DOI: 10.37863/umzh.v74i3.6995

УДК 517.9: 519.46

В. А. Тичинін (Придніпров. держ. академія будівництва та архітектури, Дніпро)

НЕЛОКАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ З ДОДАТКОВИМИ ЗМІННИМИ. ПРИМУСОВІ СИМЕТРІЇ

The concept of nonlocal transformation with additional variables is offered, developed and applied to search additional symmetry of nonlinear partial differential equations. Possible schemes of relation of differential equations by means of prolonged nonlocal transformations of this type are considered, several examples are given. The method is used for constructing algorithms and formulas generating new solutions from known solutions that use additional symmetry. These formulas are applied to finding of exact solutions for some nonlinear equations.

Запропоновано концепцію нелокального перетворення з додатковими змінними, яку розроблено і застосовано для пошуку додаткових симетрій нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Розглянуто можливі схеми зв'язку диференціальних рівнянь за допомогою продовжених нелокальних перетворень цього типу, наведено кілька прикладів. Метод застосовано для побудови алгоритмів і формул розмноження розв'язків з відомих, які використовують додаткові симетрії. Ці формули використано для знаходження точних розв'язків деяких нелінійних рівнянь.

1. Вступ. Побудова широких класів точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, широко представлених в різноманітних застосуваннях, має особливе значення в наш час. Для розв'язку цієї проблеми розроблений широкий спектр ефективних методів. Основу значної їхньої частини складає фундаментальна ідея симетрії диференціальних рівнянь. Як наслідок, більшість із них належить або тісно пов'язана з методом теорії груп Лі [1 – 3]. На цей момент подібні методи одержали численні корисні узагальнення у тому числі в трудах видатного українського математика Вільгельма Ілліча Фущича, засновника школи симетрійного аналізу рівнянь нелінійної математичної фізики, і його учнів. Найбільш важливі з них зосереджені на дослідженні умовних (некласичних), слабких симетрій [4 – 6] і нелокальних (узагальнених) симетрій диференціальних рівнянь [7 – 16]. Опис найбільш важливих результатів у зазначеній області може бути знайдене, наприклад, в [10, 13 – 15]. Незважаючи на вражаючі результати застосування класичних методів теорії груп, слід відзначити, що інформація, отримана цими методами і їх узагальненнями у великій кількості важливих випадків, виявляється недостатньою або досить бідною. Тому розвиток інших підходів, що забезпечують пошук нових симетрій і методів розв'язання цих рівнянь залишається надзвичайно важливим і актуальним.

Два важливі джерела створення нових методів вимагають спеціального обговорення. Перша ідея дуже стара й пов'язана із залученням додаткових змінних, зокрема, коли точкові перетворення використовувалися для інтегрування диференціальних рівнянь. Як приклад, наведемо підстановку Бернуллі $y(x) = u(x)v(x)$, що дозволяє будувати загальний розв'язок $y(x)$ лінійного неоднорідного рівняння першого порядку у формі добутку часткового розв'язку $u(x)$ певного однорідного рівняння і загального розв'язку $v(x)$ допоміжного рівняння, яке допускає відокремлення змінних. У випадку знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного ЗДР вищого порядку цей підхід набуває форму методу Лагранжа варіації довільних сталих. Так, застосовуючи цей метод до лінійного неоднорідного ЗДР другого порядку, ми маємо шукати частковий розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, де $y_1(x)$, $y_2(x)$ — часткові розв'язки відповідного однорідного рівняння. У цьому випадку функції $C_1(x),\ C_2(x)$ діють як додаткові залежні змінні. Розгляд прикладів подібного роду можна продовжити [17, 18].

Ідея використання різноманітних диференціальних перетворень стала ще одним джерелом створення нових методів дослідження й інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь. Як наслідок, була розроблена теорія узагальнених симетрій ДР, або, інакше кажучи, теорія груп перетворень Лі – Беклунда [19], тобто неперервних груп перетворень, що включають похідні залежних змінних. Виникненню цієї теорії передував тривалий період досліджень так званих перетворень Беклунда, заснованих на нелокальній відповідності двох даних рівнянь. Ці перетворення знайшли широке застосування й відомі як метод перетворень Беклунда (ПБ). Певно, Біянкі, Рібокур, Дарбу були першими, хто розглянув окремі випадки застосування таких перетворень до геометричних досліджень. Пізніше цей метод був вивчений більш глибоко й узагальнений Беклундом і іншими [8]. Науково-дослідна діяльність у цьому напрямку протягом останніх десятиліть привела до виникнення істотних узагальнень цього методу, який одержав подальший розвиток і застосування в дослідженні різноманітних математичних моделей. Поновлення інтересу до цього методу в 70-ті роки минулого століття привело до активного розвитку теорії інтегровності нелінійних диференціальних рівнянь. Показавши себе потужним інструментом дослідження нелінійних ДРЧП, він широко використовується у наш час.

Згідно із класичним означенням [8, 17], ПБ допускає інтерпретацію як перетворення, у якому крім незалежних і залежних змінних беруть участь також похідні залежних змінних. „. . . але кожне з них має сенс, і добре визначене, тільки для спеціального набору диференціальних рівнянь у частинних похідних і їх зображень, зв'язаних цим перетворенням” [8]. Так, ПБ, що зв'язує поверхневі елементи $\sigma_1 = (x_1, x_2, u, u_1, u_2)$ і $\sigma_2 = (y_1, y_2, v, v_1, v_2)$ може бути визначене як система чотирьох рівнянь $\Lambda_k(\sigma_1; \sigma_2) = 0,\ k = 1\ldots, 4$, розв'язуючи які відносно $u_1,\ u_2$ і $x_1,\ x_2$, одержують явні розв'язки

$$u_i = H_i(y_1, y_2, v, v_1, v_2; u), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$x_j = h_j(y_1, y_2, v, v_1, v_2; u), \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

Нижні індекси праворуч від функцій позначають диференціювання по відповідним аргументам. У випадку двох незалежних змінних ми також будемо використовувати спеціальне позначення: $x_1 = x,\ x_2 = t$ і, як наслідок, $u_t = \partial u/\partial t = \partial_t u,\ u_x = \partial u/\partial x = \partial_x u$. Подібним чином координати $y = (y_1, \ldots, y_n)$ представляють інший простір незалежних змінних, в якому у випадку двох незалежних змінних ми користуємося позначеннями $y_1 = y,\ y_2 = s$.

Умову інтегровності для похідних першого порядку (1)

$$\partial_{x_2} H_1 = \partial_{x_1} H_2. \tag{3}$$

можна інтерпретувати як умову нульової кривини для відповідної зв'язності [8]. Якщо тотожність (3) на розв'язках рівняння для v породжує співвідношення

$$\partial_{x_2} H_1 - \partial_{x_1} H_2 \Big|_{F_1(y_1, y_2, v_{(k)})} \equiv 0,$$

де

$$F_1(y_1, y_2, v_{(k)}) = 0,$$

і обернення цієї процедури тягне рівняння для u

$$F_0(x_1, x_2, u_{(k)}) = 0,$$

говорять, що перетворення Беклунда встановлює відповідність між даними рівняннями, де кожна з функцій u і v повинна задовольняти відповідне диференціальне рівняння. Тут символ $u_{(r)}$ позначає множину похідних функції u від порядку нуль до порядку $r \leq k$.

Для наступного огляду основних подальших результатів, отриманих в даній області, слід відзначити важливу властивість ПБ. Припустимо, що диференціальне рівняння в частинних похідних від двох незалежних змінних

$$F_0(x, t, u_{(k)}) = 0 \tag{4}$$

допускає принаймні один закон збереження

$$D_t \phi^t(x, t, u_{(r)}) + D_x \phi^x(x, t, u_{(r)}) = 0. \tag{5}$$

Тут ми вважаємо $x_1 = y_1 = x,\ x_2 = y_2 = t$ і $\partial_u H_1 = \partial_u H_2 = 0$. Тому $H_1 = \phi^t(x, t, u_{(r)}),\ H_2 = -\phi^x(x, t, u_{(r)})$. Спеціальні позначення D_t і D_x використані для повних похідних по змінних t і x, а ϕ^t і ϕ^x є збереженою щільністю й течією, відповідно. Для зображення рівняння (4) у формі закону збереження мусить бути введено потенціальну функцію v [9], яка визначається допоміжною системою

$$v_x = \phi^t(x, t, u_{(r)}), \qquad v_t = -\phi^x(x, t, u_{(r)}). \tag{6}$$

Виключенням вихідної залежної змінної u із системи (6) часто вдається одержати рівняння

$$F_1(x, t, v_{(k)}) = 0 \tag{7}$$

відносно тільки *потенціальної змінної* v.

Варто нагадати, що поняття потенціальної симетрії диференціальних рівнянь було введено Блуменом і ін. [3, 9]. Дослідження системи (6) методами класичного групового аналізу, як правило, приводить до додаткової інформації про властивості симетрії вихідного рівняння (4). *Потенціальна симетрія* (4) це така точкова симетрія потенціальної системи (6), яка не має проекції на точкову симетрію рівняння (4).

Наступний принциповий крок був зроблений Уолквистом і Естабруком. Вони об'єднали схему перетворення Беклунда й теорію потенціалів за допомогою залучення нових допоміжних залежних змінних, що дозволило їм побудувати метод *псевдопотенціалів*, відомий також як *метод продовження структур* [20 – 25].

У випадку двох незалежних змінних $x_1 = x,\ x_2 = t$ вони припустили існування інших потенціалів v^{J}, що утворюють псевдопотенціал $V = \left(v^{\mathrm{I}}, v^{\mathrm{II}}, \ldots, v^{\mathrm{M}}\right)$, таким чином, що система

$$v_x^{\mathrm{J}} = \phi_t^{\mathrm{J}}(x, t, u_{(r)}, V), \qquad v_t^{\mathrm{J}} = -\phi_x^{\mathrm{J}}(x, t, u_{(r)}, V), \qquad \mathrm{J} = (\mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{M}), \tag{8}$$

заміняє (6) [25]. Тому допоміжні змінні $\left(v^{\mathrm{II}}, v^{\mathrm{III}}, \ldots, v^{\mathrm{M}}\right)$ можна розуміти як додаткові залежні змінні, уведені в структуру ПБ, що діють у просторі двох незалежних змінних (x, t).

Велика різноманітність методів на основі потенціального зображення ДР була розвинена останнім часом. Серед них ми відзначимо деякі результати, в яких використовують впровадження наступних потенціальних змінних шляхом застосування певного методу ітерації потенціалу, тобто коли попередній потенціал відомий. Такі результати були отримані Ахатовим, Газізовим і Ібрагімовим [26] і використовувалися пізніше в статті Кінга [27], де було побудовано дерево нелокально зв'язаних ДРЧП та отримано їхні точні розв'язки. Подібна процедура мультипотенціалізації дозволила Ейлеру побудувати ітераційні формули точних розв'язків для рівняння Кричевера – Новікова й інших рівнянь в [28]. Метод побудови дерева нелокально зв'язаних систем ДРЧП виходячи з даної системи ДРЧП були узагальнені в серії публікацій Блумена, Чевякова й Іванової [29 – 32].

У роботі [33] Попович і Іванова запровадили поняття еквівалентності законів збереження відносно груп симетрії Лі для фіксованих систем диференціальних рівнянь, а також для класів таких систем відносно груп еквівалентності або наборів допустимих перетворень. У припущенні залежності векторів, що зберігаються, від декількох потенціалів, ними узагальнений метод ітерації, запропонований Блуменом і Доран-Ву [29], для знаходження нелокальних (потенціальних) законів збереження.

Зазначимо, що геометрична теорія нелокальних симетрій ДР була розроблена Виноградовим і Красільщиком [34] з використанням формалізму пучків розшарувань джетів для функцій, що є розв'язками даного рівняння.

З іншого боку, на цей момент отриманий ряд цікавих результатів для нелінійних рівнянь, зв'язаних між собою *нелокальним перетворенням змінних*. Скінченні нелокальні перетворення ефективно використовуються для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь протягом тривалого часу, (див., наприклад, роботи [12 – 14, 28, 35, 36], присвячені різним застосуванням цих перетворень). Метод нелокальних перетворень є ефективним для знаходження нелокальних симетрій ДРЧП [11, 37 – 41]. На основі цього методу побудовано формули розмноження й формули нелокальної нелінійної суперпозиції розв'язків низки важливих для застосувань нелінійних ДРЧП. Одне з безпосередніх і очевидних узагальнень методу нелокальних перетворень припускає наступний зв'язок рівняння F_1 новим нелокальним перетворенням $\mathcal{T}_1$ з новим рівнянням F_2, потім F_2 за допомогою $\mathcal{T}_2$ з F_3, і так далі. . . , і використання властивостей цих допоміжних рівнянь для одержання інформації про нелокальні симетрії й розв'язки вихідного рівняння [12 – 14]. На початку наступного розділу ми опишемо основні положення цього методу.

Метою даної роботи є подальше узагальнення й розвиток методу нелокальних перетворень змінних, що дозволяє суттєво розширити можливості відшукання нових нелокальних симетрій та інтегрування нелінійних диференціальних рівнянь. У даній роботі ми використовуємо класичний метод теорії груп Лі [1 – 3] і метод нелокальних перетворень змінних [11 – 13, 41].

Стаття організована в такий спосіб. У наступному пункті ми коротко наводимо деякі положення методу нелокальних перетворень. У п. 3 сформульоване поняття нелокальних перетворень із додатковими змінними. За допомогою цього поняття отримані основні формули їх продовження й розглянуто різні способи зв'язку диференціальних рівнянь за допомогою таких перетворень. У п. 4 наведено приклади нелокальних перетворень з додатковими змінними. На основі сформульованого вище поняття побудовано нові алгоритми й одержано формули розмноження розв'язків нелінійних рівнянь (п. 5).

2. Основні положення метода нелокальних перетворень. Систематичне використання методу нелокальних перетворень для дослідження широких сімейств важливих для застосувань нелінійних диференціальних рівнянь [11, 12, 39, 41], показало можливість ефективної реалізації процедур їх інтегрування в межах цього методу, дозволило знаходити й розмножувати їхні точні розв'язки, будувати нелокальні симетрії. Тут ми нагадаємо термінологію й основні поняття методу нелокальних перетворень.

Припустимо, що таке перетворення може бути записано у формі

$$\mathcal{T}: \qquad \begin{array}{ll} x^i = h^i(y, v_{(k)}), & u^K = H^K(y, v_{(k)}), \\ i = 1, \ldots, n, & K = 1, \ldots, m, \end{array} \tag{9}$$

і відображає дане *вихідне* рівняння

$$F_0(x, u_{(n)}) = 0 \tag{10}$$

у рівняння $\Phi(y, v_{(q)}) = 0$ порядку $q = n + k$, яке допускає факторизацію до іншого, *цільового*, рівняння

$$F_1(y, v_{(s)}) = 0 \tag{11}$$

за допомогою операторної рівності

$$\Phi(y, v_{(q)}) = \lambda F_1(y, v_{(s)}). \tag{12}$$

Отже, зв'язок між цими рівняннями поряд з отриманими вище виразами допускає зображення

$$\mathcal{T} F_0(x, u_{(n)}) \big|_{DF_1} \equiv 0. \tag{13}$$

Тут λ є диференціальним оператором порядку $n+k-s$, і ми говоримо, що рівняння $F_0(x, u_{(n)}) = 0$ і $F_1(y, v_{(s)}) = 0$ зв'язані нелокальним перетворенням $\mathcal{T}$. Цей зв'язок дозволяє будувати алгоритми знаходження розв'язків (10), по відомих розв'язках (11). Якщо цільове рівняння (11), збігається з вихідним рівнянням (10), тоді $\mathcal{T}$ стає нелокальним перетворенням інваріантності рівняння (10) і ми можемо безпосередньо використовувати його для побудови формул розмноження розв'язків. Якщо (11) лінійне, тоді можна побудувати формули нелінійної нелокальної суперпозиції розв'язків рівняння (10). Такі формули забезпечують можливість побудови нового розв'язку рівняння (10) із двох відомих його розв'язків і допускають інтерпретацію як автоперетворення Беклунда (АБП) з додатковою змінною. Крім того, використовуючи нелокальне перетворення, можна зв'язати дане вихідне рівняння з цільовим рівнянням, яке допускає додаткові симетрії Лі. Це може бути використане для пошуку нелокальних симетрій вихідного рівняння й побудови його нових розв'язків. Методи перетворень Беклунда й нелокальних перетворень принципово відрізняються навіть при встановленні відповідності між тими ж самими рівняннями. Але обговорення основних відмінностей між цими двома підходами виходить за межі даної роботи.

3. Нелокальні перетворення з додатковими змінними. Нижче запропоновано конструкцію нелокального перетворення, яка містить додаткові змінні. Спочатку введемо необхідні позначення. Дану систему ДРЧП запишемо, використовуючи нижні індекси для позначення частинних похідних

$$\begin{gathered} {F_0}^A(x, u_{(k)}) = 0, \quad x = \{x^i\}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ A = 1 \ldots M, \quad u = \{u^K(x)\}, \quad K = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{14}$$

Для спрощення запису будемо використовувати також позначення

$$\big\{{F_0}^A(x, u_{(k)})\big\} = F_0(x, u_{(k)}).$$

Припустимо, що нелокальне перетворення задане в такий спосіб:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\star: \qquad x^i = h^i\big(y, v_{(k)}; z^{(G)}, {w_{(q)}}^{(G)}\big), \qquad & u^K = H^K\big(y, v_{(k)}; z^{(G)}, {w_{(q)}}^{(G)}\big), \\ z^{(G),j} = \varphi^j(y, v_{(k)}), \qquad & G = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{15}$$

Тут, на відміну від нелокального перетворення $\mathcal{T}$ (9), функції в правих частинах рівнянь залежать від нових залежних змінних ${w_{(q)}}^{(G)}(z^{(G)})$, що залежать від власних (нових) незалежних змінних $z^{(G)}$, зовнішніх стосовно (y, v). Крім того, в (15) присутні вирази, які визначають ці нові незалежні змінні.

Диференціальне продовження скінченого нелокального перетворення $\mathcal{T}^\star$ дозволяє одержати відповідні вирази для перших похідних, і потім, застосовуючи процедуру продовження неодноразово, можна знаходити відповідні вирази для похідних другого і наступних порядків. Так, для знаходження перших похідних ми розглядаємо n рівнянь, отриманих із (34) диференціюванням по x^j

$$D_i H^K\big(y, v_{(k)}; z^{(G)}, {w_{(q)}}^{(G)}\big) = u_j D_i h^j\big(y, v_{(k)}; z^{(G)}, {w_{(q)}}^{(G)}\big). \tag{16}$$

Позначивши $\widetilde{D}_i$ та $\widetilde{D}_G$ повні похідні за змінними y і z, відповідно,

$$\widetilde{D}_i = \partial_i + \partial_i v_{(p)} \partial_{v_{(p)}} + \ldots, \qquad \widetilde{D}_Q = \partial_{z^{(Q)}} + \partial_{z^{(Q)}} {w_{(q)}}^{(T)} \partial_{{w_{(q)}}^{(T)}} + \ldots$$

і скориставшись угодою про підсумовування по індексах, що повторюються, ліву частину рівняння (16) можна записати у формі

$$D_i H^K = \widetilde{D}_i H^K + D_i z^{(G)} \widetilde{D}_Q H^K.$$

Розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (16) відносно u_j, ми одержуємо формули перетворення для всіх перших похідних

$$u_j = {H_j}^K\big(y, v_{(k+1)}; z^{(G)}, {w_{(q+1)}}^{(G)}\big),$$

тобто, одержуємо перше продовження (15). В результаті рекурсивного застосування цієї процедури послідовним продовженням додаємо нові похідні до попередніх, тобто, генеруємо після r кроків $r + 1$ — похідні

$$u_{(r)\,j} = {H^K}_{(r)\ j}\big(y, v_{(k+r+1)};\ z^{(G)},\ {w_{(q+r+1)}}^{(G)}\big).$$

Очевидно, що нелокальне перетворення $\mathcal{T}^\star$ (15), будучи застосованим до даного рівняння (14), відображає його в рівняння більш високого порядку

$$\Omega\big(y, v_{(n+k)}; z^{(G)}, {w_{(q+k)}}^{(G)}\big) = 0,$$

яке може допускати факторизацію до набору рівнянь різних типів:

$$F_1(y, v_{(s)}) = 0, \tag{17}$$

$$F_J\big(z^{(J)}, {w_{(q+k)}}^{(J)}\big) = 0, \quad J = 2, \ldots, m. \tag{18}$$

Тут, згідно з нашим позначенням, (18) слід розуміти як систему рівнянь

$$F^B{}_J\big(z^{(J)}, {w_{(q+k)}}^{(J)}\big) = 0,$$

або, в більш загальному випадку, як набір рівнянь виду

$$\Phi_C\big(y, v_{(n+k)}; z^{(G)}, {w_{(q+k)}}^{(G)}\big) = 0, \quad C = m, \ldots, c. \tag{19}$$

Тут ми припускаємо, що всі ${w_{(q+k)}}^{(G)}$ залежать від повного набору незалежних змінних $y,\ z^{(G)}$. Інакше кажучи, що факторизація допускає зображення операторним виразом

$$\Omega\big(y, v_{(n+k)}; z^{(G)}, {w_{(q+k)}}^{(G)}\big) = \lambda^1 F_1(y, v_{(s)}) + \\ + \lambda^J F_J\big(z^{(J)}, {w_{(q+k)}}^{(J)}\big) + \lambda^C \Phi_C\big(y, v_{(n+k)}; z^{(G)}, {w_{(q+k)}}^{(G)}\big). \tag{20}$$

В наведених вище виразах ми користуємося угодою про підсумовування по індексах, що повторюються, а

$$\lambda^Q\big(y, v_{(n+k)}; z^{(G)}, {w_{(q+k)}}^{(G)}\big)$$

— диференціальні оператори відповідного порядку.

У цьому випадку ми говоримо, що рівняння $F_0(x, u_{(n)}) = 0$ та $F_1(y, v_{(s)}) = 0$ *примушені* бути зв'язаними нелокальним перетворенням $\mathcal{T}^\bigstar$, яке залежить від додаткових змінних, і, як наслідок, виконується тотожність

$$\mathcal{T}^\bigstar F_0(x, u_{(n)})\,\Big|_{DF_1,\, DF_J,\, D\Phi_C,\, D\mathcal{T}^\bigstar} \equiv 0.$$

Як і раніше, $D(F)$ позначає набір рівнянь, що складається з даного рівняння F і його необхідних диференціальних продовжень. Вертикальна риса в тотожності означає перехід у результаті застосування нелокального перетворення до (14) на многовид, обумовленим рівняннями (17), (18) та (19) і їх необхідними диференціальними продовженнями. Спрощення отриманого вище (переходом на многовид) результату зникає тотожно. Без другого й третього доданків правої частини (20) нелокальний зв'язок між рівняннями F_0 і F_1 ми вважаємо неможливим. Отже, ці доданки *примушують* ці рівняння бути зв'язаними, тому цей випадок ми можемо назвати „примусовим нелокальним зв'язком”.

Обравши $\lambda^J = \lambda^C = 0$ в (20), ми одержуємо „звичайне” нелокальне перетворення $\mathcal{T}$, описане у п. 2. У тому випадку, коли $\lambda^C = 0$, дане рівняння (14) допускає відображення в рівняння (17) за допомогою розширення нелокального перетворення набором нових залежних змінних ${w_{(q)}}^{(G)}(z^{(G)})$, кожна з яких залежить від відповідного набору власних додаткових незалежних змінних $z^{(G)}$. Кожна залежна змінна визначається власним ДРЧП вигляду (18). Припустимо, що $\lambda^J = 0$. Тоді рівняння (14) може бути зв'язане з рівнянням (17) нелокальним перетворенням, з новими залежними змінними ${w_{(q)}}^{(G)}(z^{(G)})$, які залежать від повного набору всіх незалежних змінних $y,\ z^{(G)}$. Якщо можливо знайти розв'язок системи (17), (19), тоді відповідний розв'язок даного рівняння (14) може бути знайдений. Зокрема, система (19) може виявитися лінійною, де змінні множники є деякими функціями від y і $v_{(q)}$.

Помітимо, що поняття *приєднаного розв'язку*, яке ми запровадили у роботі [42], застосовне до узагальнених нелокальних перетворень (15), (20). Нехай, наприклад,

$$F_1(y, v_{(s)}) = W_1(y), \qquad F_J\big(z^{(J)}, {w_{(q+k)}}^{(J)}\big) = W_J\big(z^{(J)}\big), \\ \Phi_C\big(y, v_{(n+k)}; z^{(G)}, {w_{(q+k)}}^{(G)}\big) = W_C\big(y, z^{(G)}\big), \tag{21}$$

де $W_1(y)$, $W_J\big(z^{(J)}\big)$ та $W_C\big(y, z^{(G)}\big)$ довільні збурювання (нев'язки) відповідних рівнянь. Тоді умова $\Omega\big(y, v_{(n+k)}; z^{(G)}, {w_{(q+k)}}^{(G)}\big) = 0$ тягне рівняння

$$\lambda^1 W_1(y) + \lambda^J W_J\big(z^{(J)}\big) + \lambda^C W_C\big(y, z^{(G)}\big) = 0. \tag{22}$$

Якщо це рівняння може бути розв'язане відносно W_1, W_J, W_C, тоді з'являється можливість побудувати розв'язки, приєднані до розв'язків рівняння (14).

Зауваження. Розглянемо, як порушення законів збереження (поява струмів, що не зберігаються, або ненульова кривина певної зв'язності, пов'язаної з цільовими рівняннями), приводить до появи розв'язків, приєднаних до розв'язку вихідного рівняння. Нас, переважно, цікавить роль, яку відіграють закони збереження в рамках методу нелокальних перетворень, у тому числі й з додатковими змінними.

Нехай дані рівняння (10) і (11), зв'язані нелокальним перетворенням $\mathcal{T}$, і кожне з них допускає відповідний струм, що зберігається. Тоді рівняння (12) тягне відповідний операторний вираз для збережених струмів

$$\mathrm{div} J_{(u)}(x, u_{(n)}) = \lambda(y, v_{(s)})\, \mathrm{div} J_{(v)}(y, v_{(s)}). \tag{23}$$

У двовимірному випадку це означає

$$\begin{gathered} D_t f^t(x,t,u_{(r)}) + D_x f^x(x,t,u_{(r)}) = \\ = \lambda(y,\tilde{t},v_{(s)}) \Big(D_{\tilde{t}} g^{\tilde{t}}(y,\tilde{t},v_{(k)}) + D_y g^y(y,\tilde{t},v_{(k)}) \Big), \end{gathered}$$

де f^t, f^x і $g^{\tilde{t}}$, g^y є збереженою щільністю й потоком для кожного рівняння відповідно. Це породжує нелокальний зв'язок між потенційними функціями, які можуть бути отримані для кожного закону збереження, так само як це було зроблено для системи (6). Розв'язок, приєднаний до розв'язків рівняння (10), випливає з нерівності

$$\mathrm{div} J_{(v)}(y, v_{(s)}) \neq 0$$

зі спеціальним вибором правої частини в цільовому рівнянні. Отже, принцип найменшої дії для рівняння (11) допускає відповідне відхилення, обумовлене введенням у модель зовнішнього заряду, що перетворює рівняння (11) в неоднорідне. Інакше кажучи, розв'язок, приєднаний до розв'язків рівняння F_0, може бути породжений розв'язком збуреного рівняння F_1, яке можемо вважати зануреним в спеціальне зовнішнє поле, створене відповідною щільністю заряду.

4. Приклади нелокальних перетворень з додатковими змінними. Нижче розглянемо приклади нелокального (в т. ч. примусового) зв'язку нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних за допомогою нелокального перетворення з додатковими змінними.

***Приклад* 4.1.** Розглянемо нелінійне телеграфне рівняння [43]

$$u_{tt} - \partial_x(-u^{-1} + u^{-2}u_x) = 0, \tag{24}$$

яке допускає зображення у вигляді потенціальної системи

$$\begin{aligned} &v_x - u_t = 0, \\ &v_t - u^{-2}u_x + u^{-1} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Водночас інша потенціальна система

$$\begin{aligned} &v_x - u_t = 0, \\ &v_t - u^{-2}u_x + u^{-1} - 1 = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

відповідає тому ж рівнянню. У роботі [44] було знайдене точкове перетворення змінних

$$x = r + \ln p(r,s), \qquad t = s + q(r,s), \qquad u(x,t) = p(r,s), \qquad v(x,t) = q(r,s), \tag{27}$$

яке перетворює останню потенціальну систему у систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &q_r - p_s = 0, \\ &q_s - p_r - p + 1 = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

де $r,\ s$ і $p(r,s),\ q(r,s)$ — нові незалежні і залежні змінні, відповідно. Далі ми використовуємо деякі результати, отримані в [45].

Оберненим для (27) є перетворення

$$r = x - \ln u(x,t), \qquad s = t - v(x,t), \qquad p(r,s) = u(x,t), \qquad q(r,s) = v(x,t). \tag{29}$$

Система (28) допускає нескінченну алгебру інваріантності

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_r + a(r,s)\partial_p + (b(r,s)+s)\partial_q, \qquad X_2 = \partial_s + a(r,s)\partial_p + (b(r,s)+s)\partial_q, \\ X_3 = a(r,s)\partial_p + (b(r,s)+s+1)\partial_q, \qquad X_4 = (p + a(r,s))\partial_p + (b(r,s)+2s+q)\partial_q, \\ X_5 = s\partial_r + r\partial_s + \left(-\frac{1}{2}q - \frac{1}{2}ps + a(r,s)\right)\partial_p + \left(b(r,s) + s - \frac{1}{2}(p + r + sq + \frac{1}{2}s^2)\right)\partial_q, \end{gathered} \tag{30}$$

де $(a(r,s), b(r,s))$ — довільний розв'язок системи (28). Зазначимо, що лише оператор X_5 цієї алгебри визначає потенціальну симетрію рівняння

$$p_{ss} - p_{rr} - p_r = 0. \tag{31}$$

У просторі незалежних змінних r і s та залежних змінних $p(r,s),\ q(r,s)$ скористаємось рівністю $q_r = p_s$ і замінимо в формулах перетворення (29) змінну $q(r,s)$ на інтеграл $\int p_s(r,s)\,dr$. Тепер перетворення зв'язує змінні $x,\ t,\ u(x,t)$ зі змінними $r,\ s,\ p(r,s),\ \int p_s(r,s)dr$ в такий спосіб:

$$x = r + \ln p, \qquad t = s + \int p_s(r,s)dr, \qquad u(x,t) = p, \tag{32}$$

перетворившись на інтегро-диференціальне.

Побудуємо формулу розмноження розв'язків рівняння (24), виходячи з довільного оператора, що визначає його потенціальну симетрію. Для оператора X_1 алгебри (30) легко будується перетворення відповідної групи Лі

$$\begin{gathered} r = R + \varepsilon, \quad s = S, \quad p(r,s) = a(R+\varepsilon, S)\varepsilon + P(R,S), \\ q(r,s) = b(R+\varepsilon, S)\varepsilon + S\varepsilon + Q(R,S). \end{gathered} \tag{33}$$

Для обох комплектів змінних $(x,t,u,v),\ (X,T,U,V)$ виконаємо перетворення (29), отримуємо

$$\begin{gathered} x = \ln|a(X - \ln|U| + \varepsilon, T - V)\varepsilon + U| + X - \ln|U| + \varepsilon, \\ t = b(X - \ln|U| + \varepsilon, T - V)\varepsilon + \varepsilon(T - V) + T, \\ u(x,t) = a(X - \ln|U| + \varepsilon, T - V)\varepsilon + U, \\ v(x,t) = b(X - \ln|U| + \varepsilon, T - V)\varepsilon + \varepsilon(T - V) + V. \end{gathered} \tag{34}$$

Легко перевіряється, що це перетворення відображає систему (25) в себе. Виключивши із цього перетворення змінну $v(x,t)$ і замінивши $V(X,T)$ на інтеграл $\int U_T\,dX$, приходимо до інтегро-диференціального перетворення

$$x = \ln|a(X - \ln|U| + \varepsilon, T - \int U_T\,dX)\varepsilon + U| + X - \ln|U| + \varepsilon,$$
$$t = b(X - \ln|U| + \varepsilon, T - \int U_T\,dX)\varepsilon + \varepsilon(T - \int U_T\,dX) + T, \tag{35}$$
$$u(x,t) = a(X - \ln|U| + \varepsilon, T - \int U_T\,dX)\varepsilon + U.$$

Тут функції $a(\alpha,\beta)$, $b(\alpha,\beta)$ відіграють роль додаткових залежних змінних, на які накладаються умови (28)

$$b_\alpha - a_\beta = 0,$$
$$b_\beta - a_\alpha - a + 1 = 0. \tag{36}$$

Тут $\alpha = X - \ln|U| + \varepsilon,\ \beta = T - \int U_T\,dX$. Отримане перетворення переводить досліджуване рівняння в інтегро-диференціальний вираз, що обертається в нуль на многовиді, заданому рівнянням і його інтегро-диференціальними наслідками.

Наведемо приклад застосування побудованого нелокального перетворення з додатковими змінними. Виконаємо перетворення (29) часткового розв'язку лінійної системи

$$a(X - \ln|U| + \varepsilon, T - \int U_T\,dX) = c_1 e^{\frac{2(\ln|U| - X + T - \int U_T\,dX)}{3}} e^{X - \ln|U|},$$
$$b(X - \ln|U| + \varepsilon, T - \int U_T\,dX) = \tag{37}$$
$$= -1 - T + \int U_T\,dX + 2c_1 e^{\frac{2(\ln|U| - X + T - \int U_T\,dX)}{3}} e^{X - \ln|U|}$$

і підставимо його в (35). У результаті приходимо до перетворення

$$x = \ln|c_1 e^{\frac{2(\ln|U| - X + T - \int U_T\,dX)}{3}} e^{X - \ln|U|}|\varepsilon + U + X - \ln|U| + \varepsilon,$$
$$t = \left(-1 - T + \int U_T\,dX + 2c_1 e^{\frac{2(\ln|U| - X + T - \int U_T\,dX)}{3}} e^{X - \ln|U|}\right)\varepsilon +$$
$$+\varepsilon(T - \int U_T\,dX) + T, \tag{38}$$
$$u(x,t) = \left(c_1 e^{\frac{2(\ln|U| - X + T - \int U_T\,dX)}{3}} e^{X - \ln|U|}\right)\varepsilon + U.$$

Піддавши перетворенню (38) вихідний розв'язок рівняння (24)

$$u^{\mathrm{I}}(x,t) = t,$$

розв'яжемо результат відносно інтегрального члена. Диференціюванням обох частин отриманої рівності по x одержимо диференціальне рівняння, розв'язуючи яке, знаходимо нелокальний анзац для (24). Поклавши у цьому анзаці довільну функцію рівною нулю, приходимо до розв'язку

$$u(x,t) = \frac{1}{18}\frac{\left(\left(9(t+\varepsilon)+\sqrt{3}\sqrt{1+27e^{x}(t+\varepsilon)^2}e^{-x/2}\right)^{2/3}e^{4x/3}-3^{1/3}e^{x}\right)^{3}e^{-4x}}{9(t+\varepsilon)+\sqrt{3}\sqrt{1+27e^{x}(t+\varepsilon)^2}e^{-x/2}}.$$

***Приклад* 4.2.** У кількох останніх публікаціях ми неодноразово звертали увагу на те, що побудовані в них формули розмноження розв'язків можна сприймати як певні нелокальні перетворення із додатковими змінними. Так, в роботі [46] було виведено таку формулу для рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ). При певних обмеженнях з її використанням був знайдений алгоритм і побудовано ланцюжки точних розв'язків. Рівняння КдФ широко відомо як рівняння, що описує значну кількість нелінійних природних явищ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{39}$$

Припустимо, що існує другий екземпляр цього рівняння

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0. \tag{40}$$

У цитованій вище роботі „новий" розв'язок рівняння (39) запропоновано шукати у формі

$$u(x,t) = -v(x,t) - 2\,z(x,t)^2. \tag{41}$$

Підставимо таку форму розв'язку в (39) і перейдемо в отриманому виразі на многовид розв'язків рівняння (40). У виразі, що залишився, скористаємось відомим нелокальним перетворенням

$$v(x,t) = z_x(x,t) - z(x,t)^2, \tag{42}$$

що зв'язує рівняння (40) з модифікованим рівнянням, і знайдемо це рівняння

$$z_t - 6z^2 z_x + z_{xxx} = 0. \tag{43}$$

Отже, перетворення (41) сумісно з (42) є нелокальним перетворенням із додатковою змінною $z(x,t)$, підпорядкованою рівнянню (43). Легко також перевірити, що результат підстановки (42) у рівняння (40) після переходу на многовид розв'язків рівняння (43) дорівнює нулеві. Водночас підставивши (42) в (41), знаходимо підстановку

$$u(x,t) = -z_x(x,t) - z(x,t)^2, \tag{44}$$

яка зв'язує рівняння (39) з (43).

Зауважимо, що, обговорюючи нелокальну інваріантність рівняння КдФ, автори фактично кажуть про АПБ модифікованого рівняння КдФ, яке в даному випадку є проміжним рівнянням (для оригінального рівняння КдФ). Правильне безпосереднє АПБ для (39), наскільки нам відомо, не розглядалося.

Покажемо, що існує нелокальне перетворення

$$u_x = -(u-v)\sqrt{-2(u+v)} - v_x, \tag{45}$$

яке зв'язує (39) з іншою його копією (40) за один крок.

У першу чергу відзначимо, що модифіковане рівняння Кортевега – де Фріза (МКдФ)

$$w_t^{\mathrm{K}} + 3{w^{\mathrm{K}}}_x{}^2 + w_{xxx}^{\mathrm{K}} = 0, \quad \mathrm{K} = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \tag{46}$$

допускає відоме АПБ [25]

$$\partial_x \left(\frac{w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{II}}}{2} \right) = -\left(\frac{w^{\mathrm{I}} - w^{\mathrm{II}}}{2} \right)^2, \tag{47}$$

$$\partial_t \left(\frac{w^{\mathrm{I}} - w^{\mathrm{II}}}{2} \right) = -6 \left(\frac{w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{II}}}{2} \right) \partial_x \left(\frac{w^{\mathrm{I}} - w^{\mathrm{II}}}{2} \right) - \partial_{xxx} \left(\frac{w^{\mathrm{I}} - w^{\mathrm{II}}}{2} \right) \partial!. \tag{48}$$

Тут похідні

$$\partial_x w^{\mathrm{I}} = u, \qquad \partial_x w^{\mathrm{II}} = v \tag{49}$$

забезпечують зв'язок (46) з (39) та (40), відповідно.

Інша форма рівняння (47) може бути виведена, якщо переписати його в термінах змінних u і v

$$u + v = -\frac{1}{2}\left(\int (u - v) dx \right)^2. \tag{50}$$

Розв'язуючи це рівняння відносно інтегрального члена, і диференціюючи результат по x, приходимо до (45).

Повернемось до доведення зробленого вище твердження. Розв'яжемо (39) відносно u і потім продиференціюємо результат по x. Отримуємо

$$u_x + \frac{1}{6} \frac{u_{xt} + u_{xxxx}}{u_x} - \frac{1}{6} u_{xx} \frac{u_t + u_{xxx}}{{u_x}^2} = 0. \tag{51}$$

Підставивши $u_t = -6uu_x - u_{xxx}$ у третій доданок (51), знаходимо

$$u_x + \frac{1}{6} \frac{u_{xt} + u_{xxxx}}{u_x} + \frac{uu_{xx}}{u_x} = 0. \tag{52}$$

Тепер ми можемо застосувати нелокальне перетворення (45), до (52). Використовуючи в отриманому результаті рівняння (40) і його диференціальні наслідки, а потім рівність (45) з її диференціальними продовженнями, приходимо до виразу, який після спрощення зникає тотожно.

Друге співвідношення для АПБ рівняння Кдф одержуємо, записавши рівняння (48) у змінних u і v у відповідності до (49). У результаті одержуємо рівняння, що зв'язують розв'язки рівняння Кдф

$$u_x + v_x = \pm(u - v)\sqrt{-2(u + v)}, \tag{53}$$

$$u_t - v_t = 4(2v - u)v_x \pm 2(v^2 - uv + v_{xx})\sqrt{-2(u + v)} + 2v_{xxx}. \tag{54}$$

Теорема 1. *Існує два авто-Беклунд перетворення для рівняння Кортевега–де Фріза, побудованих на основі нелокального перетворення типу* (45). *Кожне з них складається із двох рівнянь*

$$u_x = \pm(u-v)\sqrt{-2(u+v)} - v_x, \tag{55}$$

$$u_t = \mp\left(2\sqrt{-2(u+v)}\right)\left(uv - v^2 - v_{xx}\right) + 2(2u-v)v_x - v_{xxx}, \tag{56}$$

які зв'язують рівняння (39) *з диференціальним продовженням рівняння* (40) *за допомогою диференціального оператора*

$$\left(\sqrt{-2(u+v)}\partial_x \mp (3v+u)\right)(v_t + 6vv_x + v_{xxx})\,. \tag{57}$$

***Приклад* 4.3.** Припустимо, що рівняння Бюргерса

$$eu\colon u_t + u\,u_x - u_{xx} = 0 \tag{58}$$

допускає зведення деяким нелокальним перетворенням з однією додатковою залежною змінною до лінійного рівняння теплопровідності

$$ev\colon v_t - v_{xx} = 0 \tag{59}$$

у присутності допоміжного лінійного рівняння, яке залежить від додаткової функції $z(x,t)$

$$ez\colon z_t - {v_x}^2 - z_{xx} = 0. \tag{60}$$

Будемо шукати це нелокальне перетворення у формі

$$u(x,t) = H(v(x,t), v_x(x,t), z(x,t), z_x(x,t)). \tag{61}$$

Підставляючи (61) у рівняння (58), одержуємо вираз, який залежить від похідних третього порядку. Переходячи тут на многовид, визначений рівняннями (59), (60) і їх диференціальними продовженнями по x та спрощуючи результат, одержуємо певний диференціальний вираз. Цей вираз визначає функцію $H(v,p,z,q),\ p = v_x,\ q = z_x$ і, розщеплюючи його по похідних

$$v_{xx}(x,t), \quad v_{xxx}(x,t), \quad z_{xx}(x,t), \quad z_{xxx}(x,t),$$

знаходимо наступну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{gathered} p\,HH_v + (qH + p^2)H_z - 2\,p\,qH_{vz} - q^2H_{zz} - p^2H_{vv} = 0, \\ -2\,q\,H_{zp} + HH_p + 2\,p\,H_q - 2\,p\,H_{vp} = 0, \\ -2\,p\,H_{vq} + HH_q - 2\,q\,H_{zq} = 0, \qquad H_{pp} = H_{qq} = H_{pq} = 0. \end{gathered} \tag{62}$$

Розв'язки системи (62), можуть бути легко знайдено. Перший розв'язок отримуємо для випадку, коли $H_z = 0$. Він є відомим перетворенням Хопфа–Коула

$$u = -\frac{2\,v_x}{v - 2\,c}. \tag{63}$$

Інший розв'язок виявляється таким:

$$u = -\frac{(-4\,v + 8\,c_1)v_x - 4\,z_x}{2\,z + v^2 - 4\,c_1 v - 4\,c_2}. \tag{64}$$

Безпосереднє підставлення знайденого вище u у рівняння (58) тягне диференціальний вираз, який тотожно обертається в нуль на многовидах розв'язків рівнянь (60), (59). Тобто, відбувається його факторизація

$$\begin{gathered}
\mathcal{T}_{(64)} eu = (K_1 \partial x + K_3) ez + (K_2 \partial x + K_4) ev, \\
K_1 = 2z + v^2 - 4c_1 v - 4c_2, \\
K_2 = v^3 - 6c_1 v^2 + 2vz + (8{c_1}^2 - 4c_2)v - c_1 z + 8c_1 c_2, \\
K_3 = (4c_1 - 2v)v_x - 2z_x, \\
K_4 = (-v^2 + 4c_1 v - 2z - 8{c_1}^2 - 4c_2)v_x + (-2v + 4c_1)z_x.
\end{gathered} \tag{65}$$

Існування цього нелокального зв'язку може використовуватися для побудови нових формул розмноження розв'язків рівняння (58).

У наступному розділі ми розглядаємо механізм розмноження розв'язків вихідного рівняння з відомих його розв'язків з використанням нелокальних перетворень з додатковими змінними.

5. Примусові симетрії та розмноження розв'язків. Застосування нелокальних перетворень із додатковими змінними викликає необхідність розробки нових алгоритмів побудови розв'язків диференціального рівняння з відомих його розв'язків (формул розмноження). У цьому розділі ми продемонструємо ефективність відповідних алгоритмів.

Покажемо спочатку, як одержати (точні) розв'язки рівняння (58) безпосередньо з формули (64), залучивши довільний розв'язок $v(x,t) = \phi(x,t)$ лінійного рівняння теплопровідності. Обравши такий розв'язок, ми підставляємо його похідні в рівняння (60). Розв'язавши це рівняння щодо $z(x,t)$ і підставивши отриманий результат в (64), ми знаходимо шуканий розв'язок. Очевидно, що основна складність пов'язана з інтегруванням рівняння

$$z_t - \phi_x(x,t)^2 - z_{xx} = 0. \tag{66}$$

Наведемо декілька побудованих таким чином розв'язків рівняння (58).

1. $$v = x^2 + 2t, \quad \to \quad z = c_4 G_1 e^{k\,t} - \frac{c_1 + c_2 x^4 + c_3 x}{3c_2} \quad \to$$

$$\to \quad u = -\frac{4\left(2c_2 x^3 + 12c_2 x(t - k_1) + 3\sqrt{k} c_2 c_4 e^{k\,t} G_2\right)}{6c_2 c_4 e^{k\,t} G_1 + c_2 x^4 + 12c_2(x^2 + t)(t - k_1) - 2c_3 x - 12k_1 c_2 t - 12k_2 c_2 - 2c_1}.$$

Тут нами позначено $G_1 = c_5 e^{\sqrt{k}x} + c_6 e^{-\sqrt{k}x}$ і $G_2 = c_5 e^{\sqrt{k}\,x} - c_6 e^{-\sqrt{k}x}$. Всі c_i, k, k_j є довільними сталими.

2. $$v = k \sin(\omega)\, e^{a\,t}, \quad \to$$

$$\to \quad z = c_4 c_6 e^{c_1 t - \sqrt{c}_1 x} + c_4 c_5 e^{c_1 t + \sqrt{c}_1 x} - \frac{k^2}{2} e^{2at} +$$

$$+\frac{1}{2c_3}\left(c_1k^2e^{2at}\cos(\sqrt{2}\,\omega)+c_2k^2e^{2at}\sin(\sqrt{2}\,\omega)+c_3k^2e^{2at}\cos^2(\omega)\right).$$

Нами використані позначення $\omega=\sqrt{-a}\,x+b, \quad \to \quad u=\dfrac{A}{B},$

$$A=4c_3\left(2kk_1e^{at}\sqrt{-a}\cos(\omega)+c_4c_6\sqrt{c}_1e^{c_1t-\sqrt{c_1}\,x}-c_4c_5\sqrt{c_1}\,e^{c_1t+\sqrt{c_1}\,x}\right)+$$

$$+4k^2\,e^{2at}\sqrt{-a}\left(c_1\sin(\sqrt{2}\,\omega)-c_2\cos(\sqrt{2}\,\omega)\right),$$

$$B=2c_3c_4c_6e^{c_1t-\sqrt{c}_1x}+2c_3c_4c_5e^{c_1t+\sqrt{c}_1x}-4kk_1c_3e^{at}\sin(\omega)+$$

$$+k^2e^{2at}\left(c_2\sin(\sqrt{2}\,\omega)+c_1\cos(\sqrt{2}\,\omega)\right)-4k_2c_3.$$

3. $$v=x, \quad \to \quad z=-\frac{c_1}{2}x^2+t(1-c_1) \quad \to$$

$$\to \quad u=\frac{4(x(1-c_1)-2k_1)}{-(x^2+2t)(1-c_1)+4(k_1x+k_2)}.$$

Для побудови аналітичної формули розмноження розв'язків рівняння (58), почнемо з формули (64), записавши її у вигляді

$$u^{\mathrm{II}}=-\frac{(-4\,v+8\,c_1)\,v_x-4\,z_x}{2\,z+v^2-4\,c_1v-4\,c_2}, \tag{67}$$

та підставимо в неї інший розв'язок цього рівняння, поклавши в (67) $v_x=-\dfrac{1}{2}u^{\mathrm{II}}v$. Знаходимо шукану формулу розмноження розв'язків

$$u^{\mathrm{I}}=-\frac{(-2\,v+4\,c_1)\,u^{\mathrm{II}}\,v-4\,z_x}{2\,z+v^2-4\,c_1v-4\,c_2}. \tag{68}$$

Розв'язавши цей вираз відносно u^{II}, отримуємо

$$u^{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\frac{(2\,z+v^2-4\,c_1v-4\,c_2)\,u^{\mathrm{I}}\,v+4\,z_x}{v(v-2\,c_1)}. \tag{69}$$

Тепер можливо побудувати новий розв'язок u^{II} рівняння (58) з відомого розв'язку u^{I}, вибираючи для цієї формули довільний відомий розв'язок рівняння лінійної теплопровідності $v(x,t)$. Відповідна допоміжна функція $z(x,t)$ може бути знайдена розв'язанням ДРЧП

$$g(x,t)=-\frac{(-4\,\phi(x,t)+8\,c_1)\,\phi_x(x,t)-4\,z_x}{2\,z+\phi(x,t)^2-4\,c_1\phi(x,t)-4\,c_2}, \tag{70}$$

де $u^{\mathrm{I}}=g(x,t)$ є відомим розв'язком (58) а $v(x,t)=\phi(x,t)$ — довільний розв'язок рівняння (59). Розв'язавши це диференціальне рівняння відносно $z(x,t)$, знаходимо вираз, що містить довільну функцію, яка залежить від t. Ця функція може бути уточнена за допомогою рівняння (60). Підставляючи отримані компоненти в (69), ми знаходимо шуканий результат.

Теорема 2. *Формула розмноження розв'язків рівняння* (58) *має вигляд*

$$u^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\frac{(2 - \tau + v^2 - 4\,c_1 v - 4\,c_2)\,u^{\mathrm{I}}\,v + 4\,\tau_x}{v(v - 2\,c_1)}, \tag{71}$$

де $u^{\mathrm{I}} = g(x,t)$ *— відомий розв'язок рівняння* (58), *а* $v(x,t) = \phi(x,t)$ *є довільним розв'язком рівняння лінійної теплопровідності* $v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0$. *Функціональний параметр* $\tau(x,t)$ *побудовано в такий спосіб*: *якщо дано відомий розв'язок* $u^{\mathrm{I}} = g(x,t)$ *рівняння* (58), *інтегруємо наступне диференціальне рівняння в частинних похідних*

$$g(x,t) = -\frac{(-4\,\phi(x,t) + 8\,c_1)\,\phi_x(x,t) - 4\,\tau_x}{2\,\tau + \phi(x,t)^2 - 4\,c_1\phi(x,t) - 4\,c_2} \tag{72}$$

відносно функції $\tau(x,t)$, *яка містить довільну функцію від* t. *Останню уточнюємо за допомогою рівняння*

$$\tau_t - \phi_x(x,t)^2 - \tau_{xx} = 0. \tag{73}$$

Наведемо кілька прикладів застосування отриманої формули. З метою скорочення відповідні рівняння для додаткової функції z та їх розв'язки нами опущені.

1. $u^{\mathrm{I}} = \dfrac{x}{t}$, $v = x^2 + 2t \quad \to \quad u^{\mathrm{II}} = -\dfrac{2}{x}$.
2. $u^{\mathrm{I}} = -\dfrac{2}{x}$, $v = x \quad \to \quad u^{\mathrm{II}} = -\dfrac{4x}{x^2 + 2t}$.
3. $u^{\mathrm{I}} = \dfrac{x}{t}$, $v = 2\sqrt{t}\,e^{-\frac{x^2}{4t}} + \sqrt{\pi}\,x\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{t/x^2}}\right) \quad \to$

$$\to \quad u^{\mathrm{II}} = -\frac{2\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{1}{2\,\sqrt{t/x^2}}\right)}{2\sqrt{t}\,e^{-\frac{x^2}{4\,t}} + \sqrt{\pi}\,x\,\mathrm{erf}\left(\dfrac{1}{2\,\sqrt{t/x^2}}\right)}.$$

Таким чином, ми можемо дійти висновку, що запропонована додаткова нелокальна симетрія дозволяє здійснювати розмноження в більш широкі сімейства точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

6. Заключення. Нехай вихідне рівняння не має очікуваної симетрії (інваріантності або лінеаризації) відносно обраного нелокального перетворення змінних. Тоді впровадження додаткових змінних в таке нелокальне перетворення вже може забезпечити появу цієї симетрії за наявності додаткових рівнянь для додаткових змінних. Тобто, вони *примушують* дане рівняння до реалізації цих симетрій у відповідності до операторної рівності (20). Оскільки ми користуємося нелокальним відображенням вихідного рівняння на дане *під дією сили*, визначеної додатковими функціями, (які є розв'язками рівнянь для додаткових змінних), відповідні нелокальні симетрії ми називаємо *примусовими симетріями, або forced symmetry*. Розглянуті в роботі приклади демонструють, що запропонована додаткова нелокальна симетрія дозволяє здійснити розмноження в більш широкі сімейства точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь. Усі знайдені розв'язки можуть бути природно розмножені в багатопараметричні сімейства розв'язків засобами перетворень симетрії Лі, або будь-якими іншими формулами розмноження розв’язків. Деякі з них можуть бути отримані в явній формі, у той час як інші можуть мати параметричне зображення з функціональними параметрами, поданими в неявній формі. Демонструючи отримані вище приклади, ми не затверджуємо, що додали набори з нових точних розв’язків розглянутих рівнянь. Ми прагнули продемонструвати ефективність запропонованих алгоритмів і ступінь їх складності.

Література

1. L. V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Acad. Press, New York (1982).
2. P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, New York (1993).
3. G. W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and differential equations*, Appl. Math. Sci., **81**, New York, Springer-Verlag (1989).
4. G. W. Bluman, J. J. Cole, *The general similarity solution of the heat equation*, J. Math. Mech., № 18, 1025 – 1042 (1968/69).
5. W. I. Fushchich, N. I. Serov, *The conditional symmetry and reduction of the nonlinear heat equation* (Russian), Docl. Acad. Nauk Ukrain. Ser. A, № 7, 24 – 27 (1990).
6. P. J. Olver, P. Rosenau, *The construction of special solutions to partial differential equations*, Phys. Lett. A, **114**, № 3, 107 – 112 (1986).
7. В. И. Фущич, А. Г. Никитин, *Симметрия уравнений Максвелла*, Наук. думка, Киев (1983).
8. C. Rogers, W. F. Shadwick, *Bäcklund transformations and their applications*, Acad. Press, New York-London (1982).
9. G. W. Bluman, G. J. Reid, S. Kumei, *New classes of symmetries for partial differential equations*, J. Math. Phys., **29**, № 4, 806 – 811 (1988).
10. I. M. Anderson, N. Kamran, P. J. Olver, *Internal, external, and generalized symmetries*, Adv. Math., **100**, № 1, 53 – 100 (1993).
11. W. I. Fuschych, V. A. Tychynin, *Preprint No 82.33*, Akad. Nauk Ukr. SSR, Inst. Math., Kiev (1982).
12. V. A. Tychynin, *Non-local symmetry and generating solutions for Harry – Dym-type equations*, J. Phys. A: Math. Gen., **27**, № 13, 4549 – 4556 (1994).
13. V. A. Tychynin, O. V. Petrova, O. M. Tertyshnyk, *Symmetries and generation of solutions for partial differential equations*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., **3**, Paper 019, 0702033, 14 p. (2007).
14. V. A. Tychynin, O. V. Petrova, *Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion–convection equations*, J. Math. Anal. Appl., **382**, № 1, 20 – 33 (2011).
15. E. G. Reyes, *Nonlocal symmetries and the Kaup – Kupershmidt equation*, J. Math. Phys., **46**, № 7, 073507, 19 p. (2005).
16. F. Galas, *New nonlocal symmetries with pseudopotentials*, J. Phys. A: Math. Gen., **25**, № 15, L981–L986 (1992).
17. A. R. Forsyth, *Theory of differential equations*, Vol. 5, 6, Dover Publication, N.Y. (1959).
18. W. F. Ames, *Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. 1*, Acad. Press, New York (1965).
19. N. H. Ibragimov, R. L. Anderson, *Lie – Bäcklund tangent transformations*, J. Math. Anal. Appl., **59**, № 1, 145 – 162 (1977).
20. H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook, *Bäcklund transformation for solution of the Korteweg – de Vries equation*, Phys. Rev. Lett., **31**, № 23, 1386 – 1389 (1973).
21. H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook, *Prolongation structures of nonlinear evolution equations*, J. Math. Phys., **16**, № 1, 1 – 7 (1975).
22. F. B. Estabrook, *Moving frames and prolongation algebras*, J. Math. Phys., **23**, № 11, 2071 – 2076 (1982).
23. F. Pirani, D. Robinson, W. F. Shadwick, *Jet bundle formulation of Backlund transformations to nonlinear evolution equations*, D. Reidel Publ. Co, Dordrecht (1979).
24. R. Hermann, *The pseudopotentials of Estabrook and Wahlquist, the geometry of solutions and the theory of connections*, Phys. Rev. Lett., № 36, 835 – 836 (1976).
25. M. J. Ablowitz, H. Segur, *Solitons and the inverse scattering transform*, SIAM, Philadelphia (1981).
26. I. Sh. Akhatov, R. K. Gazizov, N. H. Ibragimov, *Nonlocal symmetries, A heuristic approach* (Russian), Translated in J. Soviet Math., **55**, № 1, 3 – 83 (1991); Itogi Nauki i Tekhniki. Current Problems in Mathematics. Newest Results (Russian), Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, № 34, 3 – 84 (1989).

27. J. R. King, *Some non-local transformations between nonlinear diffusion equations*, J. Phys. A: Math. Gen., № 23, 5441 – 5464 (1990).
28. N. Euler, *Multipotentialisations and iterating-solution formulae: the Krichever – Novikov equation*, J. Nonlinear Math. Phys., **16**, suppl. 1, 93 – 106 (2009).
29. G. W. Bluman, P. Doran-Wu, *The use of factors to discover potential systems or linearizations*, Acta Appl. Math., № 41, 21 – 43 (1995).
30. G. W. Bluman, *Nonlocal extensions of similarity methods*, J. Nonlinear Math. Phys., **15**, suppl. 1, 1 – 24 (2008).
31. G. W. Bluman, A. F. Cheviakov, *Nonlocally related systems, linearization and nonlocal symmetries for the nonlinear wave equation*, J. Math. Anal. Appl., № 333, 93 – 111 (2007).
32. G. W. Bluman, A. F. Cheviakov, N. M. Ivanova, *Framework for nonlocally related partial differential equation systems and nonlocal symmetries: extension, simplification, and examples*, J. Math. Phys., № 47, 113505, 1 – 23 (2006).
33. R. O. Popovych, N. M. Ivanova, *Hierarchy of conservation laws of diffusion-convection equations*, J. Math. Phys., № 46, 043502, 1 – 22 (2005); DOI: 10.1063/1.1865813.
34. I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov, *Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws and Bäcklund transformations*, Acta Appl. Math., **15**, 161 – 209 (1989).
35. N. M. Ivanova, R. O. Popovych, C. Sophocleous, O. O. Vaneeva, *Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations. Physica A*, № 388, 343 – 356 (2008).
36. A. Clarkson, A. S. Fokas, M. J. Ablowitz, *Hodograph transformations of linearizable partial differential equations*, SIAM J. Appl. Math., № 49, 1188 – 1209 (1989).
37. W. I. Fuschych, V. A. Tychynin, *Exact solutions and superposition principle for nonlinear wave equation*, Docl. Acad. Nauk Ukr. Ser. A, № 5, 32 – 36 (1990).
38. V. A. Tychynin, *New nonlocal symmetries of diffusion-convection equations and their connection with generalized hodograph transformation*, Symmetry, **7**, № 4, 1751 – 1767 (2015); DOI:10.3390/sym7041751.
39. W. Rzeszut, V. Vladimirov, O. M. Tertyshnyk, V. A. Tychynin, *Linearizability and nonlocal superposition for nonlinear transport equation with memory*, Rep. Math. Phys., **72**, № 2, 235 – 252 (2013).
40. V. A. Tychynin, *On construction of new exact solutions for nonlinear equations via known particular solutions* (Russian), Symmetry and solutions of equations of mathematical physics (Russian), vi, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Math., Kiev, 86 – 89 (1989).
41. V. A. Tychynin, *Non-local symmetries and solutions for some classes of nonlinear equations of mathematical physics*, Thesis. IM NASU/V. A. Tychynin (1994).
42. V. A. Tychynin, *Adjoint solutions and superposition principle for linearizable Krichever – Novikov equation*, Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics, Collection of Works of Institute of Mathematics, Kyiv, vol. 16, № 1, 181 – 192 (2019).
43. A. Jeffrey, *Applied partial differential equations. An introduction*, Acad. Press, New York (2003).
44. G. W. Bluman, P. Doran-Wu, *The use of factors to discover potential systems or linearisations*, Acta Appl. Math., № 41, 21 – 43 (1995).
45. В. А. Тичинін, О. Н. Тертышник, *Нелокальное размножение решений одного нелинейного телеграфного уравнения*, Збірник праць Другого Всеукраїнського наукового семінару „Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи”, 19-20.10, 129 – 140 (2012).
46. В. И. Фущич, В. А. Тычинин, Н. И. Серов, *Формула размножения решений уравнений Кортевега – де Фриза*, Укр. мат. журн., **44**, № 5, 716 – 719 (1992).

Одержано 10.11.21