DOI: 10.37863/umzh.v74i3.6997

УДК 517.912

М. І. Сєров, Ю. Г. Подошвелев (Полтав. нац. пед. ун-т ім. В. Г. Короленка)

ПРО НЕЛОКАЛЬНІ СИМЕТРІЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ХЕМОТАКСИСУ З ДЕРІВАТИВНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

With the help of nonlocal equivalence transformations, the system of chemotaxis equations is associated with a system of convection-diffusion equations. The Lie symmetry of the obtained system is used to construct nonlocal ansatzes and to reduce and find exact solutions of the system of chemotaxis equations.

За допомогою нелокальних перетворень еквівалентності систему рівнянь хемотаксису пов'язано з деякою системою рівнянь конвекції-дифузії. Ліївську симетрію отриманої системи використано для побудови нелокальних анзаців, редукції та знаходження точних розв'язків системи рівнянь хемотаксису.

Різноманітні процеси фізики, хімії, біології та багатьох інших наук описуються системою нелінійних рівнянь дифузії – конвекції – реакції

$$U_t = (D(U)U_x)_x + K(U)U_x + R(U), \tag{1}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R^2,\ u^a = u^a(t,x),\ D(U),\ K(U)$ та $R(U)$ — коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно, а саме:

$$D(U) = \begin{pmatrix} d^{11} & d^{12} \\ d^{21} & d^{22} \end{pmatrix}, \quad K(U) = \begin{pmatrix} k^{11} & k^{12} \\ k^{21} & k^{22} \end{pmatrix}, \quad R(U) = \begin{pmatrix} r^1 \\ r^2 \end{pmatrix},$$

$k^{ab} = k^{ab}(u^1,u^2),\ d^{ab} = d^{ab}(u^1,u^2),\ r^a = r^a(u^1,u^2),\ a,b = 1,2.$

Дослідженню симетрійних властивостей та знаходженню точних розв'язків системи (1) присвячено ряд публікацій багатьох науковців. При відсутності конвекції та сталій матриці дифузії вичерпний аналіз симетрійних властивостей системи (1) проведений у роботах [8 – 11, 21 – 27]. Конформна інваріантність системи (1) при $K(U) = R(U) = 0$ досліджено в роботах [15, 35]. Повний опис нелінійностей, при яких система (1) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, здійснений у роботах [29, 36]. Дослідженню умовних симетрій системи (1) присвячено ряд робіт (див. [12] та цитовану там літературу). Ідеї знаходження нелокальних симетрій диференціальних рівнянь запропоновані та розроблені в роботах [2 – 7, 13, 19].

У роботі [17] Дж. Кінг навів нелокальні перетворення еквівалентності, які скалярне рівняння дифузії

$$u_t = (d(u)u_x)_x, \tag{2}$$

де $u = u(t,x)$, коефіцієнт дифузії $d(u)$ — довільна гладка функція, зводять до рівняння того ж класу

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\widetilde{d}(z)\frac{\partial z}{\partial x_1}\right).$$

Дані перетворення є суперпозицією трьох перетворень

$$t = t, \qquad x = x, \qquad u = \frac{\partial v}{\partial x}; \tag{3}$$

$$t = x_0, \qquad x = w, \qquad v = x_1; \tag{4}$$

$$x_0 = x_0, \qquad x_1 = x_1, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_1} = z, \tag{5}$$

де $v = v(t,x)$, $w = w(x_0,x_1)$, $z = z(x_0,x_1)$ — нові невідомі функції. Внаслідок перетворень (3)–(5) функції $d(u)$ та $\widetilde{d}(z)$ пов'язані між собою наступним співвідношенням

$$\widetilde{d}(z) = \frac{1}{z^2} d\left(\frac{1}{z}\right).$$

Перетворення (3)–(5) були використані в роботі [39] для розв'язування наступних трьох задач: побудова нелокальних формул розмноження розв'язків рівняння (2); знаходження нелокальних формул суперпозиції розв'язків цього рівняння; одержання нелокальних анзаців, які редукують рівняння (2) до звичайних диференціальних рівнянь.

Результати Кінга узагальнено В. Тичиніним у роботі [31] на випадок скалярного рівняння конвекції-дифузії

$$u_t = ((d(u)u_x) + g(u))_x.$$

У [37] результати робіт [17, 39] були узагальнені на випадок системи рівнянь дифузії

$$U_t = (D(U)U_x)_x, \tag{6}$$

де показано, що існує два різних нелокальних перетворення еквівалентності системи рівнянь (6)

$$\begin{gathered} t = t, \qquad x = x, \qquad u^a = \frac{\partial v^a}{\partial x}; \\ P_1 : t = x_0, \quad x = w^1, \qquad v^1 = x_1, \qquad v^2 = w^2; \\ x_0 = x_0, \qquad x_1 = x_1, \qquad \frac{\partial w^a}{\partial x_1} = z^a \end{gathered} \tag{7}$$

та

$$\begin{gathered} t = t, \qquad x = x, \qquad u^a = \frac{\partial v^a}{\partial x}; \\ P_2 : t = x_0, \qquad x = w^2, \qquad v^1 = w^1, \qquad v^2 = x_1; \\ x_0 = x_0, \qquad x_1 = x_1, \qquad \frac{\partial w^a}{\partial x_1} = z^a, \end{gathered} \tag{8}$$

які систему рівнянь (6) зводять до системи того ж класу вигляду

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\widetilde{D}(Z)\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right).$$

При цьому елементи матриці дифузії $D(U)$ та $\widetilde{D}(Z)$ пов'язані між собою наступними співвідношеннями

$$\begin{gathered} \widetilde{d}^{11} = \left(z^1\right)^{-2}\left(d^{11} + z^2 d^{12}\right), \quad \widetilde{d}^{12} = -\left(z^1\right)^{-1} d^{12}, \\ \widetilde{d}^{21} = \left(z^1\right)^{-3}\left[z^2\left(d^{11} + z^2 d^{12}\right) - \left(d^{21} + z^2 d^{22}\right)\right], \\ \widetilde{d}^{22} = \left(z^1\right)^{-2}\left(d^{22} - z^2 d^{12}\right), \end{gathered} \tag{9}$$

де $\widetilde{d}^{ab} = \widetilde{d}^{ab}(z),\ d^{ab} = d^{ab}\left(\dfrac{1}{z^1}, \dfrac{z^2}{z^1}\right)$ для перетворення P_1 та

$$\begin{gathered}\widetilde{d}^{11} = \left(z^2\right)^{-2}\left(d^{11} - z^1 d^{21}\right),\\ \widetilde{d}^{12} = \left(z^2\right)^{-3}\left[-\left(z^1 d^{11} + d^{12}\right) + z^1\left(z^1 d^{21} + d^{22}\right)\right],\\ \widetilde{d}^{21} = -\left(z^2\right)^{-1} d^{21}, \quad \widetilde{d}^{22} = \left(z^2\right)^{-2}\left(z^1 d^{21} + d^{22}\right),\end{gathered} \tag{10}$$

де $\widetilde{d}^{ab} = \widetilde{d}^{ab}(z),\ d^{ab} = d^{ab}\left(\dfrac{z^1}{z^2}, \dfrac{1}{z^2}\right)$ для перетворення P_2.

У роботі [38] перетворення (7), (8) використані для лінеаризації системи рівнянь дифузії (6).

За відсутності реактивного доданка $(R(u) = 0)$, систему (1) за умови

$$\frac{\partial k^{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial k^{12}}{\partial u^1}, \qquad \frac{\partial k^{21}}{\partial u^2} = \frac{\partial k^{22}}{\partial u^1}, \tag{11}$$

можна звести до системи

$$U_t = (D(U)U_x + G(U))_x, \tag{12}$$

де елементи матриці

$$G(U) = \begin{pmatrix} g^1(U) \\ g^2(U) \end{pmatrix}$$

певним чином виражаються через елементи матриці $K(U)$.

Узагальнюючи результати робіт [17, 31, 37] на випадок системи рівнянь конвекції-дифузії, в [30] одержано наступні твердження.

Теорема 1. *Перетворення P_1 є нелокальними перетвореннями еквівалентності системи рівнянь конвекції-дифузії* (12), *тобто зводять її до системи того ж класу*

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\widetilde{D}(Z)\frac{\partial Z}{\partial x_1} + \widetilde{G}(Z)\right], \tag{13}$$

причому коефіцієнти дифузії $D(U)$ та $\widetilde{D}(Z)$ пов'язані між собою формулами (9), *а коефіцієнти конвекції $G(U)$ та $\widetilde{G}(Z)$ — наступними співвідношеннями*

$$\widetilde{g}^1 = -z^1 g^1, \quad \widetilde{g}^2 = -z^2 g^1 + g^2,$$

де $\widetilde{g}^a = \widetilde{g}^a(Z),\ g^a = g^a\left(\dfrac{1}{z^1}, \dfrac{z^2}{z^1}\right)$.

Теорема 2. *Перетворення P_2 є нелокальними перетвореннями еквівалентності системи рівнянь* (12), *тобто зводять її до системи того ж класу вигляду* (13), *причому коефіцієнти дифузії $D(U)$ та $\widetilde{D}(Z)$ пов'язані між собою формулами* (10), *а коефіцієнти конвекції $G(U)$ та $\widetilde{G}(Z)$ — наступними співвідношеннями*

$$\widetilde{g}^1 = g^1 - z^1 g^2, \qquad \widetilde{g}^2 = -z^2 g^2,$$

де $\widetilde{g}^a = \widetilde{g}^a(z), g^a = g^a\left(\dfrac{z^1}{z^2}, \dfrac{1}{z^2}\right)$.

У сучасних біофізичних дослідженнях процеси симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль, коли кільця хемотаксису зберігають різко окреслену форму й рухаються зі швидкістю, яка залежить від рухливості бактерій та їх хемотаксичних властивостей, добре описуються математичними моделями, які засновані на рівняннях Келлера – Зегеля [16]

$$\begin{aligned} S_t &= D_S S_{xx} + k_1 g\,(S)\,b, \\ b_t &= -V\,(b\chi(S)S_x)_x + D_b b_{xx} + k_2 g\,(S)\,b, \end{aligned} \tag{14}$$

де $S(t,x)$ — концентрація субстрату-атрактанту, який споживається бактеріями, $b(t,x)$ — щільність бактерій, $g\,(S)$ — питома швидкість росту бактерій, $\chi\,(S)$ — функція хемотаксичної відповіді, D_S та D_b — коефіцієнти дифузії субстрату й бактерій відповідно, $V,\ k_1,\ k_2$ — сталі, t, x — часова та просторова змінні. Моделлю Келлера – Зегеля та її деякими модифікаціями описуються також формування і поширення хемотаксичних кілець Адлера (див. [1]) та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [32].

Кооперативна поведінка найпростіших мікроорганізмів описується також системою вигляду (12) із реактивним доданком (див., наприклад, [20]). Розглянемо систему (14) за відсутності реактивної складової та наявності конвективної взаємодії бактерій та субстрату-атрактанту

$$U_t = \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x + \begin{pmatrix} g^1(U) \\ g^2(U) \end{pmatrix}\right]_x, \tag{15}$$

де довільні гладкі функції своїх аргументів $f(u^1),\ g^1(u^1,u^2),\ g^2(u^1,u^2)$ — коефіцієнти дифузивної та конвективної взаємодії, $\lambda_1,\ \lambda_2$ — довільні сталі.

Оскільки процеси хемотаксису задовольняють принцип відносності Галілея, тобто протікають однаково в різних інерційних системах, що рухаються з постійною швидкістю по відношенню одна до одної, то природно вимагати, щоб і математична модель (15) задовольняла тому ж принципу відносності, тобто була інваріантна відносно групи перетворень Галілея. У роботі [29] описані всі можливі системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень. У даній роботі, зокрема показано, що система рівнянь

$$U_t = \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (u^2)^2\right]_x, \tag{16}$$

де μ — const (не втрачаючи загальності, можна покласти $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ із базовими генераторами

$$\partial_t, \qquad \partial_x, \qquad D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q - u^2\partial_{u^2}, \qquad G = t\partial_x + xQ,$$

$$Q = -\frac{1}{2}u^1\partial_{u^1}, \qquad \Pi = t^2\partial_t + t_x\partial_x + \left(\frac{1}{2}x^2 + t\right)Q - tu^2\partial_{u^2}$$

при $\mu \neq 0$ та алгебри

$$\left\langle AG_2(1,1), u^2\partial_{u^2}\right\rangle$$

при $\mu = 0$.

Оскільки система рівнянь (16) задовольняє принцип відносності Галілея, є частинним випадком системи (15), а коефіцієнти її конвективних доданків задовольняють умови (11), то поставимо задачу застосування перетворень P_1 та P_2 до знаходження нелокальних анзаців, редукції системи рівнянь (16) до систем звичайних диференціальних рівнянь та знаходження точних розв'язків системи (16).

1. Образи системи рівнянь хемотаксису (16) та їхні ліївські симетрії. Перш за все зауважимо, що при $\mu \neq 0$ система рівнянь (16) заміною

$$t \to \frac{t}{\mu^2}, \qquad x \to \frac{x}{\mu}, \qquad U \to U$$

зводиться до вигляду (16) при $\mu = 1$. Тому надалі будемо вважати, що $\mu \in \{0, 1\}$.

За допомогою перетворень P_1 система (16) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{(z^1)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\lambda+1)\dfrac{z^2}{z^1} & \lambda \end{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial x_1} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\frac{z^2}{z^1}\right)^2\right]. \tag{17}$$

Теорема 3. *Максимальною в розумінні С. Лі алгеброю інваріантності системи рівнянь* (17) *є алгебра з базовими генераторами*

1) *при* $\mu = 1$

$$A^{bas} = \Big\langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0},\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},$$
$$D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - z^2\partial_{z^2},\ D_2 = x_1\partial_1 - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}\Big\rangle; \tag{18}$$

2) *при* $\mu = 0$

$$A^{bas}, z^2\partial_{z^2}. \tag{19}$$

На основі перетворень P_2 система рівнянь (16) набуде вигляду

$$\frac{\partial Z}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{(z^2)^2}\begin{pmatrix} -1 & (\lambda+1)\dfrac{z^1}{z^2} \\ -2\dfrac{z^2}{z^1} & \lambda+2 \end{pmatrix}\frac{\partial Z}{\partial x_1} - \frac{\mu}{(z^2)^2}Z\right]. \tag{20}$$

Теорема 4. *Максимальна в розумінні С. Лі алгебра інваріантності системи рівнянь* (20) *в залежності від значень коефіцієнтів* λ *та* μ *задається наступними базовими генераторами*

1) $\lambda \neq 1,\ \mu = 1:$

$$A^{bas}, \qquad Q = e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\left(\lambda\partial_1 + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}\right), \tag{21}$$

де

$$A^{bas} = \Big\langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0},\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ D = 2x_0\partial_0 + z^2\partial_{z^2},\ z^1\partial_{z^1}\Big\rangle;$$

2) $\lambda = 1,\ \mu = 1:$

$$\begin{gathered} A^{bas}, \quad Q_1 = e^{x_1}\left(\partial_1 - 2z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}\right), \\ Q_2 = e^{-x_1}\left(\partial_1 + z^1\partial_{z^1} + z^2\partial_{z^2}\right); \end{gathered} \tag{22}$$

3) $\lambda = 1,\ \mu = 0:$

$$A^{bas}, \quad D_1 = x_1\partial_1 - z^2\partial_{z^2}, \qquad K = x_1^2\partial_1 - 3x_1z^1\partial_{z^1} - 2x_1z^2\partial_{z^2}; \tag{23}$$

4) $\lambda \neq 1,\ \mu = 0:$

$$A^{bas}, \quad D_2 = x_1\partial_1 - z^1\partial_{z^1} - z^2\partial_{z^2}. \tag{24}$$

Теореми 3, 4 доводяться стандартним методом С. Лі (див., наприклад, [14, 18, 33, 34]).

Застосуємо ліївські симетрії образів (17), (20) та перетворення P_1, P_2 для знаходження нелокальних анзаців, які редукують систему рівнянь (16) до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Зауважимо, що перетворення P_1 та P_2 мають деяку специфіку по відношенню до ліївських симетрій образів системи (16). Ця специфіка полягає в тому, що оператори алгебри інваріантності образів, коефіцієнти яких лінійним чином залежать від змінної x_1, під дією перетворень, обернених до (7) або (8), переходять в ліївські оператори алгебри інваріантності системи рівнянь (16). У зв'язку з цим ми виключимо з розгляду алгебри операторів інваріантності першого образу (18), (19), алгебру інваріантності другого образу (24) та деякі підалгебри алгебр (21), (22), (23), які не містять операторів Q, Q_1, Q_2 та K.

2. Ліївські анзаци другого образу. Застосувавши методи знаходження нееквівалентних ліївських анзаців (див., наприклад, [14, 33]) алгебр (21)–(23), приходимо до наступних результатів.

I. $\lambda \neq 1,\ \mu = 1$. Нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри (21), які приводять до нелокальних анзаців системи (16) мають вигляд

$$X_1 = c_2 D + c_3 z^1\partial_{z^1} + Q =$$
$$= 2c_2 x_0\partial_0 + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\partial_1 + \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_3\right) z^1\partial_{z^1} + \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_2\right) z^2\partial_{z^2}, \tag{25}$$

$$X_2 = c_0\partial_0 + c_3 z^1\partial_{z^1} + Q = c_0\partial_0 + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\partial_1 + \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_3\right) z^1\partial_{z^1} + e^{-\frac{x_1}{\lambda}} z^2\partial_{z^2}. \tag{26}$$

Оператори X_1, X_2 породжують наступні ліївські анзаци для системи рівнянь (20):

$$z^1 = x_0^m e^{\frac{x_1}{\lambda}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x_1}{\lambda}}\varphi^2(\omega), \quad \omega = p\ln x_0 + e^{\frac{x_1}{\lambda}}, \quad p = -\frac{1}{2c_2}, \quad m = \frac{c_3}{2c_2}, \tag{27}$$

$$z^1 = e^{mx_0 + \frac{x_1}{\lambda}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{\frac{x_1}{\lambda}}\varphi^2(\omega), \quad \omega = px_0 + e^{\frac{x_1}{\lambda}}, \quad p = -\frac{1}{c_0}, \quad m = \frac{c_3}{c_0}, \tag{28}$$

де $\varphi^1 = \varphi^1(\omega)$, $\varphi^2 = \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції.

II. $\lambda = \mu = 1$. Нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри (22), які приводять до нелокальних анзаців системи (16)

$$
\begin{gathered}
X_3 = 2c_2x_0\partial_0 + e^{-x_1}\partial_1 + \left(e^{-x_1} + c_3\right)z^1\partial_{z^1} + \left(e^{-x_1} + c_2\right)z^2\partial_{z^2},\\
X_4 = c_0\partial_0 + e^{-x_1}\partial_1 + \left(e^{-x_1} + c_3\right)z^1\partial_{z^1} + e^{-x_1}z^2\partial_{z^2},\\
X_5 = 2x_0\partial_0 + \left(c_4e^{x_1} + c_5e^{-x_1}\right)\partial_1 + \left(-2c_4e^{x_1} + c_5e^{-x_1} + c_3\right)z^1\partial_{z^1} +\\
+\left(-c_4e^{x_1} + c_5e^{-x_1} + 1\right)z^2\partial_{z^2},\\
X_6 = \partial_0 + \left(c_4e^{x_1} + c_5e^{-x_1}\right)\partial_1 + \left(-2c_4e^{x_1} + c_5e^{-x_1} + c_3\right)z^1\partial_{z^1} +\\
+\left(-c_4e^{x_1} + c_5e^{-x_1}\right)z^2\partial_{z^2},\\
X_7 = 2c_2x_0\partial_0 + \left(e^{x_1} + c_1\right)\partial_1 + \left(-2e^{-x_1} + c_3\right)z^1\partial_{z^1} + \left(-e^{x_1} + c_2\right)z^2\partial_{z^2},\\
X_8 = c_0\partial_0 + \left(e^{x_1} + c_1\right)\partial_1 + \left(-2e^{x_1} + c_3\right)z^1\partial_{z^1} - e^{x_1}z^2\partial_{z^2}.
\end{gathered}
\tag{29}
$$

Оператори $X_3, \ldots, X_8$ породжують наступні ліївські анзаци для системи рівнянь (20):

$$
\begin{gathered}
z^1 = x_0^m e^{x_1}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1}\varphi^2(\omega), \quad \omega = p\ln x_0 + e^{x_1}, \quad \left(p = -\frac{1}{2c_2},\ m = \frac{c_3}{2c_2}\right);\\
z^1 = e^{mx_0 + x_1}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_1}\varphi^2(\omega), \quad \omega = px_0 + e^{x_1}, \left(p = -\frac{1}{c_2},\ m = \frac{c_2}{c_0}\right);\\
z^1 = x_0^k e^{x_1}\left(m^2e^{2x_1} + 1\right)^{-\frac{3}{2}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} e^{x_1}\left(m^2e^{2x_1} + 1\right)^{-1}\varphi^2(\omega),\\
\omega = p\ln x_0 + \tan^{-1}\left(me^{x_1}\right), \quad \left(p = -\frac{1}{2}\sqrt{c_4c_5},\ m = \sqrt{\frac{c_4}{c_5}},\ k = \frac{1}{2}c_3,\ c_4c_5 > 0\right);\\
z^1 = e^{kx_0 + x_1}\left(m^2e^{2x_1} + 1\right)^{-\frac{3}{2}}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{x_1}\left(m^2e^{2x_1} + 1\right)^{-1}\varphi^2(\omega),\\
\omega = px_0 + \tan^{-1}\left(me^{x_1}\right), \quad \left(p = -\sqrt{c_4c_5}, \quad m = \sqrt{\frac{c_4}{c_5}},\ k = c_3\right);\\
z^1 = x_0^m e^{-2x_1}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{p+\frac{1}{2}} e^{-x_1}\varphi^2(\omega), \quad \omega = x_0^p\left(1 + ke^{-x_1}\right),\\
\left(k = c_1,\ p = \frac{c_1}{2c_2},\ m = \frac{2c_1 + c_3}{2c_2}\right);\\
z^1 = e^{mx_0 - 2x_1}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = e^{px_0 - x_1}\varphi^2(\omega), \quad \omega = e^{px_0}\left(1 + ke^{-x_1}\right),\\
\left(k = c_1,\ m = \frac{2c_1 + c_3}{c_0},\ p = \frac{c_1}{c_0}\right).
\end{gathered}
\tag{30}
$$

III. $\lambda = 1,\ \mu = 0$. Нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри (22), які приводять до нелокальних анзаців системи (16)

$$\begin{gathered}
X_9 = 2c_2x_0\partial_0 + x_1^2\partial_1 + (-3x_1 + c_3)z^1\partial_{z^1} + (-2x_1 + c_2)z^2\partial_{z^2}, \\
X_{10} = 2c_2x_0\partial_0 + (x_1^2 - 1)\partial_1 + (-3x_1 + c_3)z^1\partial_{z^1} + (-2x_1 + c_2)z^2\partial_{z^2}, \\
X_{11} = 2c_2x_0\partial_0 + (x_1^2 + 1)\partial_1 + (-3x_1 + c_3)z^1\partial_{z^1} + (-2x_1 + c_2)z^2\partial_{z^2}, \\
X_{12} = c_0\partial_0 + x_1^2\partial_1 + (-3x_1 + c_3)z^1\partial_{z^1} - 2x_1z^2\partial_{z^2}, \\
X_{13} = c_0\partial_0 + (x_1^2 - 1)\partial_1 + (-3x_1 + c_3)z^1\partial_{z^1} - 2x_1z^2\partial_{z^2}, \\
X_{14} = c_0\partial_0 + (x_1^2 + 1)\partial_1 + (-3x_1 + c_3)z^1\partial_{z^1} - 2x_1z^2\partial_{z^2}.
\end{gathered} \tag{31}$$

Оператори $X_9, \ldots, X_{14}$ породжують наступні ліївські анзаци для системи рівнянь (20):

$$\begin{gathered}
z^1 = x_0^m x_1^{-3}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} x_1^{-2}\varphi^2(\omega), \quad \omega = p\ln x_0 + x_1^{-1}; \\
z^1 = x_0^m \left(x_1^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega), \; z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \left(x_1^2 - 1\right)^{-1} \varphi^2(\omega), \quad \omega = p\ln x_0 + \tanh^{-1} x_1; \\
z^1 = x_0^m \left(x_1^2 + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \left(x_1^2 + 1\right)^{-1} \varphi^2(\omega), \quad \omega = p\ln x_0 + \tan^{-1} x_1; \\
z^1 = e^{mx_0} x_1^{-3}\varphi^1(\omega), \quad z^2 = x_1^{-2}\varphi^2(\omega), \quad \omega = px_0 + x_1^{-1}; \\
z^1 = e^{mx_0} \left(x_1^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \left(x_1^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^2(\omega), \quad \omega = px_0 + \tanh^{-1} x_1; \\
z^1 = e^{mx_0} \left(x_1^2 + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(\omega), \quad z^2 = \left(x_1^2 + 1\right)^{-1} \varphi^2(\omega), \quad \omega = px_0 + \tan^{-1} x_1.
\end{gathered} \tag{32}$$

У перших трьох анзацах (32) $p = \dfrac{1}{2c_2}$, $m = \dfrac{c_3}{2c_2}$, а в останніх трьох $p = \dfrac{1}{c_0}$, $m = \dfrac{c_3}{c_0}$.

3. Нелокальні анзаци системи рівнянь хемотаксису. Подіявши перетворенням, оберненим до P_2 на ліївські анзаци системи рівнянь (20), які задаються формулами (27), (28), (30), (32), одержимо нелокальні анзаци для системи (16). Перехід від ліївських анзаців до нелокальних наведемо на прикладі анзацу (27).

Подіємо на анзац (27) третім перетворенням (8). У результаті одержимо

$$\frac{\partial w^1}{\partial x_1} = x_0^m e^{\frac{x_1}{\lambda}} \varphi^1(\omega), \qquad \frac{\partial w^2}{\partial x_1} = x_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x_1}{\lambda}} \varphi^2(\omega), \qquad \omega = p\ln x_0 + e^{\frac{x_1}{\lambda}}. \tag{33}$$

Провівши інтегрування за змінною x_1 в формулах (33), будемо мати

$$w^1 = x_0^m \lambda\Phi^1(\omega), \qquad w^2 = x_0^{\frac{1}{2}} \lambda\Phi^2(\omega), \quad \omega = p\ln x_0 + e^{\frac{x_1}{\lambda}}, \tag{34}$$

де $\Phi^1(\omega)$ та $\Phi^2(\omega)$ — первісні для функцій $\varphi^1(\omega)$ та $\varphi^2(\omega)$ відповідно.

Застосувавши до (34) друге перетворення (8), одержимо

$$v^1 = t^m \lambda\Phi^1(\omega), \qquad x = t^{\frac{1}{2}} \lambda\Phi^2(\omega), \quad \omega = p\ln t + e^{\frac{v^2}{\lambda}}, \tag{35}$$

Помінявши місцями інваріантні змінні $\lambda\Phi^2$ та ω, формули (35) перепишемо наступним чином

$$v^1 = t^m \lambda\Phi^1(\omega), \qquad v^2 = \lambda\ln(\lambda\Phi^2 - p\ln t), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{36}$$

Подіявши першим перетворенням (8) на формули (36), отримаємо

$$u^1 = t^m \lambda\varphi^1(\omega) t^{-\frac{1}{2}}, \qquad u^2 = \lambda\frac{\lambda\dot{\Phi}^2(\omega)t^{-\frac{1}{2}}}{\lambda\Phi^2(\omega) - p\ln t}, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{37}$$

Якщо в формулах (37) ввести наступні позначення

$$\lambda\varphi^1(\omega) = \psi^1(\omega), \qquad \lambda\Phi^2(\omega) = \psi^2(\omega), \qquad m - \frac{1}{2} = k,$$

де $\psi^1 = \psi^1(\omega)$, $\psi^2 = \psi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, k — довільна стала, то остаточно отримуємо нелокальний анзац для системи рівнянь (16)

$$u^1 = t^k\psi^1(\omega), \qquad u^2 = \lambda t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - p\ln t}, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x. \tag{38}$$

Провівши аналогічні міркування щодо анзаців (28), (30), (32), отримаємо нелокальні анзаци для системи (16). Анзац (28) переходить в анзац

$$u^1 = e^{mt}\psi^1(\omega), \qquad u^2 = \lambda\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - pt}, \quad \omega = x. \tag{39}$$

Анзаци (38) і (39) можливі у випадку I. $\lambda \neq 1,\ \mu = 1$. У випадку II. $\lambda = \mu = 1$ ліївські анзаци (30) під дією перетворення, оберненого до P_2 переходять у наступні нелокальні анзаци для системи рівнянь (16)

$$\begin{gathered}
u^1 = t^k\psi^1(\omega), \qquad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - p\ln t}, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \\
u^1 = e^{mt}\psi^1(\omega), \qquad u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - pt}, \quad \omega = x; \\
u^1 = t^n\psi^1(\omega)\cos\alpha,\ u^2 = 2t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha},\ \omega = t^{-\frac{1}{2}}x,\ \alpha = \psi^2(\omega) - p\ln t; \\
u^1 = e^{kt}\psi^1(\omega)\cos\alpha, \qquad u^2 = 2\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\sin 2\alpha}, \quad \omega = x, \qquad \alpha = \psi^2(\omega) - pt; \\
u^1 = t^q(\psi^2(\omega) - t^p)\psi^1(\omega), \qquad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) - t^p}, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \\
u^1 = e^{qt}(\psi^2(\omega) - e^{pt})\psi^1(\omega), \qquad u^2 = -\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\psi^2(\omega) + e^{pt}}, \quad \omega = x,
\end{gathered} \tag{40}$$

де $p,\ q,\ k,\ m,\ n$ — довільні сталі.

Зауважимо, що перші два анзаци (40) є частинними випадками анзаців (38), (39) при $\lambda = 1$.

Ліївські анзаци (32) у випадку III. $\lambda = 1,\ \mu = 0$ під дією перетворення, оберненого до P_2 переходять у наступні нелокальні анзаци для системи (16):

$$\begin{gathered}
u^1 = t^k\alpha\psi^1(\omega), \qquad u^2 = -t^{-\frac{1}{2}}\alpha^{-2}\dot{\psi}^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \\
u^1 = t^k\psi^1(\omega)\cosh\alpha, \qquad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cosh^2\alpha}, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \\
u^1 = t^k\psi^1(\omega) cos\alpha, \qquad u^2 = t^{-\frac{1}{2}}\frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cos^2\alpha}, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x; \\
u^1 = e^{mt}\beta\psi^1(\omega), \qquad u^2 = -\beta^{-2}\dot{\psi}^2(\omega), \quad \omega = x; \\
u^1 = e^{mt}\psi^1(\omega)\cosh\beta, \qquad u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cosh^2\beta}, \quad \omega = x;
\end{gathered} \tag{41}$$

$$u^1 = e^{mt}\psi^1(\omega)\cos\beta, \qquad u^2 = \frac{\dot{\psi}^2(\omega)}{\cos^2\beta}, \quad \omega = x,$$

де $\alpha = \psi^2(\omega) - p\ln t$, $\beta = \psi^2(\omega) - pt$.

4. Нелокальні оператори інваріантності системи рівнянь хемотаксису. Наявність нелокальних анзаців для системи рівнянь (16) означає наявність нелокальних операторів інваріантності даної системи. Тому природно поставити задачу знаходження таких операторів. Дану задачу можна розв'язати, подіявши на ліївські оператори $X_1, \ldots, X_{14}$ другого образу системи (16) оберненим перетворенням P_2. Проілюструємо це на прикладі оператора X_1.

Подіємо оператором X_1 на розв'язок системи рівнянь (20) вигляду

$$z^1 - f^1(x_0, x_1) = 0,$$
$$z^2 - f^2(x_0, x_1) = 0.$$

У результаті отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &2c_2x_0\frac{\partial z^1}{\partial x_0} + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial z^1}{\partial x_1} - \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_3\right)z^1 = 0, \\ &2c_2x_0\frac{\partial z^2}{\partial x_0} + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial z^2}{\partial x_1} - \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_2\right)z^2 = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Застосуємо до системи (42) третє перетворення (8). Тоді

$$\begin{aligned} &2c_2x_0\frac{\partial^2 w^1}{\partial x_0\partial x_1} + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial^2 w^1}{\partial x_1^2} - \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_3\right)\frac{\partial w^1}{\partial x_1} = 0, \\ &2c_2x_0\frac{\partial^2 w^2}{\partial x_0\partial x_1} + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial^2 w^2}{\partial x_1^2} - \left(e^{-\frac{x_1}{\lambda}} + c_2\right)\frac{\partial w^2}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Проінтегрувавши рівняння (43) за змінною x_1, одержимо

$$\begin{aligned} &2c_2x_0\frac{\partial w^1}{\partial x_0} + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial w^1}{\partial x_1} - c_3w^1 = 0, \\ &2c_2x_0\frac{\partial w^2}{\partial x_0} + \lambda e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\frac{\partial w^2}{\partial x_1} - c_2w^2 = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Застосувавши до системи рівнянь (44) друге перетворення (8), приходимо до наступних рівнянь

$$\begin{aligned} &2c_2t\frac{\partial v^1}{\partial t} + c_2x\frac{\partial v^1}{\partial x} - c_3v^1 = 0, \\ &2c_2t\frac{\partial v^2}{\partial t} + c_2x\frac{\partial v^2}{\partial x} - \lambda e^{-\frac{v^2}{\lambda}} = 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Продиференціювавши рівняння системи (45) за змінною x та використавши перше перетворення (8) отримаємо

$$2c_2t\frac{\partial u^1}{\partial t} + c_2x\frac{\partial u^1}{\partial x} + (c_2 - c_3)u^1 = 0,$$
$$2c_2t\frac{\partial u^2}{\partial t} + c_2x\frac{\partial u^2}{\partial x} + \left(c_2 + e^{-\frac{v^2}{\lambda}}\right)u^2 = 0.$$

Врахувавши, що $c_2 = -\dfrac{1}{2p}$, $c_3 = -\dfrac{m}{p}$ (див. (27)), знаходимо

$$\begin{gathered} 2t\frac{\partial u^1}{\partial t} + x\frac{\partial u^1}{\partial x} - (2m-1)u^1 = 0, \\ 2t\frac{\partial u^2}{\partial t} + x\frac{\partial u^2}{\partial x} - \left(2pe^{-\frac{v^2}{\lambda}} - 1\right)u^2 = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Із системи (46) отримуємо, що нелокальний оператор який відповідає лiївському оператору (25) і породжує анзац (38), має вигляд

$$Q_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + (2m-1)u^1\partial_{u^1} + \left(2pe^{-\frac{v^2}{\lambda}} - 1\right)u^2\partial_{u^2}, \tag{47}$$

де $v^2 = \displaystyle\int u^2 dx$. Аналогічно отримуються інші нелокальні оператори, які відповідають лiївським операторам (26), (29), (31) і породжують анзаци (39), (40) та (41). Наведемо їх остаточний вигляд

$$\begin{gathered} Q_2 = \partial_t + mu^1\partial_{u^1} + pe^{-\frac{v^2}{\lambda}}u^2\partial_{u^2}, \\ Q_3 = 2t\partial_t + x\partial_x + (2m-1)u^1\partial_{u^1} + \left(2pe^{-\frac{v^2}{\lambda}} - 1\right)u^2\partial_{u^2}, \\ Q_4 = \partial_t + mu^1\partial_{u^1} + pe^{-v^2}u^2\partial_{u^2}, \\ Q_5 = 2t\partial_t + x\partial_x + \left(2mpe^{v^2} + 2k - 1\right)u^1\partial_{u^1} - \left(2mpe^{v^2} - \frac{2p}{m}e^{-v^2} + 1\right)u^2\partial_{u^2}, \\ Q_6 = \partial_t + \left(mpe^{v^2} + k\right)u^1\partial_{u^1} - \left(mpe^{v^2} - \frac{p}{m}e^{-v^2}\right)u^2\partial_{u^2}, \\ Q_7 = 2t\partial_t + x\partial_x - \left(\frac{2p}{k}e^{v^2} + 4p - 2m + 1\right)u^1\partial_{u^1} + \left(\frac{2p}{k}e^{v^2} - 1\right)u^2\partial_{u^2}, \\ Q_8 = \partial_t - \left(\frac{p}{k}e^{v^2} + 2p - m\right)u^1\partial_{u^1} + \frac{p}{k}e^{v^2}u^2\partial_{u^2}, \\ Q_9 = 2t\partial_t + x\partial_x - \left(2pv^2 + 1 - 2m\right)u^1\partial_{u^1} + \left(4pv^2 - 1\right)u^2\partial_{u^2}, \\ Q_{10} = Q_9, \\ Q_{11} = Q_9, \\ Q_{12} = \partial_t - \left(pv^2 - m\right)u^1\partial_{u^1} + 2pv^2u^2\partial_{u^2}, \\ Q_{13} = Q_{12}, \\ Q_{14} = Q_{12}. \end{gathered} \tag{48}$$

Проаналізувавши вигляд операторів (47), (), приходимо до висновку, що вони є операторами потенційних симетрій системи (16). У напрямку дослідження потенційних симетрій варто зазначити роботу [28].

5. Редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь для системи рівнянь хемотаксису. Підставивши знайдені нелокальні анзаци в систему рівнянь (16), після дещо громіздких перетворень одержуємо наступні редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь для визначення функцій $\psi^1(\omega),\ \psi^2(\omega)$.

I. $\lambda \neq 1,\ \mu = 1$.

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - k\psi^1 = 0,\\ \lambda\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{49}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 - m\psi^1 = 0,\\ \lambda\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{50}$$

II. $\lambda = \mu = 1$.

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - k\psi^1 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 - m\psi^1 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - \left(\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + n\right)\psi^1 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{53}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 - \left(\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + k\right)\psi^1 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p = 0;\end{gathered} \tag{54}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - (p+q)\psi^1 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p\psi^2 = 0;\end{gathered} \tag{55}$$

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 - (p+q)\psi^1 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + p\psi^2 = 0.\end{gathered} \tag{56}$$

III. $\lambda = 1,\ \mu = 0$. Перші три анзаци (41) редукують систему рівнянь (16) до системи

$$\begin{gathered}\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - \left(r\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + k\right)\psi^1 = 0,\\ \ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0,\end{gathered} \tag{57}$$

де $r = -1, 0, 1$.

Останні три анзаци (41) редукують систему рівнянь (16) до системи вигляду

$$\ddot{\psi}^1 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^1 - \left(r\left(\dot{\psi}^2\right)^2 + k\right)\psi^1 = 0,$$
$$\ddot{\psi}^2 + 2\frac{\dot{\psi}^1}{\psi^1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}\omega\dot{\psi}^2 + p = 0. \tag{58}$$

6. Точні розв'язки системи рівнянь хемотаксису. Якщо розв'язати редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь (49) – (58) та використати відповідні анзаци, то в результаті отримаємо точні розв'язки системи рівнянь (16). Наведемо деякі з них:

1. $\lambda \neq 1,\ \mu = 1.$

$$u^1 = c_1 t^{-\frac{1}{2}} e^{\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} A^{-1}(\tau) e^{\frac{\tau^2}{4} - \frac{\tau}{2}} d\tau},$$
$$u^2 = \lambda t^{-\frac{1}{2}} \frac{c_2 e^{\frac{x^2}{4t}} A^{-\frac{2}{\lambda}}\left(t^{-\frac{1}{2}}x\right)}{c_2 \displaystyle\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{\frac{\tau^2}{4\lambda}} A^{-\frac{2}{\lambda}}(\tau) d\tau + c_3 - p\ln t}; \tag{59}$$

$$u^1 = e^{-t}\cos x,$$
$$u^2 = \lambda \frac{\cos^{-\frac{2}{\lambda}} x \left(\displaystyle\int \cos^{\frac{2}{\lambda}} x dx + c_1\right)}{\displaystyle\int \cos^{-\frac{2}{\lambda}} x \left(\int \cos^{\frac{2}{\lambda}} x dx + c_1\right) dx + \lambda t}. \tag{60}$$

2. $\lambda = \mu = 1.$

$$u^1 = e^{-t}\cos x,$$
$$u^2 = \frac{2(x + c_1) + \sin 2x}{(x + c_1)\sin 2x + 4t\cos^2 x}; \tag{61}$$

$$u^1 = e^{-s^2 t}\cos sx - e^{-l^2 t}\cos lx,$$
$$u^2 = \frac{s\sin sx\cos lx - l\sin lx\cos sx}{\cos lx\left(\cos sx + e^{-s^2 t}\cos lx\right)}. \tag{62}$$

3. $\lambda = 1,\ \mu = 0.$

$$u^1 = e^{-t}\left((x + c_1)\sin x + 2t\cos x\right),$$
$$u^2 = \frac{2(x + c_1) + \sin 2x}{\left((x + c_1)\sin x + 2t\cos x\right)^2}. \tag{63}$$

У розв'язках, наведених вище, $c_1,\ c_2,\ c_3,\ s,\ l$ — довільні сталі,

$$A = A(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\frac{\sigma^2}{4}} d\sigma.$$

Отримані розв'язки (59) – (63) системи рівнянь (16) можна візуалізувати за допомогою графіків при наперед заданих значеннях сталих $c_1,\ c_2,\ c_3,\ s,\ l$. Проілюструємо вище сказане для розв'язку (63) вибравши $c_1 = 0$, див. рис. 1, 2.

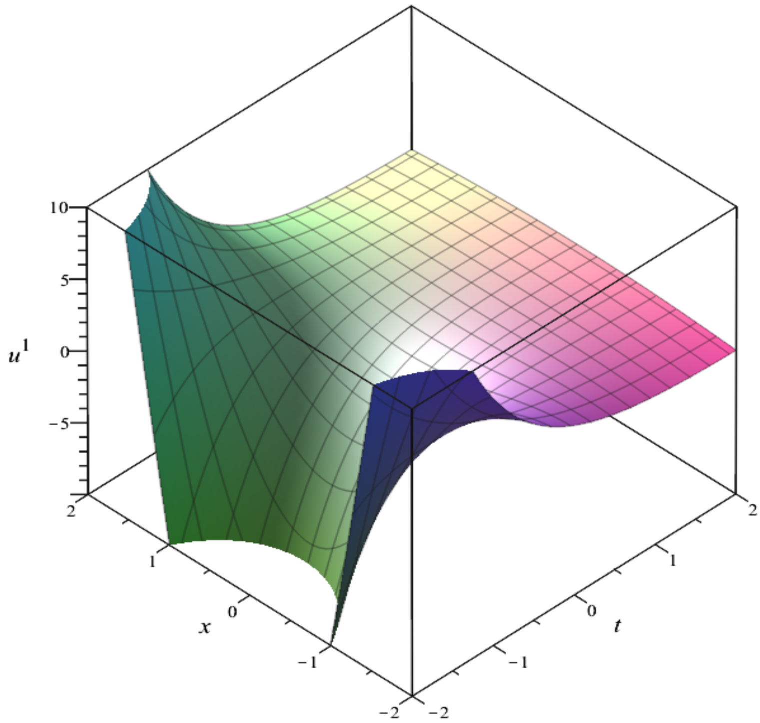

Рис. 1. Графік функції u^1 розв'язку (63) при $t \in [-2, 2],\ x \in [-2, 2]$.

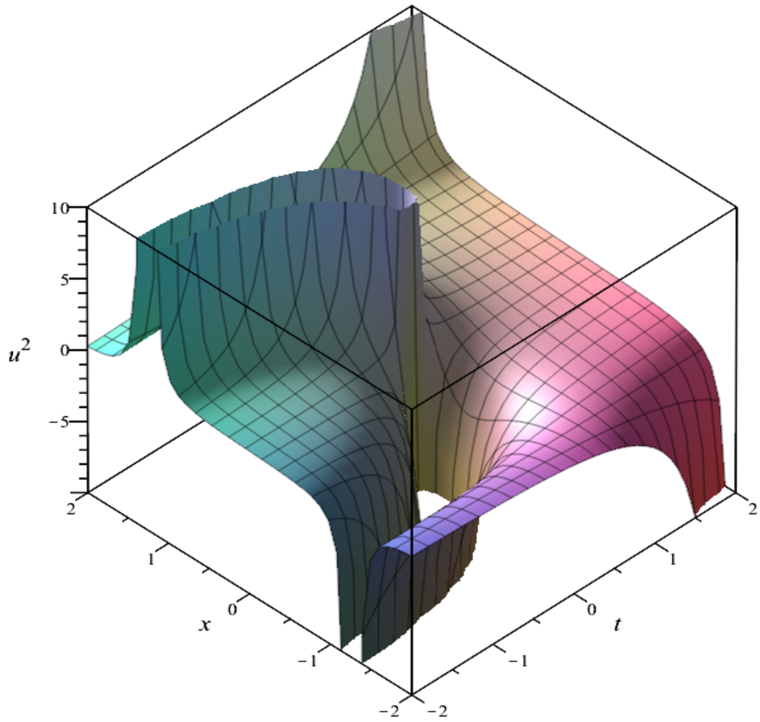

Рис. 2. Графік функції u^2 розв'язку (63) при $t \in [-2, 2],\ x \in [-2, 2]$.

Зауважимо, що отримані розв'язки при $t \to \infty$ обмежені. Це дає підстави припустити, що вони можуть мати застосування при описі конкретних практичних задач.

Висновки. У даній роботі за допомогою нелокальних перетворень еквівалентності встановлений зв'язок між трьома системами, дві з яких постачають для системи рівнянь хемотаксису нелокальні оператори інваріантності. Це дало можливість побудувати нелокальні анзаци, які редукують систему рівнянь хемотаксису до системи звичайних диференціальних рівнянь. У результаті знаходження розв'язків редукованих систем побудовані точні розв'язки системи рівнянь хемотаксису, які неможливо знайти в рамках класичного підходу Софуса Лі.

Література

1. J. Adler, *Chemotaxis bacteria*, Sciense, **153**, 708 – 716 (1996).
2. I. S. Akhatov, R. K. Gazizov, N. K. Ibragimov, *Nonlocal symmetries. Heuristic approach*, J. Sov. Math., **55**, № 1, 1401 – 1450 (1991), https://doi.org/10.1007/BF01097533.
3. G. Bluman, S. Kumei, *Symmetry-based algorithms to relate partial differential equations. I. Local symmetries*, European J. Appl. Math., **1**, 189 – 216 (1990).
4. G. Bluman, S. Kumei, *Symmetry-based algorithms to relate partial differential equations. II. Linearization by nonlocal symmetries*, European J. Appl. Math., **1**, 217 – 223 (1990).
5. G. W. Bluman, J. D. Cole, *The general sismilarity solution of the heat equation*, J. Math. Mech., **18**, 1025 – 1042 (1968/69).
6. G. W. Bluman, G. J. Reid, S. Kumei, *New classes of symmetries for partial differential equations*, J. Math. Phys., **29**, № 4, 806 – 811 (1998); https://doi.org/10.1063/1.527974.
7. G. W. Bluman, A. F. Cheviakov, S. C. Anco, *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, vol. 168, Springer, New York (2010).
8. R. M. Cherniha, J. R. King, *Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I*, J. Phys. A, **33**, 267 – 282 (2000).
9. R. M. Cherniha, J. R. King, *Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction- diffusion systems: I. Addendum*, J. Phys. A, **33**, 7839 – 7841 (2000).
10. R. M. Cherniha, J. R. King, *Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems: II*, J. Phys. A, **36**, 405 – 425 (2003).
11. R. M. Cherniha, J. R. King, *Nonlinear reaction-diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansatze and exact solutions*, J. Math. Anal. Appl., **308**, 11 – 35 (2005).
12. R. Cherniha, M. Serov, O. Pliukhin, *Nonlinear Reaction-Diffusion-Convection Equations: Lie and Conditional Symmetry*, Exact Solutions and Their Applications. Chapman and Hall/CRC Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Florida (2018); https://doi.org/10.1201/9781315154848.
13. A. F. Cheviakov, *Symbolic computation of equivalence transformations and parameter reduction for nonlinear physical models*, Comput. Phys. Commun., **220**, 56 – 73 (2017).
14. W. I. Fushchych, W. M. Shtelen, M. I. Serov, *Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications, **246**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrcht (1993).
15. V. L. Katkov, *The group classification of solutions of the Hopf equations*, Zh. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz., **6**, 105 – 106 (1965).
16. E. F. Keller, L. A. Segel, *Model for chemotaxis*, J. Theor. Biol., **30**, 225 – 234 (1971).
17. J. R. King, *Some non-local transformations between nonlinear diffusion equations*, J. Phys. A: Math. Gen., **23**, 5441 – 5464 (1990); https://stacks.iop.org/0305-4470/23/i=23/a=019.
18. S. Lie, *Uber die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen*, Arch. Math., **6**, № 3, 328 – 368 (1881); https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90123-7 (in German).
19. I. Lisle, *Equivalence Transformations for Classes of Differential Equations*, Ph.D. thesis, Doctoral dissertation, University of British Columbia (1992).
20. V. Nanjundiah, *Chemotaxis, signal relaying and aggregation morphology*, J. Theor. Biol., **42**, № 1, 63 – 105 (1973).
21. A. G. Nikitin, *Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Ginzburg – Landau equations*, J. Math. Anal. Appl., **324**, 615 – 628 (2006).
22. A. G. Nikitin, *Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems*, J. Math. Anal. Appl., **332**, 666 – 690 (2007).
23. A. G. Nikitin, *Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations*, Ukr. Math. Bull., **2**, 153 – 204 (2005).
24. A. G. Nikitin, *Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Ginzburg – Landau equations*, J. Math. Anal. Appl., **324**, 615 – 628 (2006).

25. A. G. Nikitin, *Group classification of systems of nonlinear reaction-diffusion equations with triangular diffusion matrix*, Ukr. Math. J., **59**, 439 – 458 (2007).
26. A. G. Nikitin, R. J. Wiltshire, *Symmetries of systems of nonlinear reaction-diffusion equations*, A. M. Samoilenko (Ed.), Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics, Proc, of the Third Int. Conf., Kiev, July 12 – 18 (1999), Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine (2000), pp. 47 – 59.
27. A. G. Nikitin, R. J. Wiltshire, *System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties*, J. Math. Phys., **42**, 1666 – 1688 (2001).
28. R. O. Popovych, O. O. Vaneeva, N. M. Ivanova, *Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation*, Phys. Lett. A, **362**, 166 – 173 (2007); arXiv: math-ph/0506067.
29. M. I. Serov, T. O. Karpaliuk, O. G. Pliukhin, I. V. Rassokha, *Systems of reaction-convection-diffusion equations invariant under Galilean algebras*, J. Math. Anal. Appl., **422**, № 1, 185 – 211 (2015); https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.08.018.
30. M. I. Serov, Yu. V. Prystavka, *Nonlokal anzätze, reduction and some exact solution for the system of the van der Waals equations, I.*, Math. Anal. Appl., **481**, 98 – 117, 123442 (2020).
31. V. Tychynin, *New nonlocal symmetries of diffusion-convection equations and their connection with generalized hodograph transformation*, Symmetry, **7**, № 4, 1751 – 1767 (2015); https://doi.org/10.3390/sym7041751.
32. Г. Р. Иваницкий, А. Б. Медвинский, М. А. Цыганов, *От беспорядка к упорядочености — на примере движения микроорганизмов*, Успехи физ. наук, **161**, № 4, 13 – 71 (1991).
33. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., Москва (1978).
34. П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, Москва (1989).
35. М. І. Сєров, Н. В. Ічанська, *Ліївська та умовна симетрії нелінійних еволюційних рівнянь*, монографія; Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, ПолтНТУ, Полтава (2010).
36. М. І. Сєров, Т. О. Карпалюк, *Принцип відносності Галілея для еволюційних рівнянь*, Наукова думка, Київ (2020).
37. М. І. Сєров, О. М. Омелян, *Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису*, монографія; Полтав. нац. техн. ун-т ім. Ю. Кондратюка, Полтава (2011).
38. М. І. Сєров, О. М. Омелян, Р. М. Черніга, *Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень*, Доп. НАН України, № 10, 39 – 45 (2004).
39. В. І. Фущич, М. І. Сєров, Т. К. Амеров, *Нелокальні анзаци нелінійного одновимірного рівняння теплопровідності*, ДАН України, 26 – 30 (1992).

Одержано 12.11.21