DOI: 10.37863/umzh.v74i3.7162

УДК 517.9

**А. Г. Нікітін** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# СУПЕРІНТЕГРОВНІ ТА МАСШТАБНО ІНВАРІАНТНІ КВАНТОВОМЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ ЗІ ЗМІННОЮ МАСОЮ

Scale invariant Schrödinger equations with position dependent mass admitting second order integrals of motion are classified.

Проведено класифікацію рівнянь Шредінгера зі змінною масою, які допускають масштабні перетворення та оператори симетрії другого порядку.

**1. Вступ.** Добре відомо, що фундаментальні рівняння математичної фізики як правило допускають досить широкі групи симетрій. В першу чергу це симетрії відносно неперервних груп перетворень залежних та незалежних змінних (ліївські симетрії). Але існує досить широкий клас узагальнених симетрій (суперсиметрії, вищи симетрії, приховані симетрії та інші), наявність яких також є типовим для фундаментальних рівнянь математичної фізики. Аналіз таких симетрій для рівнянь квантової механіки можна знайти у монографії [1].

Важливий клас рівнянь квантової механіки складають суперінтегровні рівняння Шредінгера, тобто рівняння, що допускають більше інтегралів руху, ніж кількість ступенів свободи описуваної ним системи. Як правило, вони допускають також широку ліївську симетрію і суперсиметрію. Відомим прикладом такого рівняння є рівняння для атому водню.

Дослідження ліївських симетрій є зараз досить популярною гілкою математики яка породила дуже велику кількість публікацій. Але, як це не дивно, коректна групова класифікація рівнянь Шредінгера для частинки, що взаємодіє із зовнішнім електромагнітним полем, з'явилася тільки зараз [2 – 5], хоча дослідження відповідних груп симетрії таких рівнянь розпочалися дуже давно, дивись роботи [6 – 8].

Систематичне дослідження суперінтегровних систем квантової механіки розпочалося у роботах Якова Смородинського і його учнів [9, 10], які повністю описали усі нееквівалентні рівняння Шредінгера з двома просторовими змінними, які допускають оператори симетрії першого та другого порядків. Сучасним трендом є аналіз операторів симетрії третього і навіть довільного порядків [11], дивись також [12], де запропоновано визначальні рівняння для таких операторів.

Дана робота присвячена класифікації суперінтегровних рівнянь Шредінгера зі змінною масою. Такі рівняння мають дуже широке коло застосувань у сучасній теоретичний фізиці, зокрема, у моделях напівпровідників [13], квантових рідин [14], квантових дротів і квантових точок [15], і у багатьох інших моделях.

У випадку двох просторових змінних вищи симетрії рівнянь Шредінгера зі змінною масою добре вивчені (див., наприклад, [16] та посилання, наведені у цій роботі). Але існує тільки кілька частинних результатів щодо класифікації таких рівнянь з трьома незалежними змінними [17 – 20]. Далі наведено класифікацію спеціального класу згаданих рівнянь, а саме, рівнянь, що допускають масштабні перетворення.

Про групову класифікацію стаціонарних і залежних від часу рівнянь Шредінгера зі змінною масою та споріднених систем рівнянь реакції-дифузії дивись роботи [21, 22], та [23] відповідно, згідно з якими такі рівняння не можуть бути інваріантними відносно групи Галілея на відміну від стандартного рівняння Шредінгера та його узагальнень на випадок довільного спіну [24].

Класифікація вищих симетрій тривимірних рівнянь Шредінгера зі змінною масою є дуже складною задачею, яку поки що вдається розв'язати тільки для певних класів таких рівнянь. Важливий і досить широкий клас складають рівняння, які допускають хоча би однопараметричну групу симетрії. Нееквівалентні рівняння з цього класу, що допускають інтеграли руху першого порядку зафіксовано у роботі [21].

У даній роботі пропонується класифікація згаданих рівнянь, які є інваріантними відносно масштабних перетворень. Показано, що існує досить багато цікавих рівнянь такого типу. Отримані результати є важливою складовою частиною більш загальної задачі класифікації суперінтегровних рівнянь, які допускають хоча б мінімальну ліївську симетрію.

**2. Рівняння Шредінгера зі змінною масою.** Об'єктом нашого дослідження будуть стаціонарні суперінтегровні рівняння Шредінгера зі змінним параметром маси наступного загального вигляду:

$$\hat{H}\psi = E\psi, \tag{1}$$

де

$$\hat{H} = p_a f(\mathbf{x}) p_a + V(\mathbf{x}). \tag{2}$$

У рівнянні (1) $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $p_a = -i\partial_a$, а $V(\mathbf{x})$ та $f(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2m(\mathbf{x})}$ — невідомі функції від $\mathbf{x}$, які асоціюються з потенціалом та оберненою масою відповідно. По індексам, що повторюються (у нашому випадку це індекс $a$) розуміється сумування по значенням 1, 2, 3.

У роботі [21] знайдено усі рівняння вигляду (1), що допускають хоча би один інтеграл руху першого порядку, тобто для яких можна вказати диференціальний оператор першого порядку, що комутує з гамільтоніаном (2). У роботі [20] проведено повну класифікацію спеціального класу таких рівнянь, а саме, рівнянь, інваріантних відносно групи обертань.

У даній роботі проводиться класифікація рівнянь вигляду (1), інваріантних відносно перетворень дилатації. Відповідні довільні елементи $V$ та $f$ набувають наступного вигляду [21]:

$$f = r^2 F(\varphi, \theta), \quad V = V(\varphi), \tag{3}$$

де $F(.)$ та $V(.)$ — довільні функції, $\varphi$ і $\theta$ — кути Ейлера.

Гамільтоніани (2) зі спеціальними довільними елементами (3) комутують з генератором перетворень дилатації (масштабних перетворень), що має наступний вигляд:

$$D = x_a p_a - \frac{3\mathrm{i}}{2}.$$

Наша задача полягає знайти такі з них, що додатково комутують хоча б з одним диференціальним оператором другого порядку.

**3. Група еквівалентності.** Заміни залежних та незалежних змінних називаються перетвореннями еквівалентності, якщо вони зберігають загальну форму рівняння (у нашому випадку рівняння (1)), але, можливо, змінюють довільні елементи (у нашому випадку функції $f$ s $V$). Сукупність перетворень еквівалентності має структуру групоїду [25], який може включати групи еквівалентності і деякі дискретні елементи.

У роботі [21] показано, що максимальною неперервною групою еквівалентності рівняння (1) є група C(3), тобто група конформних перетворень тривимірного евклідова простору. Генератори цієї групи мають наступний вигляд:

$$
\begin{aligned}
&P^a = p^a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad L^a = \varepsilon^{abc}x^b p^c, \\
&D = x_n p^n - \frac{3\mathrm{i}}{2}, \quad K^a = r^2 p^a - 2x^a D,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $p_a = -i\dfrac{\partial}{\partial x_a}$. Відповідні групові перетворення (явний вигляд яких можна знайти у [21]) зберігають загальну форму рівнянь (1), (2) з точністю до явних виразів для $f$ і $V$. Важливим частинним випадком цих перетворень є інверсія:

$$
x_a \to \tilde{x}_a = \frac{x_a}{x^2}, \quad \psi(\mathbf{x}) \to \tilde{x}^3\psi(\tilde{\mathbf{x}})
\tag{5}
$$

під дією якої генератори (4) перетворюються наступним чином:

$$
P_a \to K_a, \quad K_a \to P_a, \quad L_a \to L_a, \quad D \to D.
\tag{6}
$$

Але для класу рівнянь, що розглядається у даній роботі, група еквівалентності редукується до прямого добутку групи обертань (генераторами якої є компоненти кутового моменту $L_a$) та дилатації, оскільки з усіх генераторів (4) тільки $L_a$ комутують з генератором дилатації $D$. Зберігається також дискретне перетворення еквівалентності (5).

Далі перетворення з групи обертань та перетворення інверсії (5) будуть систематично використовуватися як для спрощення розрахунків, так і для селекції саме нееквівалентних рівнянь та їх симетрій.

**4. Визначальні рівняння.** Шукані інтеграли руху можна представити у наступній формі:

$$
Q = \mu^{ab}\partial_a\partial_b + \xi^a\partial_a + \eta
\tag{7}
$$

де $\mu^{ab} = \mu^{ba}$, $\xi^a$ та $\eta$ — невідомі функції від $\mathbf{x}$.

По визначенню, оператори $Q$ повинні комутувати з $\hat{H}$:

$$
[\hat{H}, Q] \equiv \hat{H}Q - Q\hat{H} = 0.
\tag{8}
$$

Умова (8) є операторним рівнянням, яке повинно виконуватись при дії операторів у правій та лівій частинах на довільну двічі інтегровну функцію. Обраховуючи комутатор і прирівнявши коефіцієнти при однакових диференціальних операторах $\dfrac{\partial}{\partial x_a}, \dfrac{\partial^2}{\partial x_a x_b}$ та $\dfrac{\partial^3}{\partial x_a x_b x_c}$, приходимо до наступної системи визначальних рівнянь:

$$
5\big(\mu_c^{ab} + \mu_b^{ac} + \mu_a^{bc}\big) = \delta^{ab}\big(\mu_c^{nn} + 2\mu_n^{cn}\big) + \delta^{bc}\big(\mu_a^{nn} + 2\mu_n^{an}\big) + \delta^{ac}\big(\mu_b^{nn} + 2\mu_n^{bn}\big),
\tag{9}
$$

$$
\big(\mu_a^{nn} + 2\mu_n^{na}\big)f - 5\mu^{an}f_n = 0,
\tag{10}
$$

$$
2f\eta_a + \xi_n^a f_n - \xi^n f_{an} + f\xi_{nn}^a + 2\mu^{an}V_n + \mu^{mn}f_{mna} = 0,
\tag{11}
$$

$$
\big(\mu_{nn}^{ab} + \xi_b^a + \xi_a^b\big)f + \mu_n^{ab}f_n - \mu^{na}f_{nb} - \mu^{nb}f_{na} - \delta^{ab}\big(\mu^{mn}f_{mn} + \xi^n f_n\big) = 0,
\tag{12}
$$

$$f\left(\mu_{nn}^{mm}+2\xi_n^n\right)+\left(\mu_m^{nn}-3\xi^m\right)f_m-5\mu^{mn}f_{mn}=0, \tag{13}$$

$$(f\eta_n)_n+\xi^nV_n+\mu^{mn}V_{mn}=0 \tag{14}$$

де $f_n=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, $\xi_n^a=\dfrac{\partial\xi^a}{\partial x_n}$, і так далі.

Щоб знайти усі гамільтоніани (2), що допускають інтеграли руху (7), необхідно знайти усі нееквівалентні розв'язки дуже складної системи рівнянь (9)–(14) для дванадцяти невідомих функцій $\mu^{ab}$, $\xi^a$, $\eta, f$ та $V$. На щастя, рівняння (12), (13) and (14) можна опустити, оскільки вони є диференціальними наслідками інших рівнянь, а змінні $\xi^a$ можна виключити. Дійсно, диференціюючи (10) по $x_a$ і проводячи сумування по індексу $a$, отримуємо рівняння (13), а та ж сама операція з (11) дає рівняння (14). З іншого боку, рівняння (13) можна отримати з (9) та (10), якщо виконуються наступні умови:

$$\begin{gathered}\hat\xi_a^b+\hat\xi_b^a=\frac{2}{3}\delta_{ab}\hat\xi_n^n,\\ 3\hat\xi^nf_n=2f\hat\xi_n^n\end{gathered}, \tag{15}$$

де $\hat\xi^a=\xi^a-\mu_n^{an}$ .

Рівняння (15) співпадають з визначальними рівняннями для операторів симетрії першого порядку, знайденими у роботі [21]. Оскільки такі оператори відомі [21], ми можемо вважати функції $\hat\xi^a$ тривіальними, тобто покласти $\xi^a=\mu_n^{an}$, що зводить рівняння (11) до наступного вигляду:

$$f\eta_a+\mu^{ab}V_b=0, \tag{16}$$

а інтеграл руху (7) зводиться до наступної форми:

$$Q=\partial_b\mu^{ab}\partial_a+\eta. \tag{17}$$

Відповідні коефіцієнтні функції $\mu^{ab}$ повинні задовольняти автономну систему рівнянь (9), які визначають конформний тензор Кіллінга. Такий тензор є лінійною комбінацією наступних тензорів (дивись, наприклад, [26]):

$$\begin{gathered}\mu_1^{ab}=\lambda_0^{ab}+\delta^{ab}\frac{\lambda_1^{cd}x^cx^d}{x^a}\varphi_1(x),\\ \mu_2^{ab}=\lambda_2^ax^b+\lambda_2^bx^a+\delta^{ab}\lambda_3^cx^c\varphi_2(x),\\ \mu_3^{ab}=(\varepsilon^{acd}\lambda_3^{cb}+\varepsilon^{bcd}\lambda_3^{ca})x^d,\\ \mu_4^{ab}=(x^a\varepsilon^{bcd}+x^b\varepsilon^{acd})x^c\lambda_4^d,\\ \mu_5^{ab}=\delta^{ab}\varphi_5(x)+k(x^ax^b-\delta^{ab}x^2),\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\mu_6^{ab}=\lambda_6^{ab}x^2-(x^2\lambda^{bc}+x^b\lambda^{ac})x^c+\delta^{ab}\lambda_7^{cd}x^cx^d\varphi_6(x),\\ \mu_7^{ab}=(x^a\lambda_7^b+x^b\lambda^a)x^2-4x^ax^b\lambda_7^cx^c+\delta^{ab}\lambda_8^cx^c\varphi_7(x),\\ \mu_8^{ab}=2(x^a\varepsilon^{bcd}+x^b\varepsilon^{acd})\lambda_8^{dn}x^cx^n-(\varepsilon^{ack}\lambda_8^{bk}+\varepsilon^{bck}\lambda_8^{ak})x^cx^2,\\ \mu_9^{ab}=\lambda_9^{ab}x^4-2(x^a\lambda_9^{bc}+x^b\lambda_9^{ac})x^cx^2+(4x^ax^b+k\delta^{ab}x^2)\lambda_9^{cd}x^cx^d+\delta^{ab}\lambda_{10}^{cd}x^cx^d\varphi_9(x),\end{gathered} \tag{19}$$

де $\lambda_n^{ab} = \lambda_n^{ba}$ та $\lambda_n^a$ — довільні параметри, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_9$ — довільні функції від $r = x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Таким чином, наша класифікаційна задача зводиться до знаходження нееквівалентних розв'язків рівнянь (10) та (16) для функцій $f$ і $V$, де $\mu^{ab}$ є лінійною комбінацією функцій (18) та (19). При цьому технічною проблемою є велика кількість довільних параметрів, яку необхідно редукувати з використанням перетворень еквівалентності.

**5. Розщеплення визначальних рівнянь.** Зважаючи на інваріантність розглядуваних рівнянь відносно масштабних перетворень (генератором яких є оператор симетрії (17)), приходимо до висновку, що тензори Кіллінга, що входять у визначальні рівняння, повинні включати поліноми по просторовим змінним однакового порядку. Це означає, що визначальні рівняння (10) та (16) розкладаються на п'ять незачеплених підсистем, що відповідають тензорам Кіллінга, що є однорідними поліномами фіксованого порядку $n = 0, 1, 2, 3, 4,$ а відповідні довільні функції $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_9$ зводяться до констант.

Більш того, оскільки рівняння (1), (2) з довільними елементами вигляду (3) є інваріантними відносно перетворень інверсії (5), можна обмежитись тензорами Кіллінга з $n \leq 2$, що задані рівняннями (18), оскільки симетрії з $n = 3$ and $n = 4$ є еквівалентними до симетрій з $n = 1$ та $n = 0$ відповідно. Це означає, що досить розв'язати визначальні рівняння (10) та (16) з наступними $\mu^{ab}$:

$$\mu^{ab} = \lambda^{ab} + \kappa\delta^{ab}\frac{\tilde{\lambda}^{cd}x^c x^d}{x^2}, \tag{20}$$

$$\mu^{ab} = \lambda^a x^b + \lambda^b x^a - 2\delta^{ab}\tilde{\lambda}^c x^c + \mu^a x^b + \mu^b x^a + (\varepsilon^{acd}\lambda^{cb} + \varepsilon^{bcd}\lambda^{ca})x^d, \tag{21}$$

$$\mu^{ab} = \kappa x^a x^b + (x^a\varepsilon^{bcd} + x^b\varepsilon^{acd})\lambda^d x^c + \delta^{ab}\tilde{\lambda}^{cd}x^c x^d + \lambda^{ab}x^2 - (x^a\lambda^{bc} + x^b\lambda^{ac})x_c. \tag{22}$$

Відмітимо, що кожній зі знайдених у такий спосіб симетрії для буде відповідати додаткова симетрія, отримана замінами (6).

***5.1. Симетрії, незалежні від $x_a$.*** Почнемо з симетрій, які відповідають постійним матрицям $\mu^{ab}$ (20). Підставивши (20) до (13), отримуємо наступне рівняння:

$$\lambda^{ab}f_b + \kappa\frac{\lambda^{mn}x_m x_n}{r^2}f_a = 0. \tag{23}$$

Оскільки $\mu^{ab} = \mu^{ba}$, з точністю до перетворень з групи обертань існують три нееквівалентні версії ненульових коефіцієнтів $\lambda^{ab}$:

$$\lambda^{11} = k_1, \qquad \lambda^{22} = k_2, \qquad \lambda^{33} = k_3, \tag{24}$$

$$\lambda^{11} = k_1, \qquad \lambda^{22} = k_2, \tag{25}$$

$$\lambda^{33} = k_3. \tag{26}$$

Підставивши (24)-(26) у рівняння (23) та прирівнявши коефіцієнти при однакових $x_m$, приходимо до висновку, що коефіцієнт $\kappa$ повинен бути тривіальним, і

$$f = 0 \quad \text{для версії (24)}, \tag{27}$$

$$f = x_3^2 \quad \text{для версії (25)}, \tag{28}$$

$$f = (x_1^2 + x_2^2)F(\varphi) \qquad \text{для версії (26)} \tag{29}$$

де $F(\varphi)$ — довільна функція від кута Ейлера $\varphi = \arctan\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$.

Підставивши (55) – (29) до (16), отримуємо наступні розв'язки:

$$f = x_3^2, \qquad V = \frac{x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2)} F(\varphi), \qquad \eta = -\frac{1}{x_1^2 + x_2^2} F(\varphi), \qquad \lambda^{11} = \lambda^{22} = 1, \tag{30}$$

$$f = x_3^2, \qquad V = \mathrm{Const}, \qquad \eta = 0, \qquad \lambda^{11} = k_1, \quad \lambda^{22} = k_2 \neq k_1, \tag{31}$$

$$f = (x_1^2 + x_2^2) F(\varphi), \qquad V = \frac{f}{x_3^2}, \qquad \eta = -\frac{1}{x_3^2}, \qquad \lambda^{33} = 1. \tag{32}$$

Таким чином, точністю до еквівалентності, існує три версії рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси, для яких існують симетрії, незалежні від $x_a$. Відповідні довільні елементи $f$ і $V$ задано формулами (30) та (31), де вказані також відповідні функції $\eta$ та ненульові коефіцієнти $\lambda^{ab}$, що визначають інтеграл руху (7) з $\mu^{ab} = \lambda^{ab}$.

***5.2. Симетрії, лінійні за незалежними змінними.*** Розглянемо тепер симетрії, породжені тензорами Киллінга (22), які є лінійними функціями від $x_a$. Відповідні визначальні рівняння (13) приймають наступний вигляд:

$$2\mu^a f = \mu^{ab} f_b. \tag{33}$$

Для спрощення розрахунків скористаємося тотожністю $2f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$, яка дозволяє звести (33) до наступної *однорідної* системи лінійних рівнянь для похідних $f_a$:

$$M^{ab} f_b = 0, \tag{34}$$

де

$$M^{ab} = \mu^{ab} - \lambda^a x^b - \mu^a x_b. \tag{35}$$

Зауважимо, що оператор (7), де $\mu^{ab}$ має вигляд, визначений у (31), є білінійною комбінацією генераторів групи $C(3)$, а саме:

$$\begin{aligned} Q = {} & a_+ P_2 L_3 + a_- L_2 P_3 + b_+ P_1 L_3 + b_- 2 P_3 L_1 + c_+ P_1 L_2 + \\ & + c_- P_2 L_1 + \lambda^a p_a D + \tilde{d}_1 P_1 L_1 + \tilde{d}_2 P_2 L_2 + \tilde{d}_3 L_3 P_3, \end{aligned} \tag{36}$$

де $a_\pm = \lambda^{23} \pm \lambda^1$, $b_\pm = \lambda^{31} \pm \lambda^2$, $c_\pm = \lambda^{12} \pm \lambda^3$, $\tilde{d}_a = \lambda^{bb} - \lambda^{cc}$, (a, b, c) — цикл (1, 2, 3).

За допомогою перетворень з групи обертань, коефіцієнти $a_1, b_1$ та $c_2$ можна звести до нуля. В результаті компоненти тензора $M^{ab}$ (35) набувають наступного вигляду:

$$\begin{gathered} M^{11} = -2cx_3 + m_1 x_1, \quad M^{12} = m_2 x_1 + M^{21} = m_1 x_2 + d_3 x_3, \\ M^{22} = m_2 x_2, \qquad M^{23} = d_1 x_1 + m_3 x_2 + b x_3, \\ M^{31} = c x_1 + d_2 x_2 + (a + m_1) x_3, \\ M^{32} = (b + m_2) x_3 + d_1 x_1, \qquad M^{33} = m_3 x_3 - 2a x_1 - 2b x_2, \end{gathered} \tag{37}$$

де ми позначили $a_- = a$, $b_- = b$, $c_+ = c$, $d_1 = \tilde{d}_2 - \tilde{d}_3$, $d_2 = \tilde{d}_3 - \tilde{d}_1$, $d_3 = \tilde{d}_1 - \tilde{d}_2$. Умовою існування нетривіальних розв'язків для рівняння (34) є рівність нулю визначника матриці, елементами якої є $M^{ab}$ (37). Це відбувається, якщо виконується одна з наступних комбінацій умов на довільні коефіцієнти:

$$a = b = c = d_a = 0, \tag{38}$$

$$d_1 = -d_2, \qquad c = 0, \tag{39}$$

$$ad_2 = -bc, \qquad bm_1 = -2m_3, \tag{40}$$

$$bm_1 = am_2, \qquad c = 0, \tag{41}$$

$$a = b = d_a = m_2 = 0, \tag{42}$$

$$m_1 d_1 = -cm_2, \qquad d_1 m_3 = -am_2, \qquad b = 0. \tag{43}$$

Підставляючи послідовно усі версії довільних коефіцієнтів, наведені у (38)–(43) до рівнянь (34) та (16) з матрицями (37), знаходимо відповідні функції $f$, $V$ та $\eta$.

Почнемо з версії (38). У цьому разі оператор симетрії включає лінійну комбінацію операторів $P_1 D$, $P_2 D$ та $P_3 D$ з коефіцієнтами $m_1$, $m_2$ та $m_3$ відповідно. Поворотом системи координат два з цих коефіцієнтів (наприклад, $m_1$ та $m_2$) можна занулити. У цьому випадку компоненти тензора $M^{ab}$, наведені у формулах (37), редукуються до наступної форми:

$$M^{1a} = x_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

а решта компонент дорівнює нулю. Відповідні рівняння (34) та (16) набувають наступного вигляду:

$$x_a f_3 = 0, \tag{44}$$

$$f \eta_a + x_a V_3 = 0. \tag{45}$$

Загальний розв'язок рівняння (44) для функції $f$ вигляду (3) задається наступною формулою:

$$f = \tilde{r}^2 F(\varphi), \tag{46}$$

де $F(\varphi)$ — довільна функція від кута Ейлера. Інтегруючи відповідне рівняння (45) для $V$ вигляду (3), отримуємо загальний вигляд функцій $\eta$ та $V$:

$$V = G(\varphi) + c_1 \frac{x_3}{\tilde{r}} F(\varphi) + c_2 \frac{x_3}{r} F(\varphi),$$
$$\eta = \frac{c_1}{\tilde{r}} + \frac{c_2}{r},$$

де $c_1$ та $c_2$ — константи інтегрування, а $G(\varphi)$ — додаткова довільна функція.

Знайдені розв'язки представлені у першому пункті таблиці 1, де вказано також додатковий інтеграл руху, отриманий за допомогу перетворення інверсії.

Розглядаючи версію (39), дістаємо наступні ненульові компоненти тензора $M^{ab}$ (37):

$$M^{13} = ax_3 + dx_2 + \lambda_3 x_1, \qquad M^{23} = \lambda_3 x_2 - dx_1 - bx_3,$$
$$M^{31} = ax_3 + dx_2, \qquad M^{32} = -dx_1 - bx_3, \qquad \lambda_3 x_3 + 2bx_2 - 2ax_1.$$

При цьому, з точністю до перетворень з групи обертань, $b = 0$, а відповідні рівняння (34) набувають наступного вигляду:

$$f_3 = 0, \qquad af_1 = 0, \qquad d(x_1 f_2 - x_2 f_1) = 0. \tag{47}$$

Згідно з (47) , один з коефіцієнтів $a$ чи $d$ повинен бути нульовим (інакше маса не буде залежати від координат). Відповідні розв'язки рівняння (47) мають вигляд:

$$f = x_2^2, \qquad d = 0, \qquad a \neq 0, \tag{48}$$

$$f = \tilde{r}^2, \qquad a = 0, \qquad d \neq 0. \tag{49}$$

У випадку (48) рівняння (16) набувають наступного вигляду:

$$\begin{gathered} \tilde{r}^2\eta_1 = -(dx_2 + m_1x_1)V_3, \\ \tilde{r}^2\eta_2 = (dx_1 - m_1x_2)V_3, \\ \tilde{r}^2\eta_3 = d(x_1V_2 - x_2V_1) - m_1x_3V_3, \end{gathered} \tag{50}$$

а їх розв'язки наведено у таблиці в секції 6, де зроблено заміну $x_2 \to x_3,\ x_3 \to x_2$.

Отримані у такий спосіб версії гамільтоніанів (2), які допускають інтеграли руху, лінійні по незалежним змінним, представлено у таблиці 1.

**6. Симетрії, білінійні по незалежним змінним.** Залишилось знайти рівняння, що допускають інтеграли руху, породжені тензорами (22). Ці інтеграли допускають наступне представлення:

$$Q = \nu^{ab}\big(\{K_a, P_b\} + \{P_b, K_a\}\big) + \tilde{\lambda}^{ab}Q^{ab}, \tag{51}$$

де $\nu^{ab} = \lambda^{ab} + \varepsilon_{abc}\lambda_c$, $\tilde{\lambda}^{ab}$ — довільні коефіцієнти, $Q^{ab} = P_cx_ax_bP_c$, і фігурні дужки означають антикомутатор. Оператори $Q^{ab}$ також можна представити як білінійні комбінації генераторів (4), оскільки мають місце наступні тотожності:

$$\begin{gathered} \{L_a, L_b\} + \{P_a, K_b\} = 2Q^{ab}, \quad a \neq b, \\ \{P_1, K_1\} + \{P_2, K_2\} + L_3^2 = 2Q^{33}. \end{gathered} \tag{52}$$

Відповідні визначальні рівняння (13) приймають наступний вигляд:

$$2f(\lambda^{ab} - \tilde{\lambda}^{ab})x_b) = \mu^{ab}f_b. \tag{53}$$

По аналогії з (33)–(35) рівняння (53) варто переписати у формі (34), де

$$M^{ab} = \mu^{ab} - \lambda^{ac}x_cx_b. \tag{54}$$

Як і у випадку рівняння (37), за допомогою перетворень з групи обертань багато коефіцієнтів в (54) можна занулити, а саме, матриця коефіцієнтів може бути зведена до однієї з канонічних форм. Відповідні матриці (54) зводяться до лінійних комбінацій матриць $N^{ab}$ та $\tilde{N}^{ab}$

$$M = \nu^{ab}N^{ab} + \tilde{\nu}^{ab}\tilde{N}^{ab}, \tag{55}$$

де $\tilde{N}^{ab} = x_ax_bI$, $I$ — одинична матриця, а ненульові компоненти $N_{cd}^{ab}$ матриць $N^{ab}$ згідно з (22) мають вигляд:

$$
\begin{gathered}
N_{11}^{12} = -x_1x_2, \qquad N_{11}^{13} = -x_1x_3, \qquad N_{11}^{22} = N_{11}^{33} = x_1^2, \\
N_{22}^{11} = N_{22}^{33} = x_2^2, \qquad N_{22}^{21} = -x_2x_1, \qquad N_{22}^{23} = -x_2x_3, \\
N_{33}^{31} = -x_3x_1, \qquad N_{33}^{32} = -x_3x_2, \qquad N_{33}^{33} = \tilde{r}^2, \\
N_{11}^{12} = -2x_1x_2, \qquad N_{12}^{12} = r^2, \qquad N_{21}^{12} = r^2 - 2x_2^2, \qquad N_{31}^{12} = -2x_2x_3, \\
N_{12}^{21} = r^2 - 2x_1^2, \qquad N_{21}^{21} = r^2, \qquad N_{22}^{21} = -2x_1x_2, \qquad N_{32}^{21} = -2x_1x_2.
\end{gathered} \tag{56}
$$

Всі матриці (56) вироджені, тому для кожної з них існують нетривіальні розв'язки відповідних рівнянь (34) та (16). Нееквівалентні варіанти цих матриць наведено у наступній формулі:

$$N = \nu_1 N^{11} + \nu_2 N^{22} + \nu_3 N^{33}, \tag{57}$$

$$N = \nu_4 (N^{11} + N^{22}) + \nu_5 N^{33} + \nu_6 N^{12}, \tag{58}$$

$$N = \nu_7 (N^{11} + N^{22} + N^{33}) + \nu_8 N^{12} + \nu_9 N^{23}, \tag{59}$$

$$N = \nu_{10} (N^{11} + N^{22}) + \nu_{11} N^{33} + \nu_{12} (N^{12} - N^{21}), \tag{60}$$

$$N = \nu_{13} (N^{11} + N^{22} + N^{33}) + \nu_{14} (N^{12} - N^{21}) + \nu_{15} (N^{23} - N^{32}), \tag{61}$$

де $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{15}$ — довільні дійсні коефіцієнти.

Таким чином, класифікація білінійних по $x_a$ інтегралів руху зводиться до пошуку загальних розв'язків рівнянь (34) та (16), де матриці $M$ задано формулами (55) та (57)–(61). Ми не будемо наводити деталі відповідних громіздких обчислень, але наведемо тільки один приклад.

Нехай матриця $M$ зводиться до (60) з $\nu_{10}$ та $\nu_{12}$ не рівними нулю. Тоді рівняння (34) мають нетривіальні розв'язки для $f$ при умові $\nu_{11} = 0$, а рівняння (16) мають нетривіальні розв'язки для $V$ при умовах $\nu_{10} = \nu_{12}$ чи $\nu_{10}\nu_{12} = 0$.

Якщо $\nu_{10} = \nu_{11} = 0$, рівняння (34) та (16) набувають наступного вигляду:

$$x_1 f_2 - x_2 f_1 = 0$$

та

$$f\eta_a = -2x_a(x_1V_2 - x_2V_1), \quad a = 1, 2, 3,$$

відповідно. Загальний розв'язки цих рівнянь мають вигляд:

$$f = r^2 F(\theta), \quad V = cF(\theta)\varphi + G(\theta), \quad \eta = -c\ln(r^2).$$

Якщо $\nu_{10} \neq 0, \nu_{12} = \nu_{11} = 0$, маємо наступні версії рівнянь (34) та (16):

$$
\begin{gathered}
f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \\
f\eta_1 + (x_2^2 + x_3^2)V_1 - x_1x_2)V_2 = 0, \\
f\eta_2 - x_1x_2V_1 + (x_1^2 + x_3^2)V_2 = 0, \\
f\eta_3 - x_1x_3V_1 - x_2x_3V_2 = 0,
\end{gathered}
$$

а відповідні розв'язки мають вигляд

$$f = x_3^2, \qquad V = \frac{x_3^2}{\tilde{r}^2}F(\varphi) + G(\theta), \qquad \eta - \frac{r^2}{\tilde{r}^2}F(\varphi) - G(\theta).$$

Наприкінці, якщо $\nu_{10} = \nu_{12},\ \nu_{11} = 0$, маємо наступні рівняння (34) та (16):

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0,$$
$$f\eta_1 + (x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2)V_1 + (2x_1^2 - x_1x_2)V_2 = 0,$$
$$f\eta_2 - (x_1x_2 + 2x_2^2)V_1 + (x_1^2 + 2x_1x2 + x_3^2)V_2 = 0,$$
$$f\eta_3 - (x_1x_3 + 2x_2x3)V_1 + (2x_1x_3 - x_2x_3)V_2 = 0,$$

а відповідними розв'язками будуть $f = x_3^2,\ V = F(\theta),\ \eta = -F(\theta)$.

Аналогічно розв'язуються рівняння, які відповідають решті нееквівалентних матриць $M$. При цьому на кожному кроці необхідно дослідити можливість додавання до $N$ матрицю $\tilde{N}$ загального вигляду, дивись рівняння (24), але таку, щоб $M$ залишалась виродженою. Отримані в такий спосіб результати підсумовано у двох таблицях, одна з яких включає довільні коєфіцієнти, а друга — довільні функції. Список потенціалів, мас та відповідних інтегралів руху є повним з точністю до перетворень з групи обертань.

У таблицях $F(.),\ G(.),\ R(.)$ — довільні функції від аргументів, вказаних у дужках, $c,\ c_1,\ c_2,\ \mu$ та $\nu$ – довільні дійсні коєфіцієнти, $\varphi$ та $\theta$ — кути Ейлера, $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \tilde{r}^2 = x_1^2 + x_2^2$, $P_a,\ K_a, D$ та $L_3$ — оператори, визначені формулою (4), і по індексам $a$, що повторюються, робиться сумування по значенням 1, 2 та 3. Символ $\{A, B\}$ означає антикомутатор операторів $A$ та $B$, тобто $\{A, B\} = AB + BA$. Для систем, наведених у трьох останніх рядках таблиці 2, інтеграли руху другого порядку зводяться до довільних білінійних комбінацій наведених там операторів симетрії першого порядку.

**7. Заключні зауваження.** У роботі знайдено всі нееквівалентні рівняння Шредінгера зі змінним параметром маси, які є інваріантними відносно масштабних перетворень і допускають інтеграли руху другого порядку. У підсумкових таблицях наведено двадцять сім версій таких рівнянь, частина з яких включає довільні параметри (константи взаємодії з потенціалом, див. таблицю 2), а решта визначена з точністю до довільних функцій від редукованої кількості змінних (див. таблицю 1).

Оскільки усі знайдені гамільтоніани по визначенню комутують з генераторами дилатації $D$, відповідні рівняння Шредінгера є інтегровними, якщо вони допускають два додаткових інтеграла руху, і суперінтегровними, якщо таких інтегралів руху більше ніж два. Згідно з таблицею, у класі, що розглядається, існує досить велика кількість інтегровних і суперінтегровних рівнянь.

Таким чином, знайдено низку нових інтегровних систем зі змінною масою. Але основна вага отриманих результатів полягає у їх повноті, оскільки пропонується повний опис усіх нееквівалентних систем, які допускають масштабні перетворення та інтеграли руху другого порядку. Ці результати можна розглядати як перший крок у побудові усіх нееквівалентних систем зі змінною масою, які допускають такі інтеграли руху і є інваріантними відносно хоча б однопараметричної групи Лі.

Природною наступною задачею є пошук точних розв'язків знайдених інтегровних та суперінтегровних систем. Нагадаємо, що такі розв'язки для рівнянь Шредінгера зі змінною масою, які допускають більш як п'яти параметричні групи симетрії, знайдено у роботі [27].

*Таблиця* 1. Обернені маси та потенціали та відповідні інтеграли руху, визначені з точністю до довільних функцій

| № | $f$ | $V$ | Інтеграли руху |
|---|---|---|---|
| 1 | $\tilde{r}^2 F(\varphi)$ | $F(\varphi)G(\theta)$ | $\{P_3, K_3\} - 2G(\theta)$ |
| 2 | $\tilde{r}^2 F(\varphi)$ | $F(\varphi)(c_1 \frac{x_3}{\tilde{r}} + c_2 \frac{x_3}{r}) + G(\varphi)$ | $\{P_3, D\} + \frac{2c_1}{\tilde{r}} + \frac{2c_2}{r}$, <br> $\{K_3, D\} + \frac{2c_1 r^2}{\tilde{r}} + 2c_2 r$ |
| 3 | $\tilde{r}^2 F(\varphi)$ | $F(\varphi)(c_1 \frac{x_3}{\tilde{r}} + c_2 \frac{x_3}{r})$ | $\{P_3, K_3\} - \frac{2c_1}{\tilde{r}} + \frac{2c_2}{r}$, <br> $\{P_3, D\} + \frac{2c_1}{\tilde{r}} + \frac{2c_2}{r}$, <br> $\{K_3, D\} + \frac{2c_1 r^2}{\tilde{r}} + 2c_2 r$ |
| 4 | $\tilde{r}^2 F(\varphi)$ | $F(\varphi)$ | $P_1^2 + P_2^2 - \frac{1}{x_3^2} F(\varphi)$, <br> $K_1^2 + K_2^2 - \frac{r^4}{x_3^2}$, $\{P_3, K_3\}$, <br> $\{P_3, D\}$, $\{K_3, D\}$ |
| 5 | $\tilde{r}^2 F(\varphi)$ | $\frac{\tilde{r}^2}{x_3^2} F(\varphi)$ | $P_3^2 - \frac{1}{x_3^2}$, $K_3^2 - \frac{r^4}{x_3^2}$, <br> $\{P_3, K_3\} - \frac{2\tilde{r}^2}{x_3^2}$ |
| 6 | $\tilde{r}^2 F(\theta)$ | $G(\varphi)F(\theta) + R(\theta)$ | $L_3^2 - 2G(\varphi)$, <br> $\{P_3, K_3\} - 2F(\theta)$ |
| 7 | $\tilde{r}^2 F(\theta)$ | $R(\theta)$ | $L_3^2$, $L_3 D$ <br> $\{P_3, K_3\} - 2F(\theta)$ |
| 8 | $\tilde{r}^2 F(\theta)$ | $\frac{c\tilde{r}^2}{r^2} F(\theta)\varphi + G(\theta)$ | $\{L_3, D\} - 2c\ln(r)$ |
| 9 | $r^2$ | $F(\varphi, \theta)$ | $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ |
| 10 | $r^2$ | $c\varphi + G(\theta)$ | $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, <br> $\{P_a, K_a\} - \frac{2cx_3^2}{\tilde{r}^2}\varphi - 2G(\theta)$, <br> $L_3 D - c\ln(r)$ |
| 11 | $r^2$ | $\frac{r^2}{\tilde{r}^2} F(\varphi) + G(\theta)$ | $\{P_3, K_3\}$, $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, <br> $\{P_1, K_1\} + \{P_2, K_2\} - 2F(\varphi) - 2G(\theta)$, <br> $L_3^2 - 2F(\varphi)$ |
| 12 | $x_3^2$ | $\frac{x_3^2}{\tilde{r}^2} F(\varphi) + G(\theta)$ | $\{P_1, K_1\} + \{P_2, K_2\} - \frac{2r^2}{\tilde{r}^2} F(\varphi) - G(\theta)$, <br> $L_3^2 - 2F(\varphi)$ |
| 13 | $r^2$ | $G(\theta)$ | $\{P_3, K_3\}$, $L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, $L_3 D$ <br> $\{P_a, K_a\} - 2G(\theta)$, $L_3^2$ |
| 14 | $x_3^2$ | $c\frac{x_3^2\varphi}{r^2} + G(\theta)$ | $\{P_1, K_1\} + \{P_2, K_2\} - \frac{2r^2}{\tilde{r}^2}\varphi - G(\theta)$, <br> $L_3^2 - 2\varphi$, $\{L_3, D\} - 2c\ln(r)$ |

*Таблиця* 2. Обернені маси та потенціали та відповідні інтеграли руху, визначені з точністю до довільних коефіцієнтів

| № | $f$ | $V$ | Інтеграли руху |
|---|---|---|---|
| 1 | $r^2$ | $c\dfrac{r^2}{x_3^2}$ | $L_1^2+L_2^2+L_3^2$,<br>$\{L_1,L_2\}+4c\dfrac{x_1x_2}{x_3^2}, L_3D, L_3^2$ |
| 2 | $x_3^2$ | $\dfrac{cx_3^2}{\nu^2r^2+\nu((\mu+1)x_3^2+\mu x_1^2+x_2^2)+\mu x_3^2}$ | $\{P_1,K_1\}+\mu\{P_2,K_2\}+4\nu\dfrac{r^2}{x_3^2}V$ |
| 3 | $x_3^2$ | $\dfrac{cx_3^2}{(\nu-\mu+1)x_3^2+\nu\tilde{r}^2}$ | $L_3D,\ (1+\mu)\{P_1,K_1\}+\{P_2,K_2\}+2\mu L_3^2+4\nu\dfrac{r^2}{x_3^2}V$ |
| 4 | $x_1^2$ | $c_1\dfrac{x_1^2}{x_3^2}+c_2\dfrac{x_2}{\tilde{r}}$ | $\{P_2,D\}+\{P_3,L_1\}+2c_2\dfrac{1}{\tilde{r}}-4c_1\dfrac{x_2}{x_3^2}$,<br>$\{K_2,D\}+\{K_3,L_1\}+2c_2\dfrac{r^2}{\tilde{r}}-4c_1\dfrac{r^2x_2}{x_3^2}$ |
| 5 | $x_3^2$ | $c_1\dfrac{x_1x_3^2}{\tilde{r}x_2^2}+c_2\dfrac{x_3^2}{x_1^2}$ | $\{L_2,P_1\}+4c_2\dfrac{x_1}{x_2^2}+2c_1\dfrac{2x_1^2+x_2^2}{\tilde{r}x_2^2}$,<br>$\{L_2,K_1\}+4c_2\dfrac{x_1r^2}{x_2^2}+2c_1\dfrac{(2x_1^2+x_2^2)r^2}{\tilde{r}x_2^2}$ |
| 6 | $x_3^2$ | $c\dfrac{x_3^2}{x_1^2}$ | $\{L_2,P_1\}+c\dfrac{4x_1^2+2x_2^2}{\tilde{r}x_2^2},\ \{P_2,D\}$,<br>$\{L_2,K_1\}+c\dfrac{(4x_1^2+2x_2^2)r^2}{\tilde{r}x_2^2},\ \{K_2,D\}$,<br>$\{P_1,K_1\}+\{P_2,K_2\}-2c\dfrac{r^2}{x_1^2}$,<br>$\{P_1,L_3\}-4c\dfrac{x_2}{x_1^2},\ \{P_3,K_3\}-2\dfrac{x_3^2}{\tilde{r}^2}$,<br>$\{K_1,L_3\}-4c\dfrac{r^2x_2}{x_1^2}$ |
| 7 | $x_3^2$ | $c\dfrac{\tilde{r}^2}{r^2}$ | $\{K_1,P_2\}-4c\dfrac{x_1x_2}{r^2}, \{P_1,K_1\}-2c\dfrac{x_1^2}{r^2}, L_3D, L_3^2$ |
| 8 | $x_3^2$ | $c\dfrac{x_3^2}{r^2}$ | $\{P_2,K_1\}+4c\dfrac{x_1x_2}{r^2},\ \{P_1,K_2\}+4c\dfrac{x_1x_2}{r^2}$,<br>$\{P_1,K_1\}+\{P_2,K_2\}+2c\dfrac{\tilde{r}^2}{r^2},\ \{P_3,K_3\}-2\dfrac{x_3^2}{\tilde{r}^2}, L_3D, L_3^2$ |
| 9 | $\tilde{r}^2$ | $c_1e^{-2\varphi}\dfrac{r^2+x_3^2}{\tilde{r}^2}+c_2e^{-\varphi}\dfrac{x_3}{\tilde{r}}$ | $\{P_3,(L_3+D)\}+4c_1e^{-2\varphi}\dfrac{x_3}{\tilde{r}^2}+2c_2e^{-\varphi}\dfrac{1}{\tilde{r}}$,<br>$\{K_3,(L_3+D)\}+4c_1e^{-2\varphi}\dfrac{r^2x_3}{\tilde{r}^2}+2c_2e^{-\varphi}\dfrac{r^2}{\tilde{r}}$ |
| 10 | $\tilde{r}^2$ | $c_1e^{2\varphi}\dfrac{r^2+x_3^2}{\tilde{r}^2}+c_2e^{\varphi}\dfrac{x_3}{\tilde{r}}$ | $\{P_3,(L_3-D)\}-4c_1e^{2\varphi}\dfrac{x_3}{\tilde{r}^2}-2c_2e^{\varphi}\dfrac{1}{\tilde{r}}$,<br>$\{K_3,(L_3-D)\}-4c_1e^{2\varphi}\dfrac{r^2x_3}{\tilde{r}^2}-2c_2e^{\varphi}\dfrac{r^2}{\tilde{r}}$ |
| 11 | $\tilde{r}^2$ | $c_1\frac{x_3}{\tilde{r}}+c_2\frac{x_3}{r}$ | $\{P_3,K_3\}-\frac{2c_1}{\tilde{r}}-\frac{2c_2}{r},\ L_3^2$<br>$\{P_3,D\}+\frac{2c_1}{\tilde{r}}+\frac{2c_2}{r},\ L_3D$,<br>$\{K_3,D\}+\frac{2c_1r^2}{\tilde{r}}+2c_2r$ |
| 12 | $\tilde{r}^2$ | $\frac{\tilde{r}^2}{x_3^2}$ | $P_3^2-\frac{1}{x_3^2},\ K_3^2-\frac{r^4}{x_3^2}$,<br>$\{P_3,K_3\}-\frac{2\tilde{r}^2}{x_3^2},\ L_3D,\ L_3^2$ |
| 13 | $\tilde{r}^2$ | $c$ | $P_3,\ L_3,\ D,\ K_3$ |
| 14 | $x_3^2$ | $c$ | $P_1,\ P_2,\ K_1,\ K_2, D, L_3$ |
| 15 | $r^2$ | $c$ | $L_1,\ L_2, L_3, D$ |

## Література


1. V. I. Fushchich, and A. G. Nikitin, *Symmetries of equations of quantum mechanics*, Allerton Press, New York (1994).
2. A. G. Nikitin, *The maximal "kinematical" invariance group for an arbitrary potential revised*, J. Math. Phys., Analysis, Geometry 14, 519 – 531 (2018).
3. A. G. Nikitin, *Symmetries of Schrödinger equation with scalar and vector potentials*, J. Phys. A, **53**, 455202 (2020).
4. A. G. Nikitin, *Symmetries of the Schrödinger – Pauli equation for neutral particles*, J. Math. Phys., **62**, 083509 (2021).
5. A. G. Nikitin, *Symmetries of the Schrödinger-Pauli equations for charged particles and quasirelativistic Schrödinger equations*, J. Phys. A, **55**, 115202 (2022).
6. U. Niederer, *The maximal kinematical invariance group of the free Schrödinger equations*, Helv. Phys. Acta, **45**, 802 – 810 (1972).
7. R. L. Anderson, S. Kumei, C. E. Wulfman, *Invariants of the equations of wave mechanics. I*, Rev. Mex. Fis., **21**, 1 – 33 (1972).
8. C. P. Boyer, *The maximal kinematical invariance group for an arbitrary potential*, Helv. Phys. Acta, **47**, 450 – 605 (1974).
9. P. Winternitz, J. Smorodinsky, M. Uhlíř, I. Friš, *Symmetry groups in classical and quantum mechanics*, Sov. J. Nucl. Phys., **4**, 444 – 450 (1967).
10. A. Makarov, J. Smorodinsky, Kh. Valiev, P. Winternitz, *A systematic search for non-relativistic systems with dynamical symmetries*, Nuovo Cim. A, **52**, 1061 – 1084 (1967)
11. Ian Marquette, Pavel Winternitz, *Higher order quantum superintegrability: a new Painleve conjecture. Integrability*, Supersymmetry and Coherent States, Springer, Cham (2019), pp. 103 – 131.
12. A. G. Nikitin, *Higher-order symmetry operators for Schrödinger equation*, In CRM Proceedings and Lecture Notes (AMS), **37**, 137 – 144 (2004).
13. Oldwig von Roos, *Position-dependent effective masses in semiconductor theory*, Phys. Rev. B, **27**, 7547 (1983).
14. A. de Saavedra, F. Boronat, A. Polls, A. Fabrocini, *Effective mass of one He 4 atom in liquid He 3*, Phys. Rev. B, **50**, 4248 (1994).
15. P. Harrison, *Quantum Wells*, Wires and Dots, Wiley, New York (2000).
16. R. Heinonen, E. G. Kalnins, W. Miller Jr, E. Subag, *Structure relations and Darboux contractions for 2D 2nd order superintegrable systems*, SIGMA, **11**, 043 (2015).
17. B. K. Berntson, E. G. Kalnins, W. Miller Jr., *Toward classification of 2nd order superintegrable systems in 3-dimensional conformally flat spaces with functionally linearly dependent symmetry operators*, SIGMA: Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, **16**, 135 (2020).
18. A. Ballesteros, A. Enciso, F. J. Herranz, O. Ragnisco, D. Riglioni, *Superintegrable oscillator and Kepler systems on spaces of nonconstant curvature via the Stäckel transform*, SIGMA, **7**, 048 (2011).
19. O. Ragnisco, D. Riglioni, *A Family of Exactly Solvable Radial Quantum Systems on Space of Non-Constant Curvature with Accidental Degeneracy in the Spectrum*, SIGMA, **6**, 097 ( 2010).
20. A. G. Nikitin, *Superintegrable and shape invariant systems with position dependent mass*, J. Phys. A: Math. Theor., **48**, 335201 (2015).
21. A. G. Nikitin, T. M. Zasadko, *Superintegrable systems with position dependent mass*, J. Math. Phys., **56**, 042101 (2015).
22. A. G. Nikitin, *Kinematical invariance groups of the 3d Schr?dinger equations with position dependent masses*, J. Math. Phys., **58**, № 8, 083508 (2017).
23. A. G. Nikitin, *Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations with triangular diffusion matrix*, Ukr. Math. J., **59**, 439 – 458 (2007).
24. A. G. Nikitin, V. I. Fushchich, *Equations of motion for particles of arbitrary spin invariant under the Galileo group*, Theor. and Math. Phys., **44**, 584 – 592 (1980)
25. O. O. Vaneeva, R. O. Popovych, C. Sophocleous, *Equivalence transformations in the study of integrability*, Physica Scripta, **89**, 038003 (2014).
26. A. G. Nikitin, *Generalized Killing tensors of arbitrary valence and order*, Ukr. Math. J., **43**, 734 – 743 (1991).
27. A.G. Nikitin, *Exact solvability of PDM systems with extended Lie symmetries*, Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, **16**, № 1, 1 – 18 (2019).


Одержано 14.02.22