DOI: 10.37863/umzh.v74i3.6996

УДК 512.813:517.957.6

В. М. Федорчук, В. І. Федорчук (Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів)

ПРО РЕДУКЦІЮ $(1+3)$-ВИМІРНОГО НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ МОНЖА – АМПЕРА ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

We study the relations between the structural properties of two-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ and the results of symmetry reduction for the $(1+3)$-dimensional inhomogeneous Monge-Ampère equation. Some results concerning the reduction of the equation under investigation to the first-order PDEs are presented.

Вивчається зв'язок між структурними властивостями неспряжених підалгебр розмірності 2 алгебри Лі узагальненої групи Пуанкаре $P(1{,}4)$ і результатами симетрійної редукції $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера. Наведено деякі результати, що стосуються редукції досліджуваного рівняння до диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) першого порядку.

1. Вступ. Рівняння Монжа – Ампера в просторах різних вимірностей і різних типів використовувалися і використовуються при розв'язуванні різних задач геометрії, геометричного аналізу, теорії струн, космології, геометричної оптики, одновимірної газової динаміки, метеорології та океанографії тощо. Тут наведемо тільки деякі роботи присвячені дослідженню цих рівнянь [1 – 15] (див. також цитовану там літературу).

Рівняння Монжа – Ампера досліджувалися різними методами. В пропонованій роботі $(1+$ $+\,3)$-вимірне неоднорідне рівняння Монжа – Ампера вивчається класичним методом Лі – Овсяннікова [16 – 18] (див. також цитовану там літературу).

У 1984 р. A. M. Grundland (Грондленд), J. Harnad (Ханед), P. Winternitz (Вінтерніц) [19] звернули увагу на те, що при проведенні симетрійної редукції нелінійних релятивістськи інваріантних рівнянь в окремих випадках редуковані рівняння, отримані за допомогою неспряжених (нееквівалентних відносно внутнішніх автоморфізмів) підалгебр заданих рангів алгебр Лі груп симетрії цих рівнянь, були різних типів. Вони також вивчали такого типу редукції. Підтвердження існування такого типу редукцій можна знайти при проведенні симетрійних редукцій деяких важливих для теоретичної і математичної фізики диференціальних рівнянь (див., наприклад, [20 – 30] і цитовану там літературу).

В рамках класичного групового аналізу (див., наприклад, [17, 18]) інваріантні розв'язки диференціальних рівнянь слід класифікувати за їхніми рангами (рангами відповідних їм неспряжених підалгебр). При такому підході не вдається пояснити отримання різних типів редукованих рівнянь (інваріантних розв'язків) при використанні неспряжених підалгебр заданих рангів алгебр Лі груп симетрії цих рівнянь.

У роботі [28] для класифікації симетрійних редукцій (інваріантних розв'язків) диференціальних рівнянь авторами запропоновано використовувати структурні властивості низькорозмірних неспряжених підалгебр того самого рангу алгебр Лі груп симетрії рівнянь, що досліджуються.

Пропонована робота присвячена вивченню зв'язку між структурними властивостями неспряжених підалгебр розмірності 2 алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1{,}4)$ і результатами симетрійної редукції $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера. Наведемо тільки окремі результати, що стосуються редукції досліджуваного рівняння до ДРЧП першого порядку. З цією метою спочатку розглянемо деякі результати, що стосуються алгебри Лі групи $P(1,4)$ та її неспряжених підалгебр.

2. Алгебра Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ та її неспряжені підалгебри. Група $P(1,4)$ є групою поворотів і трансляцій п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної і математичної фізики груп група $P(1,4)$ посідає особливе місце. Вона є найменшою групою, яка містить як підгрупи групи симетрії релятивістської фізики (група Пуанкаре $P(1,3)$) та нерелятивістської фізики (розширена група Галілея $\widetilde{G}(1,3)$ [31]).

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15-ма базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu},\ \mu,\nu = 0,1,2,3,4$ і $P_\mu,\ \mu = 0,1,2,3,4,$ які задовольняють комутаційні співвідношення

$$\big[P_\mu, P_\nu\big] = 0, \qquad \big[M_{\mu\nu}, P_\sigma\big] = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu,$$
$$\big[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\big] = g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho},$$

де $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1,\ g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$.

У цій роботі розглядатимемо таке зображення [32] для алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$P_4 = -\frac{\partial}{\partial u}, \qquad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \quad x_4 \equiv u.$$

Надалі використовуватимемо наступні базисні елементи:

$$G = M_{04}, \qquad L_1 = M_{23}, \qquad L_2 = -M_{13}, \qquad L_3 = M_{12},$$
$$P_a = M_{a4} - M_{0a}, \qquad C_a = M_{a4} + M_{0a}, \quad a = 1,2,3,$$
$$X_0 = \frac{1}{2}(P_0 - P_4), \qquad X_k = P_k \quad k = 1,2,3, \qquad X_4 = \frac{1}{2}(P_0 + P_4).$$

Неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ описані в роботах [33 – 35].

Алгебра Лі розширеної групи Галілея $\widetilde{G}(1,3)$ генерується такими базисними елементами:

$$L_1, \quad L_2, \quad L_3, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad X_0, \quad X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4.$$

Класифікація всіх низькорозмірних $(\dim L \leq 3)$ неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ проведена в [36].

3. Про редукцію $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера до ДРЧП першого порядку. У цій роботі розглядаємо $(1+3)$-вимірне неоднорідне рівняння Монжа – Ампера вигляду

$$\det(u_{\mu\nu}) = \lambda(1 - u_\nu u^\nu)^3, \quad \lambda \neq 0,$$

де $u = u(x),\ x = (x_0,x_1,x_2,x_3) \in M(1,3),\ u_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu},\ u^\nu = g^{\nu\alpha}u_\alpha,\ u_\alpha \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha},\ g_{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)\delta_{\mu\nu},\ g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma,\ \mu,\nu,\alpha,\sigma = 0,1,2,3.$

Тут і надалі, $M(1,3)$ — чотиривимірний простір Мінковського, $R(u)$ — дійсна вісь залежної змінної u, δ^μ_σ — символ Кронекера.

У 1983 р. в праці Фущича і Сєрова [32] вивчено симетрію і побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків багатовимірного рівняння Монжа – Ампера. Із цієї роботи, зокрема, випливає, що групою симетрії досліджуваного рівняння є група Пуанкаре $P(1{,}4)$.

Для проведення симетрійної редукції і побудови класів інваріантних розв'язків цього рівняння ми використали структурні властивості неспряжених підалгебр розмірності 2 алгебри Лі групи $P(1{,}4)$.

Внаслідок проведення симетрійної редукції рівняння що вивчається, отримали такі типи редукованих рівнянь:

– ДРЧП першого порядку;

– ДРЧП другого порядку.

Нижче ми наведемо тільки деякі отримані нами результати, що стосуються редукцій $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера до ДРЧП першого порядку.

3.1. Алгебри Лі типу $2A_1$. У цій роботі символом $2A_1$ позначаємо абелеві неспряжені підалгебри розмірності 2 алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1{,}4)$.

1. $\langle L_3 + \lambda_1 G,\ \lambda_1 > 0\rangle \oplus \langle X_3\rangle$:

Анзац $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = \varphi(\omega_1, \omega_2),\ \omega_1 = (x_0^2 - u^2)^{1/2},\ \omega_2 = \ln(x_0 + u) + \lambda_1 \arctan \dfrac{x_1}{x_2}$.

Редуковане рівняння $\left(\omega_1\varphi^2\varphi_1^2 - \lambda_1^2\omega_1\varphi_2^2 + 2\varphi^2\varphi_1\varphi_2 - \omega_1\varphi^2\right)\omega_1 = 0$.

Тут і надалі: $\varphi_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega_i},\ i = 1, 2$.

Розв'язок редукованого рівняння $\omega_1 = 0$.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера $x_0^2 - u^2 = 0$.

2. $\langle G\rangle \oplus \langle X_1\rangle$:

Анзац $(x_0^2 - u^2)^{1/2} = \varphi(\omega_1, \omega_2),\ \omega_1 = x_2,\ \omega_2 = x_3$.

Редуковане рівняння $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 1 = 0$.

Розв'язок редукованого рівняння $\varphi(\omega_1, \omega_2) = \varepsilon\sqrt{1 - c_1^2}\,\omega_1 + c_1\omega_2 + c_2,\ \varepsilon = \pm 1$, де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера $(x_0^2 - u^2)^{1/2} = \varepsilon\sqrt{1 - c_1^2}\,x_2 + c_1 x_3 + c_2$.

3. $\langle G + \alpha X_2,\ \alpha > 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$:

Анзац $x_3 = \varphi(\omega_1, \omega_2),\ \omega_1 = (x_0^2 - u^2)^{1/2},\ \omega_2 = x_2 - \alpha\ln(x_0 + u)$.

Редуковане рівняння $\left[2\alpha\varphi_1\varphi_2 - (\varphi_1^2 - \varphi_2^2 - 1)\omega_1\right]\omega_1 = 0$.

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \alpha c_1 \ln(\omega_1) + c_1\omega_2 - \sqrt{\alpha^2 c_1^2 + (c_1^2 + 1)\omega_1^2} +$$
$$+ \alpha c_1 \ln\left(\frac{2\alpha^2 c_1^2 + 2\alpha c_1\sqrt{\alpha^2 c_1^2 + (c_1^2 + 1)\omega_1^2}}{\omega_1}\right) + c_2,$$

де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$x_3 = \frac{\alpha}{2} c_1 \ln(x_0^2 - u^2) + c_1\big(x_2 - \alpha\ln(x_0 + u)\big) - \sqrt{\alpha^2 c_1^2 + (c_1^2 + 1)(x_0^2 - u^2)} + c_2 +$$
$$+ \alpha c_1 \ln\left(\frac{2\alpha^2 c_1^2 + 2\alpha c_1\sqrt{\alpha^2 c_1^2 + (c_1^2 + 1)(x_0^2 - u^2)}}{\sqrt{x_0^2 - u^2}}\right).$$

4. $\left\langle L_3 + \dfrac{1}{2}(P_3 + C_3) \right\rangle \oplus \langle X_0 + X_4 \rangle$:

Анзац $\arctan \dfrac{x_1}{x_2} - \arctan \dfrac{x_3}{u} = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\omega_2 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}$.

Редуковане рівняння $\left[\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2\right]\omega_2 = 0$.

5. $\left\langle L_3 + \dfrac{\lambda_1}{2}(P_3 + C_3),\ 0 < \lambda_1 < 1 \right\rangle \oplus \langle X_0 + X_4 \rangle$:

Анзац $\lambda \arctan \dfrac{x_1}{x_2} - \arctan \dfrac{x_3}{u} = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\omega_2 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}$.

Редуковане рівняння $\left[\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2 + \lambda_1\omega_2^2\right]\omega_2 = 0$.

Зауважимо, що нижченаведені результати отримані при допомозі неспряжених підалгебр типу $2A_1$ алгебри Лі розширеної групи Галілея $\widetilde{G}(1{,}3) \subset P(1{,}4)$.

6. $\langle L_3 - P_3 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle$:

Анзац $\arctan \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_3}{x_0 + u} = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = x_0 + u$, $\omega_2 = x_1^2 + x_2^2$.

Редуковане рівняння $\left(4\omega_1^2\omega_2^2\varphi_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2\right)\omega_1 = 0$.

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = i\varepsilon \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2}}{\omega_1}\right) - i\varepsilon \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2}}{\omega_1} + f(\omega_1), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

де f — довільна гладка функція.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$\arctan \frac{x_1}{x_2} = f(x_0 + u) - i\varepsilon \frac{\sqrt{(x_0 + u)^2 + x_1^2 + x_2^2}}{x_0 + u} +$$
$$+ i\varepsilon \operatorname{arctanh}\left(\frac{\sqrt{(x_0 + u)^2 + x_1^2 + x_2^2}}{x_0 + u}\right) - \frac{x_3}{x_0 + u}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

7. $\langle L_3 \rangle \oplus \langle X_0 + X_4 \rangle$:

Анзац $u = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $\omega_2 = x_3$.

Редуковане рівняння $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 1 = 0$.

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = i\varepsilon\sqrt{c_1^2 + 1}\,\omega_1 + c_1\omega_2 + c_2, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$u = i\varepsilon\sqrt{c_1^2 + 1}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + c_1 x_3 + c_2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

8. $\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4),\ \alpha > 0 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle$:

Анзац $x_0 + u - \alpha \arctan \dfrac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 = x_3$, $\omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Редуковане рівняння $\omega_2^2\varphi_1^2 + \omega_2^2\varphi_2^2 + \alpha^2 = 0$.

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \varepsilon\left[i\alpha \ln\left(\frac{\alpha\sqrt{c_1^2\omega_2^2 + \alpha^2} + \alpha^2}{\omega_2}\right) - i\sqrt{c_1^2\omega_2^2 + \alpha^2} + c_1\omega_1 + c_2\right], \quad \varepsilon = \pm 1,$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$u=\varepsilon\left[i\alpha\ln\left(\frac{\alpha\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+\alpha^2}+\alpha^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)-i\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+\alpha^2}+c_1x_3+c_2\right]+$$
$$+\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}-x_0.$$

9. $\langle L_3+\alpha X_3,\ \alpha>0\rangle\oplus\langle X_0+X_4\rangle$:
Анзац $x_3+\alpha\arctan\dfrac{x_1}{x_2}=\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1=u,\ \omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$.
Редуковане рівняння $(\varphi_1^2+\varphi_2^2+1)\omega_2^2+\alpha^2=0$.
Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=\varepsilon\left[i\alpha\ln\left(\frac{\alpha\sqrt{(c_1^2+1)\omega_2^2+\alpha^2}+\alpha^2}{\omega_2}\right)-i\sqrt{(c_1^2+1)\omega_2^2+\alpha^2}+c_1\omega_1+c_2\right],\quad \varepsilon=\pm1,$$

де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$x_3=\varepsilon\left[i\alpha\ln\left(\frac{\alpha\sqrt{(c_1^2+1)(x_1^2+x_2^2)+\alpha^2}+\alpha^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)-\right.$$
$$\left.-i\sqrt{(c_1^2+1)(x_1^2+x_2^2)+\alpha^2}+c_1\,u+c_2\right]-\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}.$$

10. $\langle L_3+2X_4\rangle\oplus\langle X_3\rangle$:
Анзац $x_0-u+2\arctan\dfrac{x_2}{x_1}=\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1=x_0+u,\ \omega_2=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$.
Редуковане рівняння $(\varphi_2^2+4\varphi_1)\omega_2^2+4=0$.
Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=c_1\omega_1-2i\sqrt{c_1\omega_2^2+1}+2i\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{c_1\omega_2^2+1}}\right)+c_2,$$

де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$x_0-u+2\arctan\frac{x_2}{x_1}=c_1(x_0+u)-2i\sqrt{c_1(x_1^2+x_2^2)+1}+$$
$$+2i\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{c_1(x_1^2+x_2^2)+1}}\right)+c_2.$$

11. $\langle L_3-P_3+2\alpha X_0,\ \alpha\neq0\rangle\oplus\langle X_4\rangle$:
Анзац $x_0+u-2\alpha\arctan\dfrac{x_1}{x_2}=\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\ \omega_2=(x_0+u)^2+4\alpha x_3$.
Редуковане рівняння $(\varphi_1^2+16\alpha^2\varphi_2^2)\omega_1^2+4\alpha^2=0$.
Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=2i\alpha\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{4c_1^2\omega_1^2+1}}\right)-2i\alpha\sqrt{4c_1^2\omega_1^2+1}+c_1\omega_2+c_2,$$

де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$x_0 + u - 2\alpha \arctan \frac{x_1}{x_2} = -2i\alpha\sqrt{4c_1^2(x_1^2+x_2^2)+1} +$$
$$+2i\alpha \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{4c_1^2(x_1^2+x_2^2)+1}}\right) + c_1\left((x_0+u)^2 + 4\alpha x_3\right) + c_2.$$

12. $\langle P_3\rangle \oplus \langle X_1\rangle$:
Анзац $x_0^2 - x_3^2 - u^2 = \varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_1 = x_2$, $\omega_2 = x_0 + u$.
Редуковане рівняння $\varphi_1^2 + 4\omega_2\varphi_2 - 4\varphi = 0$.
Розв'язок редукованого рівняння $\varphi(\omega_1,\omega_2) = (\omega_1 + c_1)^2 - c_2\omega_2$, де c_1, c_2 — довільні сталі.
Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера $x_0^2 - x_3^2 - u^2 = (x_2 + + c_1)^2 - c_2(x_0 + u)$.

13. $\langle P_3 - X_2\rangle \oplus \langle X_1\rangle$:
Анзац $x_2 - \dfrac{x_3}{x_0+u} = \varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_1 = x_0 + u$, $\omega_2 = (x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2}$.
Редуковане рівняння $\left(2\omega_1^3\varphi_1\varphi_2 + \omega_1^2\omega_2\varphi_2^2 - \omega_1^2\omega_2 - \omega_2\right)\omega_1\omega_2 = 0$.
Розв'язок редукованого рівняння $\omega_2 = 0$.
Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера $x_0^2 - x_3^2 - u^2 = 0$.

14. $\langle P_3 - 2X_0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$:
Анзац $(x_0+u)^2 + 4x_3 = \varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_1 = x_1$, $\omega_2 = x_2$.
Редуковане рівняння $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 16 = 0$.
Розв'язок редукованого рівняння $\varphi(\omega_1,\omega_2) = i\varepsilon\sqrt{c_1^2+16}\,\omega_1 + c_1\omega_2 + c_2$, $\varepsilon = \pm 1$, де c_1, c_2 — довільні сталі.
Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$(x_0+u)^2 + 4x_3 = i\varepsilon\sqrt{c_1^2+16}\,x_1 + c_1x_2 + c_2.$$

15. $\langle P_3 - 2X_0\rangle \oplus \langle X_1\rangle$:
Анзац $\dfrac{1}{6}(x_0+u)^3 + x_3(x_0+u) + x_0 - u = \varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_1 = x_2$, $\omega_2 = (x_0+u)^2 + 4x_3$.
Редуковане рівняння $\varphi_1^2 + 16\varphi_2^2 - \omega_2 = 0$.
Розв'язок редукованого рівняння $\varphi(\omega_1,\omega_2) = \varepsilon c_1\omega_1 - \dfrac{\varepsilon}{6}(\omega_2 - c_1^2)^{3/2} + c_2$, $\varepsilon = \pm 1$, де c_1, c_2 — довільні сталі.
Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$\frac{1}{6}(x_0+u)^3 + x_3(x_0+u) + x_0 - u = \varepsilon c_1x_2 - \frac{\varepsilon}{6}\left((x_0+u)^2 + 4x_3 - c_1^2\right)^{3/2} + c_2.$$

16. $\langle L_3\rangle \oplus \langle X_4\rangle$:
Анзац $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = \varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_1 = x_0 + u$, $\omega_2 = x_3$.
Редуковане рівняння $\varphi_2^2 + 1 = 0$.
Розв'язок редукованого рівняння $\varphi(\omega_1,\omega_2) = f(\omega_1) + i\varepsilon\omega_2$, $\varepsilon = \pm 1$, де f — довільна гладка функція.
Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера $(x_1^2+x_2^2)^{1/2} = f(x_0 + + u) + i\varepsilon x_3$, $\varepsilon = \pm 1$.

17. $\langle L_3 + \alpha X_3,\ \alpha > 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle$:
Анзац $x_3 + \alpha\arctan\dfrac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega_1,\omega_2)$, $\omega_1 = x_0 + u$, $\omega_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$.

Редуковане рівняння $\omega_2^2(\varphi_2^2+1)+\alpha^2=0$.

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=f(\omega_1)+i\varepsilon\sqrt{\omega_2^2+\alpha^2}-i\varepsilon\alpha\ln\left(\frac{\alpha\sqrt{\omega_2^2+\alpha^2}+\alpha^2}{\omega_2}\right)+c,\ \varepsilon=\pm1,$$

де f — довільна гладка функція; c — довільна стала.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$x_3+\alpha\arctan\frac{x_1}{x_2}=f(x_0+u)+i\varepsilon\sqrt{x_1^2+x_2^2+\alpha^2}-i\varepsilon\alpha\ln\left(\frac{\alpha\sqrt{x_1^2+x_2^2+\alpha^2}+\alpha^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)+c_1.$$

18. $\langle P_3-X_1\rangle\oplus\langle X_4\rangle$:

Анзац $x_1-\dfrac{x_3}{x_0+u}=\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1=x_2,\ \omega_2=x_0+u$.

Редуковане рівняння $\left[\omega_2^2(\varphi_1^2+1)+1\right]\omega_2=0$.

Розв'язок редукованого рівняння $\varphi(\omega_1,\omega_2)=f(\omega_2)+i\varepsilon\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\sqrt{\omega_2^2+1},\ \varepsilon=\pm1$, де f — довільна гладка функція.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера $x_1-\dfrac{x_3}{x_0+u}=f(x_0+$ $+u)+i\varepsilon\dfrac{x_2}{x_0+u}\sqrt{(x_0+u)^2+1}$.

3.2. Алгебри Лі типу A_2. У цій роботі символом A_2 позначаємо розв'язні неспряжені підалгебри розмірності 2 алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$.

1. $\left\langle -G-\dfrac{1}{\lambda_1}L_3,\ X_4,\ \lambda_1>0\right\rangle$:

Анзац $\ln(x_0+u)+\lambda_1\arctan\dfrac{x_1}{x_2}=\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1=x_3,\ \omega_2=x_1^2+x_2^2$.

Редуковане рівняння $\omega_2\varphi_1^2+4\omega_2^2\varphi_2^2+\lambda_1^2=0$.

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1,\omega_2)=c_1\omega_1-i\varepsilon\sqrt{c_1^2\omega_2+\lambda_1^2}+i\varepsilon\lambda_1\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{\sqrt{c_1^2\omega_2+\lambda_1^2}}{\lambda_1}\right)+c_2,\quad\varepsilon=\pm1,$$

де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$\ln(x_0+u)+\lambda_1\arctan\frac{x_1}{x_2}=c_1x_3-i\varepsilon\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+\lambda_1^2}+$$
$$+i\varepsilon\lambda_1\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+\lambda_1^2}}{\lambda_1}\right)+c_2,\quad\varepsilon=\pm1.$$

2. $\langle -G-\alpha X_1,\ X_4,\ \alpha>0\rangle$:

Анзац $x_1-\alpha\ln(x_0+u)=\varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1=x_2,\ \omega_2=x_3$.

Редуковане рівняння $\varphi_1^2+\varphi_2^2+1=0$.

Розв'язок редукованого рівняння $\varphi(\omega_1,\omega_2)=i\varepsilon\sqrt{c_1^2+1}\,\omega_1+c_1\omega_2+c_2,\ \varepsilon=\pm1$, де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера $x_1 - \alpha\ln(x_0+u) = = i\varepsilon\sqrt{c_1^2+1}\,x_2 + c_1x_3 + c_2,\ \varepsilon = \pm 1$.

3. $\left\langle -\dfrac{1}{\lambda_1}(L_3+\lambda_1 G+\alpha X_3),\ X_4,\ \alpha>0, \lambda_1>0\right\rangle$:

Анзац $\ln(x_0+u)+\lambda_1\arctan\dfrac{x_1}{x_2} = \varphi(\omega_1,\omega_2),\ \omega_1 = x_1^2+x_2^2,\ \omega_2 = x_3+\alpha\arctan\dfrac{x_1}{x_2}$.

Редуковане рівняння $4\omega_1^2\varphi_1^2+\omega_1\varphi_2^2+(\alpha\varphi_2-\lambda_1)^2 = 0$.

Розв'язок редукованого рівняння

$$\varphi(\omega_1,\omega_2) = c_1\omega_2 - i\varepsilon\sqrt{c_1^2\omega_1+(\alpha c_1-\lambda_1)^2}+$$

$$+i\varepsilon\,(\alpha c_1-\lambda_1)\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{\sqrt{c_1^2\omega_1+(\alpha c_1-\lambda_1)^2}}{\alpha c_1-\lambda_1}\right)+c_2, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

де $c_1,\ c_2$ — довільні сталі.

Розв'язок $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера

$$\ln(x_0+u)+(\lambda_1-c_1\alpha)\arctan\frac{x_1}{x_2} = c_1x_3 - i\varepsilon\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+(\alpha c_1-\lambda_1)^2}+$$

$$+i\varepsilon\,(\alpha c_1-\lambda_1)\,\mathrm{arctanh}\left(\frac{\sqrt{c_1^2(x_1^2+x_2^2)+(\alpha c_1-\lambda_1)^2}}{\alpha c_1-\lambda_1}\right)+c_2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

4. Висновки. Встановлено взаємозв'язок між структурними властивостями неспряжених підалгебр розмірності 2 алгебри Лі узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$ і результатами симетрійної редукції $(1+3)$-вимірного неоднорідного рівняння Монжа – Ампера. Наведено деякі результати, що стосуються редукції досліджуваного рівняння до ДРЧП першого порядку.

Класифікацію неспряжених підалгебр розмірності 2 алгебри Лі групи $P(1,4)$ можна знайти в [36]. Вони є наступних типів: $2A_1,\ A_2$.

Редукції досліджуваного рівняння до ДРЧП першого порядку отримано для деяких неспряжених підалгебр типів: $2A_1,\ A_2$.

Література

1. S. Lie, *Neue Integrationsmethods der Monge-Ampérschen Gleichung*, Archiv for Math., **2**, 1 – 9 (1877).
2. S. Lie, *Zur Geometrie einer Monge'schen Gleichung*, Berichte Sächs. Ges., **50**, 1 – 2 (1898).
3. K. Jörgens, *Über die Lösungen der Differentialgleichung* $rt-s^2=1$ (in German), Math. Ann., **127**, 130 – 134 (1954).
4. E. Calabi, *Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens*, Michigan Math. J., **5**, 105 – 126 (1958).
5. А. В. Погорелов, *Многомерная проблема Минковского*, Наука, Москва (1975).
6. С. В. Хабиров, *Применение контактных преобразований неоднородного уравнения Монжа – Ампера в одномерной газовой динамике*, Докл. АН СССР, **310**, № 2, 333 – 336 (1990).
7. M. J. P. Cullen, R. J. Douglas, *Applications of the Monge – Ampère equation and Monge transport problem to meteorology and oceanography. Monge Ampère equation: applications to geometry and optimization (Deerfield Beach, FL, 1997)*, Contemp. Math., **226**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 33 – 53 (1999).
8. C. Udrişte, N. Bîlă, *Symmetry group of Ţiţeica surfaces PDE*, Balkan J. Geom. Appl., **4**, № 2, 123 – 140 (1999).
9. Yau Shing-Tung, Nadis Steve, *String theory and the geometry of the universe's hidden dimensions*, Notices Amer. Math. Soc., **58**, № 8, 1067 – 1076 (2011).
10. F. Jiang, N. S. Trudinger, *On the second boundary value problem for Monge – Ampère type equations and geometric optics*, Arch. Ration. Mech. Anal., **229**, № 2, 547 – 567 (2018).

11. A. Kushner, V. V. Lychagin, J. Slovák, *Lectures on geometry of Monge – Ampère equations with Maple*, Nonlinear PDEs, their geometry, and applications, Tutor. Sch. Workshops Math. Sci., Birkhäuser Springer, Cham., 53 – 94 (2019).
12. Yau Shing-Tung, N. Steve, *The shape of a life. One mathematician's search for the universe's hidden geometry*, Yale Univ. Press, New Haven, CT (2019).
13. E. Witten, *Superstring perturbation theory via super Riemann surfaces: an overview*, Pure Appl. Math. Q., **15**, № 1, 517 – 607 (2019).
14. Q. Le, *Nam, Global Hölder estimates for 2D linearized Monge – Ampère equations with right-hand side in divergence form*, J. Math. Anal. Appl., **485**, № 2, 123865 (2020).
15. Ł. T. Stępień, *On some exact solutions of heavenly equations in four dimensions*, AIP Advances., **10**, 065105 (2020); doi: https://doi.org/10.1063/1.5144327.
16. S. Lie, *Zur allgemeinen theorie der partiellen differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, Berichte Sächs. Ges., Leipzig, **47**, 53 – 128 (1895).
17. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1978).
18. P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, New York (1986).
19. A. M. Grundland, J. Harnad, P. Winternitz, *Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations*, J. Math. Phys., **25**, № 4, 791 – 806 (1984); https://doi.org/10.1063/1.526224.
20. В. М. Федорчук, І. М. Федорчук, О. С. Лейбов, *Редукція рівнянь Борна – Інфельда, Монжа – Ампера і ейконала до лінійних рівнянь*, Доп. Акад. наук України, № 11, 24 – 26 (1991).
21. V. Fedorchuk, *Symmetry reduction and exact solutions of the Euler – Lagrange – Born – Infeld, multidimensional Monge – Ampère and Eikonal equations*, J. Nonlinear Math. Phys., **2**, № 3-4, 329 – 333 (1995); https://doi.org/10.2991/jnmp.1995.2.3-4.13.
22. В. М. Федорчук, *Симетрійна редукція і деякі точні розв'язки нелінійного п'ятивимірного хвильового рівняння*, Укр. мат. журн., **48**, № 4, 573 – 577 (1996).
23. A. M. Grundland, A. J. Hariton, *Supersymmetric formulation of polytropic gas dynamics and its invariant solutions*, J. Math. Phys., **52**, 043501 (2011).
24. A. G. Nikitin, O. Kuriksha, *Group analysis of equations of axion electrodynamics*, Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems, Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus, Nicosia, 152 – 163 (2011).
25. A. G. Nikitin, O. Kuriksha, *Invariant solutions for equations of axion electrodynamics*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **17**, № 12, 4585 – 4601 (2012); https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.04.009.
26. V. Fedorchuk, V. Fedorchuk, *On classification of symmetry reductions for the eikonal equation*, Symmetry, **8**, № 6, Art. 51 (2016); https://doi.org/10.3390/sym8060051.
27. A. M. Grundland, A. Hariton, *Algebraic aspects of the supersymmetric minimal surface equation*, Symmetry, **9**, № 12, 318 (2017); doi:10.3390/sym9120318.
28. V. Fedorchuk, V. Fedorchuk, *On classification of symmetry reductions for partial differential equations*, Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б. Й. Пташника, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, 241 – 255 (2017).
29. V. Fedorchuk, V. Fedorchuk, *Classification of symmetry reductions for the eikonal equation*, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv (2018).
30. В. М. Федорчук, В. І. Федорчук, *Про класифікацію симетрійних редукцій* $(1+3)$*-вимірного рівняння Монжа – Ампера*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **63**, № 2, 7 – 16 (2020).
31. W. I. Fushchich, A. G. Nikitin, *Reduction of the representations of the generalized Poincare algebra by the Galilei algebra*, J. Phys. A: Math. and Gen., **13**, №7, 2319 – 2330 (1980).
32. В. И. Фущич, Н. И. Серов, *Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа – Ампера*, Докл. АН СССР, **273**, № 3, 543 – 546 (1983).
33. В. М. Федорчук, *Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре* $P(1,4)$, Укр. мат. журн., **31**, № 6, 717 – 722 (1979).
34. В. М. Федорчук, *Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре* $P(1,4)$, Укр. мат. журн., **33**, № 5, 696 – 700 (1981).
35. W. I. Fushchich, A. F. Barannik, L. F. Barannik, V. M. Fedorchuk, *Continuous subgroups of the Poincare group* $P(1,4)$, J. Phys. A: Math. and Gen., **18**, № 14, 2893 – 2899 (1985).
36. В. М. Федорчук, В. І. Федорчук, *Про класифікацію низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре* $P(1,4)$, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **3**, № 2, 302 – 308 (2006).

Одержано 12.11.21