, відповідно, l-го порядку, $l \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^l_{h,j} f(\boldsymbol{x}) = \overbrace{\Delta_{h,j} \ldots \Delta_{h,j}}^{l} f(\boldsymbol{x}).$$

Далі, якщо $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, то мішана різниця порядку $\boldsymbol{k}$ з векторним кроком $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_d)$, $h_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, визначається рівністю

$$\Delta^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) = \Delta^{k_1}_{h_1,1} \Delta^{k_2}_{h_2,2} \ldots \Delta^{k_d}_{h_d,d} f(\boldsymbol{x}).$$

Нехай задано вектор $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$ $j = \overline{1, d}$, і параметри $1 \le p, \theta \le \infty$. Тоді простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$ можна означити таким чином:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} := B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}(\mathbb{T}^d) = \Big\{ f \in L^0_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} < \infty \Big\},$$

де норма задається рівностями

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^d} \|\Delta^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{h}} f\|^\theta_p \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta},$$

якщо $1 \le \theta < \infty$, й

$$\|f\|_{H^{\boldsymbol{r}}_p} \equiv \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} = \sup_{\boldsymbol{h}} \|\Delta^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{h}} f\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j}.$$

Також вважаємо, що для векторів $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ і $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ виконано умову $k_j > r_j$, $j = \overline{1, d}$.

У такій формі простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ було означено в роботах В. М. Темлякова [4] і С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [5] відповідно для $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Вони належать шкалі просторів мішаної гладкості, що введені С. М. Нікольським [6] і Т. І. Амановим [7]. Окрім того, вони у певному сенсі є аналогами відомих функціональних просторів Бєсова [8], а для випадку $\theta = \infty$ — Нікольського [9].

Під класом $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ будемо розуміти множину функцій $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$, для яких $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \le 1$, і при цьому збережемо для класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ ті ж позначення, що і для просторів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

При проведенні подальших міркувань нам буде зручно користуватися означенням норми функцій із класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ в дещо іншій формі, а саме, опосередковано через так зване декомпозиційне зображення елементів цих просторів. Уперше декомпозиційне зображення функцій із класів Нікольського – Бєсова та відповідне йому нормування з'явилися у роботах В. М. Темлякова (див., наприклад, [4], гл. 2, п. 1) і С. М. Нікольського та П. І. Лізоркіна [5] і, як з'ясувалося пізніше, відіграло ключову роль у дослідженнях, пов'язаних із апроксимацією класів функцій.

Для векторів $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \big\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d} \big\}$$

і для $f \in L^0_p(\mathbb{T}^d)$ позначимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Тоді класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1<p<\infty$, $1\leq\theta\leq\infty$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_d)$ $r_j>0$, $j=\overline{1,d}$, можна означити таким чином [5]:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} := \Big\{ f\in L^0_p(\mathbb{T}^d):\ \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \leq 1 \Big\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

при $1\leq\theta<\infty$ і

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \equiv \|f\|_{H^{\boldsymbol{r}}_p} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p.$$

Тут і далі для додатних величин a і b будемо використовувати запис $a\asymp b$. Він означає, що існують додатні сталі C_1 і C_2, які не залежать від одного істотного параметра у величинах a і b таких, що $C_1 a\leq b$ (пишемо $a\ll b$) і $C_2 a\geq b$ (пишемо $a\gg b$). Всі сталі C_i, $i=1,2,\ldots$, які зустрічаються у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$. У деяких випадках цю залежність будемо вказувати в явному вигляді.

Зазначимо, що видозмінивши „блоки" $\delta_{\boldsymbol{s}}(f)$, наведене означення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ можна поширити і на крайні значення $p=1$ і $p=\infty$ (див., наприклад, [5], зауваження 2.1).

Нехай $V_l(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $l\in\mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_l(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1-\frac{k-l}{l}\right)\cos kt,$$

де при $l=1$ третій доданок вважаємо рівним нулеві. Поставимо у відповідність кожному вектору $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d)$, $s_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,d}$, поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} \big(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j) \big)$$

і для $f\in L^0_p(\mathbb{T}^d)$, $1\leq p\leq\infty$, покладемо

$$A_{\boldsymbol{s}}(f) := A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}),$$

де $*$ означає операцію згортки. Тоді при $1\leq p\leq\infty$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_d)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,d}$, класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ можна означити таким чином:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} := \left\{ f:\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1, 1\leq\theta<\infty \right\},$$

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} := \Big\{ f : \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p \le 1 \Big\}.$$

Тепер означимо асимптотичну характеристику, яку будемо досліджувати.

Нехай $\mathscr{X}$ — нормований простір і Φ — центрально-симетрична множина в $\mathscr{X}$, L_M — підпростір розмірності M простору $\mathscr{X}$. Тоді величина

$$d_M\big(\Phi, \mathscr{X}\big) = \inf_{L_M} \sup_{f\in\Phi} \inf_{u\in L_M} \|f-u\|_{\mathscr{X}}$$

називається M-вимірним колмогоровським поперечником множини Φ у просторі $\mathscr{X}$. Поперечник $d_M\big(\Phi, \mathscr{X}\big)$ увів у 1936 р. А. М. Колмогоров [10], і він характеризує апроксимативні властивості M-вимірних підпросторів. Задачі, які пов'язані з оцінками колмогоровських поперечників різного роду функціональних класів, знаходяться в полі зору багатьох математиків. Дослідженню M-вимірних колмогоровських поперечників класів Нікольського – Бєсова у просторах $\mathscr{X}$ присвячено, зокрема, роботи [1 – 3, 11 – 19]. Із дослідженням різних апроксимативних характеристик, серед яких і колмогоровські поперечники, класів Нікольського, Нікольського – Бєсова та Соболєва періодичних функцій можна ознайомитися у монографіях [4, 20 – 22], де наведено детальну бібліографію.

Означимо простір, у метриці якого будемо знаходити оцінки для M-вимірних колмогоровських поперечників.

Для функції $f \in L_1(\mathbb{T})$ з рядом Фур'є

$$f \sim \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s(f,x),$$

$$\delta_0(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad \delta_s(f,x) = \sum_{2^{s-1}\le |k| < 2^s} \widehat{f}(k)e^{ikx}, \; s = 1,2,\ldots,$$

покладемо

$$\|f\|_{QC} \equiv \int_0^1 \left\| \sum_{s=0}^{\infty} r_s(t)\delta_s(f,x) \right\|_{\infty} dt, \tag{1}$$

де $\big\{r_s(t)\big\}_{s=0}^{\infty}$ — система Радемахера (див. [23], гл. 2, § 1). Тоді простором квазінеперервних функцій (позначення QC) будемо називати замикання множини тригонометричних поліномів за нормою (1).

Зазначимо, що простір квазінеперервних функцій QC введено у роботі [24] (див. також [25]). Для зручності нагадаємо деякі його властивості.

Якщо $f \in L_1(\mathbb{T})$ і

$$F(x,t) = \sum_{s=0}^{\infty} r_s(t)\delta_s(f,x),$$

то

$$\inf_t \|F(\cdot,t)\|_{\infty} \le \|f\|_{QC} \le \sup_t \|F(\cdot,t)\|_{\infty},$$

$$\|f\|_{QC} \geq \left\| \int\limits_0^1 |F(x,t)dt| \right\|_\infty \gg \left\| \left(\sum_{s=0}^{\infty} |\delta_s(f,x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_\infty ,$$

$$\|f\|_{QC} \leq \sum_{s=0}^{\infty} \|\delta_s(f)\|_\infty .$$

Простір квазінеперервних функцій у багатовимірному випадку ($d \geq 2$) означимо таким чином:

$$\|f\|_{QC} \equiv \big\| \|f(\cdot, \boldsymbol{x}^1)\|_{QC} \big\|_\infty, \tag{2}$$

де для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}^d$ покладаємо $\boldsymbol{x}^1 = (x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$, тобто в (2) беремо QC-норму за змінною x_1 і $\sup$-норму за рештою змінних.

З дослідженнями питань, пов'язаних із використанням QC-норми, можна ознайомитися у роботах [26, 27]. Зазначимо, що у даних роботах доведено, що C- та QC-норми є нееквівалентними у просторі тригонометричних поліномів.

Якщо $\mathfrak{M}$ — деяка скінченна множина, то через $|\mathfrak{M}|$ будемо позначати кількість її елементів.

3. Основні результати. У подальших міркуваннях будемо вважати, що вектор $\boldsymbol{r}$, який входить в означення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, має вигляд $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$.

Теорема 1. *Нехай* $d \geq 2,\ 2 \leq p \leq \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$. *Тоді при* $2 \leq \theta < \infty$ *справджується оцінка*

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}, \tag{3}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Зауважимо, що тут і далі під записом $\log a,\ a > 0$, будемо розуміти $\log_2 a$.

Доведення. Для встановлення оцінки (3) розглянемо спочатку випадок $p = 2$.

Для $n \in \mathbb{N},\ n \geq d,\ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d),\ s_i \in \mathbb{N},\ i = \overline{1,d},\ \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ покладемо

$$Q_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\mathbf{1}) \leq n} \rho(\boldsymbol{s}), \Delta Q_n = Q_n \backslash Q_{n-1}$$

і розглянемо множину вигляду

$$\mathfrak{N}_j = \big\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) : (\boldsymbol{s}, \mathbf{1}) = j \big\}.$$

Для кількості елементів множини

$$\Delta Q_j = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \rho(\boldsymbol{s})$$

будемо мати оцінку

$$|\Delta Q_j| = \sum_{(\boldsymbol{s},1)=j} 2^{(\boldsymbol{s},\mathbf{1})} = 2^j \sum_{(\boldsymbol{s},1)=j} 1 \asymp 2^j j^{d-1}.$$

Далі підберемо число $l \in \mathbb{N}$ у відповідності зі співвідношенням $2^l l^{d-1} \asymp M$ і покладемо

$$M_j = \begin{cases} 2^j j^{d-1}, & d \leq j \leq l, \\ \big[2^{l\left(r_1 + \frac{1}{2}\right)} l^{d-1} 2^{-j\left(r_1 - \frac{1}{2}\right)}\big] + 1, & l < j < \alpha l, \end{cases}$$

де

$$\alpha = \frac{r_1 + \dfrac{1}{2}}{r_1 - \dfrac{1}{2}}.$$

Тут і далі $[a]$ позначає цілу частину числа a.

Переконаємося, що $\sum_{d \le j < \alpha l}^{\infty} M_j \ll M$ при $r_1 > \dfrac{1}{2}$. Маємо

$$\sum_{d \le j < \alpha l}^{\infty} M_j \ll \sum_{j=d}^{l} 2^j j^{d-1} + \sum_{l < j < \alpha l} 2^{l\left(r_1 + \frac{1}{2}\right)} l^{d-1} 2^{-j\left(r_1 - \frac{1}{2}\right)} + \alpha l \ll$$

$$\ll 2^l l^{d-1} + 2^{l\left(r_1 + \frac{1}{2}\right)} l^{d-1} \sum_{l < j < \alpha l} 2^{-j\left(r_1 - \frac{1}{2}\right)} + \alpha l \ll$$

$$\ll 2^l l^{d-1} + 2^{l\left(r_1 + \frac{1}{2}\right)} l^{d-1} 2^{-l\left(r_1 - \frac{1}{2}\right)} + \alpha l =$$

$$= 2^l l^{d-1} + 2^l l^{d-1} + \alpha l \asymp 2^l l^{d-1} \asymp M.$$

Для подальшого викладу нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема A [4, с. 11]**.** *Справедливою є оцінка*

$$\sum_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1}) \ge n} 2^{-\beta(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{1})} \asymp 2^{-\beta n} n^{d-1}, \quad \beta > 0. \tag{4}$$

Отже, нехай $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}$ і $\theta \in (2, \infty)$. Тоді, використовуючи спочатку нерівність Гельдера з показником $\dfrac{\theta}{2}$, а потім співвідношення (4), маємо

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_2 = \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} 2^{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} 2^{-2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\frac{\theta}{\theta - 2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \le$$

$$\ll \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} 2^{-2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})\frac{\theta}{\theta - 2}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}} \ll 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)}. \tag{5}$$

Тепер нехай $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,2}$. Тоді можемо записати

$$\left\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_2 = \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^{-jr_1} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} 2^{2(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll 2^{-jr_1} \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{2,2}} \le 2^{-jr_1}. \tag{6}$$

Таким чином, для $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}$, $2 \leq \theta < \infty$, враховуючи (5) і (6), отримуємо

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_2 \ll 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{7}$$

Підмножину тригонометричних поліномів вигляду

$$\tau(f) = \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f),$$

для яких виконується (7), позначимо $B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}(j)$.

Далі нам знадобиться ще одне допоміжне твердження, яке випливає безпосередньо з означення колмогоровського поперечника.

Лема Б. *Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір, $W, W_1, \ldots, W_l, \ldots$ — підмножини $\mathscr{X}$ і $N_l \in \mathbb{Z}_+$. Тоді якщо*

$$\sum_l N_l \leq N \quad i \quad W \subset \bigcup_l W_l,$$

то

$$d_N\big(W, \mathscr{X}\big) \leq \sum_l d_{N_l}(W_l, \mathscr{X}). \tag{8}$$

Таким чином, використовуючи лему Б, записуємо

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}, QC\big) \ll \sum_{d \leq j < \alpha l} d_{M_j}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}(j), QC\big) + \sup_{f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}} \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},1) \geq \alpha l} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_{QC} = I_1 + I_2. \tag{9}$$

Оцінимо спочатку доданок I_2, скориставшись відомим твердженням.

Для будь-якої множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ через $\mathcal{T}(\Lambda)$ будемо позначати множину тригонометричних поліномів t вигляду

$$t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d.$$

У випадку, коли множина Λ симетрична відносно початку координат ($\Lambda = -\Lambda$), покладемо

$$\mathcal{T}_r(\Lambda) = \big\{ t \in \mathcal{T}(\Lambda) \colon c_{\boldsymbol{k}} = \overline{c}_{-\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k} \in \Lambda \big\}.$$

Теорема А ([4], гл. 1, теорема 2.1)**.** *Нехай $f \in \mathcal{T}(Q_n)$. Тоді при $1 \leq p < \infty$ виконується порядкова нерівність*

$$\|f\|_\infty \ll 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_p. \tag{10}$$

Зауважимо, що нерівність (10) залишається правильною і у випадку, коли $f \in \mathcal{T}(\Delta Q_n)$.

Згідно з означенням та властивостями QC-норми, оцінками (7) і (10) при $p = 2$, для будь-якої $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}$ маємо

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_{QC} \ll 2^{\frac{j}{2}} j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{2}\right)} \Big\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_2 \ll$$

$$\ll 2^{\frac{j}{2}} j^{\frac{d-1}{2}} 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} = 2^{-j\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{11}$$

Отже, враховуючи (11) і значення α, для величини I_2 можемо записати

$$I_2 = \sup_{f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}} \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},1) \geq \alpha l} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_{QC} \leq \sup_{f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}} \left\| \sum_{j=[\alpha l]+1}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_{QC} \ll$$

$$\ll \sup_{f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}} \sum_{j=[\alpha l]+1}^{\infty} \left\| \sum_{\boldsymbol{s} \in \mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_{QC} \ll \sum_{j=[\alpha l]+1}^{\infty} 2^{-j\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$

$$\ll 2^{-\alpha l\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} (\alpha l)^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \ll 2^{-l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{12}$$

Для оцінки доданка I_1 скористаємося допоміжним твердженням.

Нехай $\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2$ позначає одиничну L_2-кулю у просторі поліномів $\mathcal{T}(\Delta Q_n)$.

Лема В [25]. *Має місце оцінка*

$$d_M\big(\mathcal{T}(\Delta Q_n)_2, QC\big) \ll n^{\frac{1}{2}} (|\Delta Q_n|/M)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Попередньо зауважимо, що у відповідності з означенням чисел M_j виконується рівність

$$d_{M_j}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}(j), QC\big) = 0, \quad d \leq j \leq l.$$

Тому, використовуючи оцінку (13) і враховуючи вибір чисел M_j, маємо

$$I_1 = \sum_{d \leq j < \alpha l} d_{M_j}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}(j), QC\big) = \sum_{l < j < \alpha l} d_{M_j}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}(j), QC\big) \ll$$

$$\ll \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} j^{\frac{1}{2}} M_j^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} j^{\frac{d-1}{2}} 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll$$

$$\ll 2^{-\frac{l}{2}\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{-\frac{d-1}{2}} \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} j^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{j}{2}} j^{\frac{d-1}{2}} 2^{\frac{j}{2}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)} 2^{-jr_1} j^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= 2^{-\frac{l}{2}\left(r_1+\frac{1}{2}\right)}\, l^{-\frac{d-1}{2}} \sum_{j=l+1}^{[\alpha l]+1} 2^{-\frac{j}{2}\left(r_1-\frac{1}{2}\right)}\, j^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}\, j^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-lr_1} l^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} l^{\frac{1}{2}}. \tag{14}$$

Далі, підставляючи (12) і (14) в (9) і враховуючи, що $M \asymp 2^l l^{d-1}$, отримуємо

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}, QC\big) \ll 2^{-lr_1} l^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)}\, l^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1} \big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{15}$$

У випадку $2 < p \leq \infty$ оцінка зверху для поперечника $d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big)$ є наслідком оцінки (15) згідно з вкладенням $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}$, а саме,

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big) \ll d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}, QC\big) \ll$$
$$\ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\sqrt{\log M}. \qquad (16)$$

Оцінку зверху в теоремі 1 встановлено.

Для доведення в (3) оцінки знизу будемо використовувати існуючий зв'язок між оцінками для колмогоровських поперечників та ентропійних чисел класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Наведемо необхідні позначення і сформулюємо допоміжні твердження.

Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір і $B_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{y}, r) = \big\{x \in \mathscr{X} : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \le r\big\}$ — куля радіуса r з центром у точці $\boldsymbol{y}$.

Для компактної множини $A \subset \mathscr{X}$ і $\varepsilon > 0$ позначимо

$$N_\varepsilon(A, \mathscr{X}) = \min\left\{n : \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^n \in \mathscr{X} : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\right\}.$$

Тоді величина

$$H_\varepsilon(A, \mathscr{X}) = \log N_\varepsilon(A, \mathscr{X})$$

називається ε-ентропією множини A щодо банахового простору $\mathscr{X}$ [28].

З ε-ентропією множини A тісно пов'язане поняття її ентропійних чисел $\varepsilon_k(A, \mathscr{X})$ (див., наприклад, [29]):

$$\varepsilon_k(A, \mathscr{X}) = \inf\left\{\varepsilon : \exists \boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{2^k} \in \mathscr{X} : A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^k} B_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{y}^j, \varepsilon)\right\}.$$

Дослідження ε-ентропії і близьких до неї асимптотичних характеристик (ε-ємності, ентропійних чисел і т. п.) мають багату історію. Ентропійні числа для класів функцій однієї та багатьох змінних Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$, Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та їхніх аналогів досліджувалися, зокрема, у роботах [1, 25, 30 – 37]. З детальною бібліографією можна ознайомитись у монографіях [20, 38, 39].

Сформулюємо допоміжне твердження (див., наприклад, [25]), яке є наслідком однієї нерівності Карла (див. [40]).

Лема Г. *Нехай A — компакт у сепарабельному банаховому просторі $\mathscr{X}$. Припустимо, що для пари чисел (a, b), $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, або $a = 0$, $b < 0$ виконуються співвідношення*

$$d_m\big(A, \mathscr{X}\big) \ll m^{-a}(\log m)^b,$$
$$\varepsilon_m\big(A, \mathscr{X}\big) \gg m^{-a}(\log m)^b.$$

Тоді

$$\varepsilon_m\big(A, \mathscr{X}\big) \asymp d_m\big(A, \mathscr{X}\big) \asymp m^{-a}(\log m)^b.$$

З огляду на лему Г для доведення оцінки знизу в теоремі 1 нам достатньо отримати відповідну оцінку для ентропійних чисел $\varepsilon_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big)$. У зв'язку з цим зазначимо, що у роботі [41] встановлено, зокрема, таке твердження.

Теорема Б. *Нехай $2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{2}$. Тоді при $d \ge 2$ справджується оцінка*

$$\varepsilon_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big) \gg M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\sqrt{\log M}. \qquad (17)$$

Для зручності наведемо доведення оцінки (17).

Покажемо спочатку, що виконується співвідношення

$$\varepsilon_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, QC\big) \gg M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\sqrt{\log M}. \tag{18}$$

Нехай $N_\varepsilon(F, \mathscr{X})$ — мінімальна кількість замкнених куль радіуса $\varepsilon > 0$ простору $\mathscr{X}$, необхідних для компактного покриття множини F, а $M_\varepsilon(F, \mathscr{X})$ — максимальна кількість таких точок $x_i \in F$, що $\|x_i - x_j\|_{\mathscr{X}} > \varepsilon$, $i \neq j$. Тоді виконуються нерівності (див., наприклад, [28])

$$N_\varepsilon(F, \mathscr{X}) \le M_\varepsilon(F, \mathscr{X}) \le N_{\frac{\varepsilon}{2}}(F, \mathscr{X}). \tag{19}$$

Далі для парних n і $d \ge 2$ позначимо

$$Y^d_n = \left\{\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s} = (2l_1, \ldots, 2l_d), l_1 + \ldots + l_d = \frac{n}{2}, \boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^d\right\},$$

$$\mathscr{D}_n = \bigcup_{\boldsymbol{s} \in Y^d_n} \rho(\boldsymbol{s})$$

і $\mathcal{T}_r(\mathscr{D}_n)$ — простір дійсних тригонометричних поліномів $t \in \mathcal{T}(\mathscr{D}_n)$. При цьому зауважимо, що для кількості елементів множин $\mathscr{D}_n$ справджується співвідношення $|\mathscr{D}_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

У [25] (див. також [34]) для кожного n побудовано набір функцій $\{f^n_i\}^{A_n}_{i=1}$, $f^n_i \in \mathcal{T}_r(\mathscr{D}_n)$, які мають такі властивості:

$$\begin{aligned} &\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f^n_i)\|_\infty \le 1, \quad \boldsymbol{s} \in Y^d_n, \\ &\|f^n_i - f^n_j\|_{QC} \ge C(d) n^{\frac{d}{2}}, \quad i \neq j, \\ &A_n \ge 2^{\frac{|\mathscr{D}_n|}{2}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Покажемо, що кожна функція з множини

$$F_n = \left\{C(\theta, d) 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} f^n_i\right\}^{A_n}_{i=1}$$

з деякою сталою $C(\theta, d)$ належить класу $B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$.

Маємо

$$\|f^n_i\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathscr{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f^n_i)\|^\theta_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathscr{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f^n_i)\right\|^\theta_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathscr{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}\|^\theta_1 \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f^n_i)\right\|^\theta_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathscr{D}_n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f^n_i)\|_\infty\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{nr_1} n^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Отже, $F_n \subset B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$.

Тепер, беручи до уваги (19) і використовуючи другу властивість для функцій із (20), можемо записати

$$\varepsilon_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, QC\big) \gg \varepsilon_M\big(F_n, QC\big) \gg$$
$$\gg 2^{-nr_1} n^{-\frac{d-1}{\theta}} n^{\frac{d}{2}} = 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)} n^{\frac{1}{2}} \asymp M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}.$$

Оцінку (18) встановлено.

Оскільки для $1 \le p < \infty$ має місце вкладення $B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, то, використовуючи оцінку (18), зокрема, і для $2 \le p \le \infty,\ 2 \le \theta < \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$, маємо

$$\varepsilon_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big) \gg \varepsilon_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, QC\big) \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \sqrt{\log M}. \tag{21}$$

Зіставляючи оцінку (21) з (16) і застосовуючи лему Г, одержуємо твердження теореми.

Теорему 1 доведено.

Зауважимо, що у теоремі 1 залишився не розглянутим, зокрема, випадок $1 \le \theta < 2$. У наступному твердженні для цих значень параметра θ встановимо оцінку зверху для величин $d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big),\ 2 \le p \le \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p \le \infty,\ r_1 > \dfrac{1}{2}$. *Тоді при* $1 \le \theta < 2$ *і* $d \ge 2$ *справджується оцінка*

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big) \ll M^{-r_1} \big(\log^{d-1} M\big)^{r_1} \sqrt{\log M}. \tag{22}$$

Доведення. Оцінку (22) встановимо за схемою, яку було використано при доведенні оцінки зверху в теоремі 1. При цьому будемо використовувати всі позначення з теореми 1 і акцентуватимемо увагу на відмінностях, а саме, нам необхідно у співвідношенні (9) оцінити доданки I_1 та I_2 у випадку $1 \le \theta < 2$.

Нехай $p = 2$ і $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}$, де $1 \le \theta < 2$. Тоді, використовуючи нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{v_2}\right)^{\frac{1}{v_2}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{v_1}\right)^{\frac{1}{v_1}},\ 0 < v_1 \le v_2 < \infty$$

(див. [42, с. 43]), записуємо

$$\Big\| \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Big\|_2 = \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le 2^{-jr_1} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathfrak{N}_j} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_2^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll 2^{-jr_1} \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}} \le 2^{-jr_1}. \tag{23}$$

Далі з урахуванням співвідношення (23) маємо

$$I_2 \ll 2^{-l\left(r_1+\frac{1}{2}\right)} l^{\frac{d-1}{2}} \tag{24}$$

і

$$I_1 \ll 2^{-lr_1} l^{\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Підставляючи (24) і (25) у (9), отримуємо

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}, QC\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1}\sqrt{\log M}$$

і для $2 < p \leq \infty$ згідно з вкладенням $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}$ маємо

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, QC\big) \ll d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{2,\theta}, QC\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{d-1} M\big)^{r_1}\sqrt{\log M}.$$

Теорему 2 доведено.

Насамкінець зазначимо, що встановлена в теоремі 1 точна за порядком оцінка M-вимірного колмогоровського поперечника класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторі QC доповнює відповідні результати для класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ та Нікольського $H^{\boldsymbol{r}}_p$, $1 < p \leq \infty$, встановлені Б. С. Кашиним і В. М. Темляковим [25].

Крім того, у двовимірному випадку встановлена в теоремі 1 оцінка M-вимірного колмогоровського поперечника класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ збігається за порядком з відповідною оцінкою у просторі L_∞, яку, як зазначено вище, отримано в роботі [1].

Література

1. A. S. Romanyuk, *Entropy numbers and widths for the Nikol'skii – Besov classes of functions of many variables in the space* L_∞, Anal. Math., **45**, № 1, 133 – 151 (2019).
2. А. С. Романюк, *Энтропийные числа и поперечники классов* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных*, Укр. мат. журн., **68**, № 10, 1403 – 1417 (2016).
3. А. С. Романюк, *Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольського – Бесова периодических функций многих переменных*, Укр. мат. журн., **67**, № 11, 1540 – 1556 (2015).
4. В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178**, 1 – 112 (1986).
5. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187**, 143 – 161 (1989).
6. С. М. Никольский, *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера*, Сиб. мат. журн., **4**, № 6, 1342 – 1364 (1963).
7. Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ *и* $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leq x_j \leq 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **77**, 5 – 34 (1965).
8. О. В. Бесов, *Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **60**, 42 – 81 (1961).
9. С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **38**, 244 – 278 (1951).
10. A. Kolmogoroff, *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Ann. Math., **37**, 107 – 111 (1936).
11. Э. М. Галеев, *Поперечники классов Бесова* $B^r_{p,\theta}(\mathbb{T}^d)$, Мат. заметки, **69**, № 5, 656 – 665 (2001).
12. А. С. Романюк, *К вопросу об оценках колмогоровских поперечников классов* $B^r_{p,\theta}$ *в пространстве* L_q, Укр. мат. журн., **53**, № 7, 996 – 1001 (2001).
13. А. С. Романюк, *Колмогоровские поперечники классов Бесова* $B^r_{p,\theta}$ *в метрике пространства* L_∞, Укр. мат. вісн., **2**, № 2, 201 – 218 (2005).
14. А. С. Романюк, *Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных*, Мат. сб., **197**, № 1, 71 – 96 (2006).
15. А. С. Романюк, *Колмогоровські поперечники і білінійні наближення класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних*, Укр. мат. журн., **70**, № 2, 224 – 235 (2018).

16. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі* $B_{\infty,1}$, Укр. мат. журн., **71**, № 2, 271 – 282 (2019).
17. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних*, Укр. мат. журн., **71**, № 8, 1102 – 1115 (2019).
18. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського – Бєсова*, Укр. мат. вісн., **17**, № 3, 372 – 395 (2020).
19. А. С. Романюк, С. Я. Янченко, *Оцінки апроксимаційних характеристик і властивості операторів найкращого наближення класів періодичних функцій у просторі* $B_{1,1}$, Укр. мат. журн., **73**, № 8, 1102 – 1119 (2021).
20. D. Dũng, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Adv. Courses Math., CRM Barselona, Birkhäuser (2018).
21. А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, Праці Ін-ту математики НАН України, **93** (2012).
22. V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic function*, Nova Sci. Publ., Inc., New York (1993).
23. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, Москва (1984).
24. Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *Об одной норме и связанных с ней приложениях*, Мат. заметки, **64**, № 4, 637 – 640 (1998).
25. Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных*, Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа, АФЦ, Москва (1999), с. 69 – 99.
26. А. О. Радомский, *О неэквивалентности* C*- и* QC*-норм в пространстве тригонометрических полиномов*, Мат. сб., **207**, № 12, 1729 – 1742 (2016).
27. А. О. Радомский, *Некоторые тригонометрические полиномы с экстремально малой равномерной нормой и их приложения*, Изв. РАН. Сер. мат., **84**, № 2, 166 – 196 (2020).
28. А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, ε*-Энтропия и* ε*-емкость множеств в функциональных пространствах*, Успехи мат. наук, **14**, № 2, 3 – 86 (1959).
29. K. Höllig, *Diameters of classes of smooth functions*, Quant. Approxim., Acad. Press, New York (1980), p. 163 – 176.
30. E. S. Belinskii, *Approximation of functions of several variables by trigonometric polinomials with given number of harmonics, and estimates of* ϵ*-entropy*, Anal. Math., **15**, 67 – 74 (1989).
31. E. S. Belinskii, *Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative*, J. Approx. Theory, **93**, 114 – 127 (1998).
32. Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *О наилучших* m*-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве* L_1, Мат. заметки, **56**, № 5, 57 – 86 (1994).
33. В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью*, Труды Мат. ин-та АН СССР, **189**, 138 – 168 (1989).
34. V. N. Temlyakov, *An inequality for trigonometric polynomials and its application for estimating the entropy numbers*, J. Complexity, **11**, 293 – 307 (1995).
35. V. N. Temlyakov, *An inequality for the entropy numbers and its application*, J. Approx. Theory, **173**, 110 – 121 (2013).
36. V. N. Temlyakov, *On the entropy numbers of the mixed smoothness function classes*, J. Approx. Theory, **217**, 26 – 56 (2017).
37. К. В. Пожарська, *Оцінки ентропійних чисел класів* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *періодичних функцій багатьох змінних у рівномірній метриці*, Укр. мат. журн., **70**, № 9, 1249 – 1263 (2019).
38. V. N. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2018).
39. R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2004).
40. G. Pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).
41. A. S. Romanyuk, S. Ya. Yanchenko, *Estimates for the entropy numbers of the Nikol'skii – Besov classes of functions with mixed smoothness in the space of quasi-continuous functions*, Math. Nachr. (accepted); mana.202100202.
42. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, Изд-во иностр. лит., Москва (1948).

Одержано 29.09.21