DOI: 10.37863/umzh.v74i3.6667

УДК 517.9

А. Ф. Баранник (Помор. академія, Слупськ, Польща),
Т. А. Баранник (Полтав. нац. пед. ун-т),
І. І. Юрик (Нац. ун-т харч. технологій, Київ)

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ВІДОКРЕМЛЕННЯМ ЗМІННИХ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

We propose a method for construction of exact solutions to nonlinear heat equation which is based on the classic method of separating variables, its generalization, and Lie reduction method. Substitutions that reduce the nonlinear heat equation to ordinary differential equations are considered and the classes of exact solutions by means of the generalized separation of variables method are constructed.

Запропоновано метод побудови точних розв'язків рівняння нелінійної теплопровідності, який базується на класичному методі відокремлення змінних та його узагальненні і методі редукції. Розглянуто підстановки, що редукують рівняння нелінійної теплопровідності до звичайних диференціальних рівнянь та побудовано класи точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних даного рівняння.

1. Вступ. Робота присвячена побудові точних розв'язків нелінійного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1.1}$$

яке зустрічається в нелінійних задачах тепло- і масоперенесення (F — коефіцієнт теплопровідності або дифузії) і теорії фільтрації. У роботі [1] проведена групова класифікація рівнянь (1.1) і отримано вичерпний перелік інваріантних розв'язків цього рівняння. У випадку довільної функції $F(u)$ інваріантні розв'язки рівняння (1.1), що залежать від обох змінних x і t, мають вигляд $u = \varphi\big(xt^{-1/2}\big)$, або $u = \varphi(kx + \lambda t)$ [1]. Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1.1) є більш широкою в порівнянні з випадком довільної функції $F(u)$ лише у двох випадках: $F(u) = a\exp u$, $F(u) = au^m$.

Ефективним методом побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики є метод узагальненого відокремлення змінних (див. [2]). Важливі класи розв'язків з узагальненим відокремленням змінних рівняння (1.1) для $F(u) = au^m$ наведені в [2–6]. Частинні випадки $m = 1$, $m = -1$, $m = -2$, $m = -4/3$, $m = -2/3$ розглядались відповідно в [7–11, 11, 12], а випадок $F(u) = a\exp u$ — в [2, 5, 11].

Метод пошуку функції $F(u)$, для яких рівняння (1.1) має автомодельні розв'язки вигляду

$$u = u(z), \qquad z = xt^{-1/2}, \quad 0 \le x < \infty,$$

запропоновано в [13]. Рівняння (1.1), що допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних вигляду

$$u = u(z), \quad z = \varphi(x) + \psi(t),$$

описані в [2, 14]. За останні роки опубліковано багато статей і ряд монографій, присвячених знаходженню точних розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними за допомогою методу відокремлення змінних (див. [15, 16]).

У даній статті запропоновано метод побудови точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних для рівняння (1.1), який базується на класичному методі відокремлення змінних та його узагальненні і методі редукції. Для побудови точних розв'язків рівняння (1.1) використовується підстановка

$$p(x) = w(t)\varphi(u), \tag{1.2}$$

яка містить невідомі функції $w(t)$ і $\varphi(u)$, а також функцію $p(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння

$$(p')^2 = ap^n + bp^m, \tag{1.3}$$

a, b — ненульові дійсні числа, а n, m — раціональні числа. Невідомі функції $w(t)$ і $\varphi(u)$ визначаються з умови, що підстановка (1.2) редукує рівняння (1.1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $w(t)$. У статті вивченні властивості рівнянь (1.1), що допускають розв’язки вигляду (1.2), а також сформульовано вичерпні умови, при яких розв’язки вигляду (1.2) рівняння (1.1) виражаються через елементарні функції. Запропонований у даній статті метод побудови точних розв’язків є розвитком ідей методу анзаців [17]. Симетрійним підґрунтям даного методу є той факт, що для пошуку Q-умовних симетрій нелінійного рівняння у багатьох випадках на коефіцієнти таких симетрій потрібно накладати додаткові умови [18 – 20].

Відмітимо, що підстановка (1.2), де рівняння (1.3) має вигляд

$$(p')^2 = ap^2 + b,$$

була використана в [17] для побудови точних розв’язків нелінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = (F(u)u_x)_x + H(u).$$

Для багатьох нелінійних рівнянь ефективною є також підстановка

$$p(x) = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t), \tag{1.4}$$

яка містить три невідомі функції $w_1(t)$, $w_2(t)$ і $\varphi(u)$, а також функцію $p(x)$, яка співпадає з однією з таких функцій: $p(x) = x$, $p(x) = \exp(kx)$, $k \neq 0$. Невідомі функції визначаються з умови, що підстановка (1.4) редукує досліджуване рівняння до системи двох звичайних диференціальних рівнянь з невідомими функціями $w_1(t)$ і $w_2(t)$. Підстановка (1.4) була використана для побудови точних розв’язків нелінійного рівняння типу Кортевега – де Фріза [21], а також нелінійного рівняння теплопровідності [23]. Якщо в (1.4) з функцією $p(x) = x$ виконати перестановку $x \to t$, $t \to x$ незалежних змінних x, t, то отримаємо підстановку

$$t = w_1(t)\varphi(u) + w_2(t),$$

яка була використана в [22] для побудови точних розв’язків нелінійного хвильового рівняння

$$u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2.$$

2. Редукція рівняння (1.1) до звичайних диференціальних рівнянь.

Означення 2.1. *Будемо говорити, що рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (1.2), *якщо ця підстановка редукує рівняння* (1.1) *до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією* $w(t)$.

З’ясуємо, для яких функцій $F(u)$ рівняння (1.1) допускає підстановку (1.2). Рівняння (1.1) зберігає свій вигляд відносно лінійних перетворень $\tilde{u} = A_1u + A_2$ функції u зі сталими A_1, A_2. Згідно [1] два рівняння (1.1), що переходять одне в одне при такому перетворенні, називаються еквівалентними. Відповідно підстановки (1.2) і

$$p(x) = w(t)\varphi(A_1u + A_2)$$

називаємо еквівалентними. Класифікацію підстановок (1.2) і відповідних їм рівнянь (1.1) будемо проводити з точністю до еквівалентності.

Знаходження розв'язків рівняння (1.3) зводиться до інтегрування виразу

$$p^{-m/2}(ap^{n-m}+b)^{-1/2}dp. \tag{2.1}$$

З відомих результатів, що стосуються інтегровності біноміальних диференціалів, випливає, що біноміальний диференціал (2.1) інтегрується в елементарних функціях, якщо виконується одна з таких умов [24]: 1) $\dfrac{-n+2}{2(m-n)}$ — ціле число; 2) $\dfrac{-m+2}{2(m-n)}$ — ціле число. Отже, у випадку $m=1$ біноміальний диференціал (2.1) інтегрується в елементарних функціях, якщо

$$n=\frac{k+1}{k}, \qquad k\in\mathbb{Z}, \quad k\neq 0.$$

Наведемо розв'язки рівняння

$$(p')^2 = ap^{(k+1)/k}+bp. \tag{2.2}$$

Розв'язавши (2.2) відносно p', а далі проінтегрувавши, знаходимо

$$\int\big(ap^{(k+1)/k}+bp\big)^{-1/2}dp=\pm x+C, \tag{2.3}$$

C — стала.

Можливі два випадки.

а) k — парне число. Виконавши в (2.3) підстановку

$$ap^{-1/k}+b=\theta^2, \tag{2.4}$$

отримаємо такий розв'язок рівняння (2.2):

$$2ka^{-k/2}\int\big(\theta^2-b\big)^{(k-2)/2}d\theta=\pm x+C. \tag{2.5}$$

б) k — непарне число. Виконавши в (2.3) підстановку

$$a+bp^{-1/k}=\theta^2, \tag{2.6}$$

отримаємо такий розв'язок рівняння (2.2):

$$-2kb^{(-1+k)/2}\int\big(\theta^2-a\big)^{-(1+k)/2}d\theta=\pm x+C. \tag{2.7}$$

Інтеграл по лівій стороні кожного з розв'язків (2.5) і (2.7) є елементарною функцією від змінної θ. Таким чином, в загальному випадку функція $p(x)$, що є розв'язком рівняння (2.2), задається неявно за допомогою одного із співвідношень (2.5) і (2.7).

Для визначення невідомих функцій $\omega(t)$ і $\varphi(u)$ підставимо (1.2) в рівняння (1.1):

$$\begin{aligned}-\frac{w'}{w}\frac{\varphi}{\varphi'}&=\frac{1}{w^{2-n}}\left(\frac{an}{2}\frac{\varphi^{n-1}}{\varphi'}F-\frac{a\varphi^n\varphi''}{(\varphi')^3}F+\frac{a\varphi^n}{(\varphi')^2}F'\right)+\\&+\frac{1}{w^{2-m}}\left(\frac{bm}{2}\frac{\varphi^{m-1}}{\varphi'}F-\frac{b\varphi^m\varphi''}{(\varphi')^3}F+\frac{b\varphi^m}{(\varphi')^2}F'\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

З умови, що (2.8) повинно бути звичайним диференціальним рівнянням з невідомою функцією $w=w(t)$, отримаємо систему

$$\frac{an}{2}\frac{\varphi^{n-1}}{\varphi'}F - \frac{a\varphi^n\varphi''}{(\varphi')^3}F + \frac{a\varphi^n}{(\varphi')^2}F' = \lambda_1\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{2.9}$$

$$\frac{bm}{2}\frac{\varphi^{m-1}}{\varphi'}F - \frac{b\varphi^m\varphi''}{(\varphi')^3}F + \frac{b\varphi^m}{(\varphi')^2}F' = \lambda_2\frac{\varphi}{\varphi'}, \tag{2.10}$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Нехай

$$T = -\frac{\varphi''}{(\varphi')^3}F + \frac{1}{(\varphi')^2}F',$$

тоді з рівняння (2.9)

$$T = \frac{\lambda_1}{a}\frac{1}{\varphi^{n-1}\varphi'} - \frac{n}{2}\frac{1}{\varphi\varphi'}F. \tag{2.11}$$

З (2.10) та (2.11) випливає, що

$$F = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)}\varphi^{2-m} - \frac{2\lambda_1}{a(m-n)}\varphi^{2-n}. \tag{2.12}$$

Підставивши (2.12) в (2.9), отримаємо рівняння для визначення функції $\varphi = \varphi(u)$:

$$\sigma_2\big[-2\varphi\varphi'' + (n-2m+4)(\varphi')^2\big]\varphi^n - \sigma_1\big[2\varphi\varphi'' + (-m+2n-4)(\varphi')^2\big]\varphi^m = 0, \tag{2.13}$$

де

$$\sigma_2 = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)}, \qquad \sigma_1 = -\frac{2\lambda_1}{a(m-n)}.$$

Враховуючи (2.9), (2.10), з (2.8) знаходимо рівняння для визначення функції $w(t)$:

$$-\frac{w'}{w} = \frac{\lambda_1}{w^{2-n}} + \frac{\lambda_2}{w^{2-m}}. \tag{2.14}$$

У підсумку отримаємо таку теорему:

Теорема 2.1. *Якщо рівняння* (1.1) *допускає підстановку* (1.2), (1.3) *і* $F'(u) \neq 0$, *то функція* $F(u)$ *визначається за формулою* (2.12), *де* φ *є розв'язком рівняння* (2.13), *а функція* $w(t)$ *є розв'язком рівняння* (2.14).

Таким чином, побудова розв'язків вигляду (1.2), (1.3) рівняння (1.1) зводиться до інтегрування рівнянь (1.3), (2.13) і (2.14). Інтегрування рівняння (2.13) зводиться за допомогою підстановки $\varphi' = q(\varphi)$ до інтегрування звичайного диференціального рівняння першого порядку в квадратурах. У випадку, коли один з параметрів λ_1, λ_2 дорівнює нулю, рівняння (2.13) повністю інтегрується. Нехай, наприклад, $\lambda_1 = 0$. Рівняння (2.13) при $\lambda_1 = 0$ має вигляд

$$-2\varphi\varphi'' + [n-2m+4](\varphi')^2 = 0. \tag{2.15}$$

Проінтегрувавши рівняння (2.15), знаходимо

$$\varphi = (A_1u + A_2)^{\frac{2}{-n+2m-2}},$$

якщо $-n+2m-2 \neq 0$;

$$\varphi = \exp(A_1u + A_2),$$

якщо $-n+2m-2 = 0$, A_1, A_2 — сталі, $A_1 \neq 0$. Таким чином, з точністю до еквівалентності

$$\varphi = u^{\frac{2}{-n+2m-2}}, \tag{2.16}$$

якщо $-n+2m-2 \neq 0$;

$$\varphi = \exp u, \tag{2.17}$$

якщо $-n+2m-2=0.$

Отже, внаслідок (2.12) у випадку $\lambda_1 = 0$

$$F = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)} u^{\frac{2(2-m)}{-n+2m-2}}, \tag{2.18}$$

якщо $-n+2m-2 \neq 0;$

$$F = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)} (\exp u)^{2-m}, \tag{2.19}$$

якщо $-n+2m-2=0,$ а рівняння (1.1) має вигляд

$$u_t = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)} \varphi^{2-m} u_{xx} + \frac{2(2-m)\lambda_2}{b(m-n)} \varphi^{1-m} \varphi'(u_x)^2, \tag{2.20}$$

де φ визначається за формулами (2.16) та (2.17).

Рівняння (2.20) залежить від параметра $\sigma_2 = \dfrac{2\lambda_2}{b(m-n)}$, який може приймати довільні значення, відмінні від нуля.

Теорема 2.2. *Рівняння* (2.20) *підстановкою* $v = \varphi(u)$ *зводиться до вигляду*

$$v_t = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)} v^{2-m} v_{xx} - \frac{n\lambda_2}{b(m-n)} v^{1-m} (v_x)^2. \tag{2.21}$$

Розв'язком рівняння (2.14) при $\lambda_1 = 0$ і $m \neq 2$ є функція

$$w = \left[-\lambda_2(2-m)t + C_1\right]^{\frac{1}{2-m}}. \tag{2.22}$$

У підсумку отримуємо такі розв'язки рівнянь (2.20) та (2.21):

$$u^{\frac{2}{-n+2m-2}} = v = \left[-\lambda_2(2-m)t + C_1\right]^{\frac{1}{m-2}} p(x), \tag{2.23}$$

якщо $-n+2m-2 \neq 0,\ m \neq 2;$

$$\exp u = v = \left[-\lambda_2(2-m)t + C_1\right]^{\frac{1}{m-2}} p(x), \tag{2.24}$$

якщо $-n+2m-2=0,\ p(x)$ є розв'язком рівняння (1.3).

Наведемо приклади точних розв'язків вигляду (1.2), (1.3) для окремих частинних випадків рівняння (2.20).

I. Нехай

$$(p')^2 = ap^4 + b. \tag{2.25}$$

Рівняння (2.20) має вигляд

$$u_t = \left(\sigma_2 u^{-2/3} u_x\right)_x, \qquad \sigma_2 = -\frac{\lambda_2}{2b}. \tag{2.26}$$

Згідно з (2.23) рівняння (2.26) має розв'язки вигляду

$$u^{-1/3} = p(x)(4\sigma_2 bt + C_1)^{-1/2},$$

C_1 — стала, де $p(x)$ задовольняє рівняння (2.25). Точні розв'язки рівняння (2.25) можна виразити через еліптичні функції Якобі; широкі класи таких розв'язків наведені в [25].

II. Нехай

$$(p')^2 = ap^3 + b. \tag{2.27}$$

У цьому випадку рівняння (2.20) має вигляд

$$u_t = \left(\sigma_2 u^{-4/5} u_x\right)_x, \qquad \sigma_2 = -\frac{2\lambda_2}{3b}. \tag{2.28}$$

Згідно з (2.23) рівняння (2.28) має розв'язки виду

$$u^{-2/5} = p(x)(3\sigma_2 bt + C_1)^{-1/2},$$

де $p(x)$ задовольняє рівняння (2.27). Якщо, наприклад, $a = 4$, то розв'язком рівняння (2.27) є еліптичною функцією Веєрштрасса $\wp(x, 0, b)$, а тому рівняння (2.28) має розв'язок

$$u^{-2/5} = \wp(x, 0, b)(3\sigma_2 bt + C_1)^{-1/2}.$$

III. Нехай

$$(p')^2 = ap^2 + b. \tag{2.29}$$

Рівняння (2.20) має вигляд

$$u_t = \left(\sigma_2 u^{-1} u_x\right)_x, \qquad \sigma_2 = -\frac{\lambda_2}{b}. \tag{2.30}$$

Рівняння (2.29) має такі розв'язки:

$1^\circ)$ якщо $a > 0,\ b > 0$, то

$$p(x) = \varepsilon\sqrt{\frac{b}{a}}\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{a}(x + C_2)\right);$$

$2^\circ)$ якщо $a > 0,\ b < 0$, то

$$p(x) = \varepsilon\sqrt{-\frac{b}{a}}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{a}(x + C_2)\right);$$

$3^\circ)$ якщо $a < 0,\ b > 0$, то

$$p(x) = \varepsilon\sqrt{-\frac{b}{a}}\cos\left(\sqrt{-a}(x + C_2)\right);$$

$\varepsilon = \pm 1,\ C_2$ — стала.

Використавши (2.23), знаходимо такі розв'язки рівняння (2.30) [8]:

1) $u = \mathrm{sh}^{-2}(C_3(x + C_2))\left(2\sigma_2 C_3^2 t + C_1\right)$,

2) $u = \mathrm{ch}^{-2}(C_3(x + C_2))\left(-2\sigma_2 C_3^2 t + C_1\right)$,

3) $u = \cos^{-2}(C_3(x + C_2))\left(2\sigma_2 C_3^2 t + C_1\right)$,

де $C_1,\ C_2,\ C_3$ — довільні сталі.

Побудуємо інші класи точних розв'язків рівняння (2.30), використавши підстановку

$$p(x) = w_1(t)u^{-1} + w_2(t), \tag{2.31}$$

де $p(x)$ задовольняє рівняння (2.29). Підстановка (2.31) редукує рівняння (2.30) до системи

$$w_1 w_1' - (w_1')^2 - \sigma_2^2 ab = 0, \tag{2.32}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sigma_2 a} w_1'. \tag{2.33}$$

Розв’язки рівняння (2.32) знаходяться в результаті інтегрування рівняння

$$(w_1')^2 = C w_1^2 - \sigma_2^2 ab, \tag{2.34}$$

C — довільна стала. Проінтегрувавши рівняння (2.34), знаходимо внаслідок (2.31) та (2.33) такі розв’язки рівняння (2.30)

4) $u^{-1} = -\dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2} \dfrac{\mathrm{sh}[C_4(x+C_1)]}{\mathrm{ch}[C_3(t+C_2)]} - \dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2}\,\mathrm{th}[C_3(t+C_2)],$

5) $u^{-1} = -\dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2} \dfrac{\mathrm{ch}[C_4(x+C_1)]}{\mathrm{sh}[C_3(t+C_2)]} - \dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2}\,\mathrm{cth}[C_3(t+C_2)],$

6) $u^{-1} = -\dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2} \dfrac{\cos[C_4(x+C_1)]}{\mathrm{sh}[C_3(t+C_2)]} + \dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2}\,\mathrm{cth}[C_3(t+C_2)],$

7) $u^{-1} = -\dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2} \dfrac{\cos[C_4(x+C_1)]}{\cos[C_3(t+C_2)]} - \dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2}\,\mathrm{tg}[C_3(t+C_2)],$

8) $u^{-1} = -\dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2} \dfrac{\mathrm{ch}[C_4(x+C_1)]}{\cos[C_3(t+C_2)]} + \dfrac{C_3}{\sigma_2 C_4^2}\,\mathrm{tg}[C_3(t+C_2)],$

9) $u^{-1} = -\dfrac{1}{\sigma_2 C_3^2 (t+C_2)} (\varepsilon\,\mathrm{ch}[C_3(x+C_1)] + 1),\ \varepsilon \pm 1,$

10) $u^{-1} = \dfrac{1}{\sigma_2 C_3^2 (t+C_2)} (\varepsilon \cos[C_3(x+C_1)] + 1),\ \varepsilon \pm 1,$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі, $C_3 \neq 0$, $C_4 \neq 0$. Розв’язки 9), 10) повторюють розв’язки 1)–3). Відмітимо також, що список всіх відомих розв’язків рівняння (2.30), який включає, зокрема, розв’язки 1)–8), наведено в [2, 26].

Розглянемо більш детально рівняння (1.3). Виконавши підстановку $p_1 = p^s$, отримаємо рівняння

$$(p_1')^2 = a_1 p_1^{n_1} + b_1 p_1^{m_1}, \tag{2.35}$$

де

$$a_1 = s^2 b, \qquad b_1 = s^2 b, \tag{2.36}$$

$$n_1 = \frac{2s - 2 + n}{s}, \qquad m_1 = \frac{2s - 2 + m}{s}. \tag{2.37}$$

У випадку $s = 2 - m$ маємо $m_1 = 1$, а у випадку $s = \dfrac{2-m}{2}$ маємо $m_1 = 0$. З рівності $-n+2m-2 = 0$ випливає рівність $-n_1+2m_1-2 = 0$. Якщо $-n+2m-2 \neq 0$, то внаслідок (2.36) та (2.37) маємо

$$\frac{2(2-m)}{-n+2m-2} = \frac{2(2-m_1)}{-n_1+2m_1-2},$$

$$F = \frac{2\lambda_2}{b(m-n)} u^{\frac{2(2-m)}{-n+2m-2}} = \frac{2\tilde{\lambda}_2}{b_1(m_1-n_1)} u^{\frac{2(2-m)}{-n_1+2m_1-2}},$$

де $\tilde{\lambda}_2 = \dfrac{n-m}{n_1-m_1}\lambda_2$. Таким чином, якщо рівняння (1.1) допускає підстановку (1.2), (1.3), то воно допускає підстановку $p_1(x) = w_1(t)\varphi_1(u)$, де $p_1(x)$ є розв'язком рівняння (2.35).

Теорема 2.3. *Нехай рівняння* (1.3) *підстановкою* $p_1 = p^s$ *переводиться в рівняння* (2.35). *Тоді рівняння* (2.21) *підстановкою*

$$v = \tilde{v}^{1/s} = \tilde{v}^{\frac{2-m_1}{2-m}} \tag{2.38}$$

зводиться до рівняння

$$\tilde{v}_t = \frac{2\tilde{\lambda}_2}{b_1(m_1-n_1)}\tilde{v}^{2-m_1}\tilde{v}_{xx} - \frac{n_1\tilde{\lambda}_2}{b_1(m_1-n_1)}\tilde{v}^{1-m_1}(\tilde{v}_x)^2, \tag{2.39}$$

де $\tilde{\lambda}_2 = \dfrac{2-m}{2-m_1}\lambda_2$.

Згідно теореми для знаходження розв'язків вигляду (1.2), (1.3) рівняння (2.21) достатньо розглянути випадок $m = 1$ (або $m = 0$). Побудуємо у цьому зв'язку розв'язки вигляду (1.2) рівняння (2.21), якщо $-n + 2m - 2 = 0$. Таке рівняння має вигляд

$$v_t = \frac{2\lambda_2}{(2-m)b}v^{2-m}v_{xx} + \frac{(2-2m)\lambda_2}{(2-m)b}v^{1-m}(v_x)^2, \tag{2.40}$$

і підстановкою

$$v = \tilde{v}^{\frac{1}{2-m}} \tag{2.41}$$

зводиться до рівняння

$$\tilde{v}_t = \frac{2\tilde{\lambda}_2}{b_1}\tilde{v}\tilde{v}_{xx}, \tag{2.42}$$

де

$$\tilde{\lambda}_2 = (2-m)\lambda_2, \qquad b_1 = (2-m)^2 b, \qquad a_1 = (2-m)^2 a. \tag{2.43}$$

Розв'язком рівняння (2.42) є функція

$$\tilde{v} = p_1(x)w_1^{-1}(t), \tag{2.44}$$

де

$$(p_1)^2 = a_1 + b_1 p, \qquad w_1' = -\tilde{\lambda}_2. \tag{2.45}$$

Інтегруючи рівняння (2.45), знаходимо

$$p_1(x) = \frac{b_1}{4}(x+C_2)^2 - \frac{a_1}{b_1},$$
$$w_1 = -\tilde{\lambda}_2 t + C_1,$$

C_1, C_2 — сталі. Таким чином, функція

$$\tilde{v} = (-\tilde{\lambda}_2 t + C_1)^{-1}\left[\frac{b_1}{4}(x+C_2)^2 - \frac{a_1}{b_1}\right]$$

є розв'язок рівняння (2.42). Використовуючи співвідношення (2.41), (2.43), отримаємо розв'язок рівняння (2.40):

$$v = \tilde{v}^{\frac{1}{2-m}} = \left[-(2-m)\lambda_2 t + C_1\right]^{-\frac{1}{2-m}} \left[\frac{(2-m)^2}{4} b(x+C_2)^2 - \frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{2-m}}. \tag{2.46}$$

Поклавши в (2.46) $v = \exp u$, знаходимо розв'язок рівняння (2.20) у випадку

$$F = \frac{2\lambda_2}{(2-m)b}(\exp u)^{2-m}, \quad m \neq 2.$$

Ввівши позначення $\dfrac{2\lambda_2}{(2-m)b} = \sigma$, $\dfrac{(2-m)b}{2} = C_3$, $\lambda = 2-m$, сім'ю розв'язків (2.46) можна записати у вигляді

$$v = \exp u = (-\sigma\lambda C_3 t + C_1)^{-1/\lambda} \left[\frac{1}{2}\lambda C_3 (x+C_2)^2 + C_4\right]^{1/\lambda},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — довільні сталі [2].

3. Точні розв'язки рівняння (1.1). В пункті 2 показано, що побудова розв'язків вигляду (1.2), (1.3) рівняння (1.1) зводиться до інтегрування рівнянь (1.3), (2.13) і (2.14). У випадку, коли один з параметрів λ_1, λ_2 дорівнює нулю, наприклад, $\lambda_1 = 0$, розв'язки рівняння (1.1) отримуються з розв'язків рівняння (2.21) за допомогою підстановки $v = \varphi(u)$, де φ є розв'язком рівняння (2.13) для $\lambda_1 = 0$ і виражається за формулами (2.16) та (2.17). Проінтегруємо рівняння (2.13) при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Теорема 3.1. *Нехай у рівняння* (2.13) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, *а* m, n *є довільними раціональними числами, що задовольняють одну з таких умов*:

$1^\circ)$ $\dfrac{-n+2}{2(m-n)}$ — *ціле число*;

$2^\circ)$ $\dfrac{-m+2}{2(m-n)}$ — *ціле число.*

Тоді рівняння (2.13) *інтегрується в елементарних функціях і його розв'язками є такі функції*:

I. *Якщо* m *і* n *задовольняють умову* $1^\circ)$, *то*

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2}\left(\theta_1^2 + \sigma_2\right)^{\frac{n-2}{2(m-n)}} d\theta_1, \tag{3.1}$$

$\theta_1^2 = -\sigma_2 - \sigma_1\varphi^{m-n}$;

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2}\left(\theta_1^2 - \sigma_2\right)^{\frac{n-2}{2(m-n)}} d\theta_1, \tag{3.2}$$

$\theta_1^2 = \sigma_2 + \sigma_1\varphi^{m-n}$.

II. *Якщо* m, n *задовольняють умову* $2^\circ)$, *то*

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2}\left(\theta_1^2 + \sigma_1\right)^{\frac{m-2}{2(n-m)}} d\theta_1, \tag{3.3}$$

$\theta_1^2 = -\sigma_2\varphi^{n-m} - \sigma_1$;

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2}\left(\theta_1^2 - \sigma_1\right)^{\frac{m-2}{2(n-m)}} d\theta_1, \tag{3.4}$$

$\theta_1^2 = \sigma_2\varphi^{n-m} + \sigma_1$.

У формулах (3.1)–(3.4) A_1, A_2 — *сталі,* $A_1 \neq 0$.

Доведення. Виконавши в рівнянні (2.13) підстановку $\varphi' = q(\varphi)$ і проінтегрувавши, знаходимо

$$\varphi' = \tilde{A}_1 \varphi^{\frac{m-2n+4}{2}} \left|-\sigma_2 \varphi^{n-m} - \sigma_1\right|^{3/2}, \tag{3.5}$$

$\tilde{A}_1$ — стала, $\tilde{A}_1 \neq 0$.

Якщо $\dfrac{2-n}{2(m-n)}$ — ціле число і $-\sigma_2\varphi^{n-m} - \sigma_1 \geq 0$, то підстановка $\theta_1^2 = -\sigma_2 - \sigma_1 \varphi^{m-n}$ переводить рівняння (3.5) в рівняння

$$\theta_1^2 \left(\theta_1^2 + \sigma_2\right)^{\frac{n-2}{2(m-n)}} d\theta_1 = A_1 du,$$

де

$$A_1 = \frac{m-n}{2} (-\sigma_1)^{\frac{-n+2m-2}{2(m-n)}} \tilde{A}_1.$$

Проінтегрувавши це рівняння, знаходимо

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2} \left(\theta_1^2 + \sigma_2\right)^{\frac{n-2}{2(m-n)}} d\theta_1,$$

$A_1,\ A_2$ — сталі, $A \neq 0$.

Якщо $\dfrac{2-n}{2(m-n)}$ — ціле число і $\sigma_2 + \sigma_1 \varphi^{m-n} \geq 0$, то використавши підстановку, $\theta_1^2 = \sigma_2 + \sigma_1 \varphi^{m-n} \geq 0$, знаходимо такий розв'язок рівняння (2.13):

$$A_1 u + A_2 = \int \theta_1^{-2} \left(\theta_1^2 - \sigma_2\right)^{\frac{n-2}{2(m-n)}} d\theta_1,$$

$A_1,\ A_2$ — сталі, $A \neq 0$.

Якщо $\dfrac{2-m}{2(m-n)}$ — ціле число і $-\sigma_2 \varphi^{n-m} - \sigma_1 \geq 0$, то використовуємо підстановку $\theta_1^2 = -\sigma_2 \varphi^{n-m} - \sigma_1$, а у випадку $-\sigma_2 \varphi^{n-m} - \sigma_1 \leq 0$ — підстановку $\theta_1^2 = \sigma_2 \varphi^{n-m} + \sigma_1$.

Теорему доведено.

Внаслідок теореми 2.1 рівняння (1.1), що допускає підстановку (1.2), (1.3), має вигляд

$$u_t = \left[\frac{2\lambda_2}{b(m-n)} \varphi^{2-m} - \frac{2\lambda_1}{a(m-n)} \varphi^{2-n}\right] u_{xx} +$$
$$+ \left[\frac{2(2-m)\lambda_2}{b(m-n)} \varphi^{1-m} - \frac{2(2-n)\lambda_1}{a(m-n)} \varphi^{1-n}\right] \varphi'(u_x)^2, \tag{3.6}$$

де φ є розв'язком рівняння (2.13) і визначається однією з формул (3.1)–(3.4).

Теорема 3.2. *Рівняння* (3.6) *підстановкою* $v = \varphi(u)$ *зводиться до вигляду*

$$v_t = \left[\frac{2\lambda_2}{b(m-n)} v^{2-m} - \frac{2\lambda_1}{a(m-n)} v^{2-n}\right] v_{xx} -$$
$$- \frac{n\lambda_2}{b(m-n)} v^{1-m} (v_x)^2 + \frac{m\lambda_1}{a(m-n)} v^{1-n} (v_x)^2. \tag{3.7}$$

Оскільки рівняння (3.6) допускає підстановку (1.2), (1.3), то з теореми 3.2 випливає, що розв'язком рівняння (3.7) є функція $v = p(x) w^{-1}(t)$, де $p(x)$ є розв'язком рівняння (1.3), а $w(t)$ — розв'язком рівняння (2.14).

Розглянемо два приклади побудови точних розв'язків рівнянь (3.6) та (3.7).

III. Нехай рівняння (1.3) має вигляд

$$(p')^2 = ap^{3/2} + bp. \tag{3.8}$$

Використовуючи (3.6), знаходимо рівняння (1.1), що допускає підстановку (1.2), (3.8):

$$u_t = \left(-\frac{4\lambda_2}{b}\varphi + \frac{4\lambda_1}{a}\varphi^{1/2}\right)u_{xx} + \left(-\frac{4\lambda_2}{b} + \frac{2\lambda_1}{a}\varphi^{-1/2}\right)\varphi'(u_x)^2, \tag{3.9}$$

де φ є розв'язком рівняння (2.13) для значень $n = 3/2,\ m = 1$. Рівняння (3.9) підстановкою $v = \varphi(u)$ зводиться до вигляду

$$v_t = \left(-\frac{4\lambda_2}{b}v + \frac{4\lambda_1}{a}v^{1/2}\right)v_{xx} + \left(\frac{3\lambda_2}{b} - \frac{2\lambda_1}{a}v^{-1/2}\right)(v_x)^2. \tag{3.10}$$

Рівняння (3.9), (3.10) залежать від двох параметрів

$$\sigma_1 = \frac{4\lambda_1}{a}, \qquad \sigma_2 = -\frac{4\lambda_2}{b}, \tag{3.11}$$

які приймають довільні значення, одночасно не рівні нулю. Умова $p(x) \geq 0$ накладає обмеження на параметри $a,\ b$.

Можливі такі випадки.

1) Випадок $\sigma_1 = 0$. У цьому випадку $\lambda_1 = 0$ і внаслідок (2.16) з точністю до еквівалентності

$$\varphi = u^{-4/3}. \tag{3.12}$$

Таким чином, рівняння (3.9) має вигляд

$$u_t = \left(\sigma_2 u^{-4/3} u_x\right)_x. \tag{3.13}$$

Розв'язком рівняння (3.8) є функція

$$p^{1/2}(x) = \frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}, \tag{3.14}$$

C_2 — стала.

Рівняння (2.14) для визначення функції $w(t)$ у випадку $\lambda_1 = 0,\ m = 1$ має вигляд $w' = -\lambda_2$ і його розв'язком є $w = -\lambda_2 t + C_1,\ C_1$ — стала. Використовуючи формулу (2.23), знаходимо розв'язок рівняння (3.13):

$$u^{-4/3} = (-\lambda_2 t + C_1)^{-1}\left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2.$$

Поклавши $v = u^{-4/3}$, отримаємо розв'язок рівняння

$$v_t = \sigma_2 v v_{xx} - \frac{3}{4}\sigma_2 (v_x)^2. \tag{3.15}$$

Оскільки $\lambda_2 = -\dfrac{1}{4}\sigma_2 b$, то розв'язки рівнянь (3.13) і (3.15) записуються так:

$$u^{-4/3} = v = \left(\frac{1}{4}\sigma_2 bt + C_1\right)^{-1}\left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2. \tag{3.16}$$

У розв'язках (3.16) $a,\ b,\ C_1,\ C_2$ розглядаються як сталі, $a \neq 0,\ b \neq 0$.

2) Випадок $\sigma_2 = 0$. У цьому випадку $\lambda_2 = 0$ і з точністю до еквівалентності

$$\varphi = \exp u. \tag{3.17}$$

Таким чином, рівняння (3.9) має вигляд

$$u_t = (\sigma_1(\exp(u/2))u_x)_x. \tag{3.18}$$

Розв'язком рівняння (2.14) для значень $\sigma_2 = 0,\ n = 3/2$ є функція

$$w^{1/2}(x) = -\frac{1}{8}\sigma_1 at + C_1, \tag{3.19}$$

C_1 — стала.

Підставивши (3.14), (3.17), (3.19) у формулу (1.2), знаходимо розв'язок рівняння (3.18):

$$\exp u = \left(-\frac{1}{8}\sigma_1 at + C_1\right)^{-2}\left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2, \tag{3.20}$$

C_2 — стала. Поклавши в (3.20) $v = \exp u$, отримаємо розв'язок рівняння

$$v_t = \sigma_1 v^{1/2} v_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_1 v^{-1/2}(v_x)^2.$$

У розв'язку (3.20) $a,\ b,\ C_1,\ C_2$ розглядаються як сталі.

3) Випадок $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0$. Для рівняння (3.10) підстановка (1.2) має вигляд

$$v = \left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2 w^{-1}, \tag{3.21}$$

де $w(t)$ є розв'язком рівняння

$$w' = -\lambda_1 w^{1/2} - \lambda_2, \tag{3.22}$$

і задається неявно за допомогою співвідношення

$$\frac{2}{\lambda_1}w^{1/2} - \frac{2\lambda_2}{\lambda_1^2}\ln\left|\lambda_1 w^{1/2} + \lambda_2\right| + C_1 = -t, \tag{3.23}$$

C_1 — стала.

Виразивши в (3.23) параметри $\lambda_1,\ \lambda_2$ через параметри $\sigma_1,\ \sigma_2,\ a,\ b$ згідно формул (3.11), отримаємо співвідношення

$$\frac{8}{\sigma_1 a}w^{1/2} + \frac{8\sigma_2 b}{\sigma_1^2 a^2}\ln\left|\frac{1}{4}\sigma_1 a w^{1/2} - \frac{1}{4}\sigma_2 b\right| + C_1 = -t, \tag{3.24}$$

в якому $a,\ b,\ C_1$ розглядаються як сталі, $a \neq 0,\ b \neq 0$. Таким чином, рівняння (3.10) має розв'язок (3.21), де функція $w(t)$ задається неявно за допомогою співвідношення (3.24).

Для побудови розв'язків відповідного рівняння (3.9) необхідно визначити функцію $\varphi(u)$, яка задовольняє рівняння (2.13) для значень $n = 3/2,\ m = 1$:

$$\sigma_2\left[-2\varphi\varphi'' + \frac{7}{2}(\varphi')^2\right]\varphi^{3/2} - \sigma_1\left[2\varphi\varphi'' - 2(\varphi')^2\right]\varphi = 0. \tag{3.25}$$

Згідно теореми 3.1 (випадок II при $n = 3/2,\ m = 1$) рівняння (3.25) має з точністю до еквівалентності такі розв'язки:

$1^\circ)$ якщо $\theta_1^2 = \sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1 \geq 0,\ \sigma_1 < 0,\ \sigma_2 > 0$, то

$$u = \left(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1\right)^{-1/2} + \frac{1}{(-\sigma_1)^{1/2}} \operatorname{arctg}\left[\frac{(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1)^{1/2}}{(-\sigma_1)^{1/2}}\right]; \tag{3.26}$$

$2^\circ)$ якщо $\theta_1^2 = -\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1 \geq 0,\ \sigma_1 > 0,\ \sigma_2 < 0$, то

$$u = \left(-\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1\right)^{-1/2} + \frac{1}{\sigma_1^{1/2}} \operatorname{arctg}\left[\frac{(-\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1)^{1/2}}{\sigma_1^{1/2}}\right]; \tag{3.27}$$

$3^\circ)$ якщо $\theta_1^2 = \sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1 \geq 0,\ \sigma_1 > 0$, то

$$u = 2\left(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1\right)^{-1/2} + \frac{1}{\sigma_1^{1/2}} \ln\left|\frac{(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1)^{1/2} - \sigma_1^{1/2}}{(\sigma_2\varphi^{1/2} + \sigma_1)^{1/2} + \sigma_1^{1/2}}\right|; \tag{3.28}$$

$4^\circ)$ якщо $\theta_1^2 = -\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1 \geq 0,\ \sigma_1 < 0$, то

$$u = 2\left(-\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1\right)^{-1/2} + \frac{1}{(-\sigma_1)^{1/2}} \ln\left|\frac{(-\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1)^{1/2} - (-\sigma_1)^{1/2}}{(-\sigma_2\varphi^{1/2} - \sigma_1)^{1/2} + (-\sigma_1)^{1/2}}\right|. \tag{3.29}$$

Таким чином, якщо рівняння (1.1) допускає підстановку (1.2), (3.8), то воно має вигляд

$$u_t = \left(\sigma_1\varphi^{1/2} + \sigma_2\varphi\right)u_{xx} + \left(\frac{1}{2}\sigma_1\varphi^{-1/2} + \sigma_2\right)\varphi'(u_x)^2, \tag{3.30}$$

де φ є розв'язком рівняння (3.25) і задається неявно за допомогою одного із співвідношень (3.26)–(3.29). Точні розв'язки рівняння (3.30) отримуються з відповідних співвідношень (3.26)–(3.29), якщо в них функцію $\varphi(u)$ замінити на функцію

$$h(t,x) = \left[\frac{a}{16}(x + C_2)^2 - \frac{b}{a}\right]^2 w^{-1}, \tag{3.31}$$

де функція $w(t)$ задається неявно за допомогою співвідношення (3.24).

Так, якщо функція φ визначається за допомогою співвідношення (3.26), то відповідно рівняння (3.30) має розв'язок

$$u = \left(\sigma_2 h^{1/2} + \sigma_1\right)^{-1/2} + \frac{1}{(-\sigma_1)^{1/2}} \operatorname{arctg}\left[\frac{(\sigma_2 h^{1/2} + \sigma_1)^{1/2}}{(-\sigma_1)^{1/2}}\right],$$

де $h(t,x)$ задається формулою (3.31), а допустимі значення параметрів σ_1, σ_2 задовольняють нерівності $\sigma_1 < 0,\ \sigma_2 > 0$.

IV. Нехай

$$(p')^2 = ap^{1/2} + bp. \tag{3.32}$$

Рівняння (1.1), що допускає підстановку (1.2), (3.32), має вигляд

$$u_t = \left(\frac{4\lambda_2}{b}\varphi - \frac{4\lambda_1}{a}\varphi^{3/2}\right)u_{xx} + \left(\frac{4\lambda_2}{b} - \frac{6\lambda_1}{a}\varphi^{1/2}\right)\varphi'(u_x)^2, \tag{3.33}$$

де φ є розв’язком рівняння (2.13) для значень $n = 1/2,\ m = 1$. Рівняння (3.33) підстановкою $v = \varphi(u)$ зводиться до рівняння

$$v_t = \left(\frac{4\lambda_2}{b}v - \frac{4\lambda_1}{a}v^{3/2}\right)v_{xx} - \frac{\lambda_2}{b}(v_x)^2 + \frac{2\lambda_1}{a}v^{1/2}(v_x)^2. \tag{3.34}$$

Рівняння (3.33) і (3.34) залежать від двох параметрів

$$\sigma_1 = -\frac{4\lambda_1}{a}, \qquad \sigma_1 = \frac{4\lambda_2}{b}, \tag{3.35}$$

які можуть приймати довільні значення, одночасно не рівні нулю.

Розглянемо два випадки:

1) Випадок $\sigma_1 = 0$. У цьому випадку $\lambda_1 = 0$ і згідно з (2.16) з точністю до еквівалентності

$$\varphi = u^{-4}. \tag{3.36}$$

Таким чином, рівняння (3.33) має вигляд

$$u_t = \left(\sigma_2 u^{-4} u_x\right)_x. \tag{3.37}$$

Розв’язками рівняння (3.32) є функції

$$\frac{2(ap^{-1/2}+b)^{1/2}}{bp^{-1/2}} - \frac{2a}{(-b)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{(ap^{-1/2}+b)^{1/2}}{(-b)^{1/2}}\right] = \pm x + C_2, \tag{3.38}$$

C_2 — стала, якщо $a > 0,\ b < 0$;

$$\frac{2(ap^{-1/2}+b)^{1/2}}{bp^{-1/2}} - \frac{a}{b^{3/2}}\ln\left|\frac{(ap^{-1/2}+b)^{1/2}+b^{1/2}}{(ap^{-1/2}+b)^{1/2}-b^{1/2}}\right| = \pm x + C_2, \tag{3.39}$$

C_2 — стала, якщо $b > 0$.

Рівняння (2.14) для визначення функції $w(t)$ у випадку $\lambda_1 = 0,\ m = 1$ має вигляд $w' = -\lambda_2$ і його розв’язком є функція $w = -\lambda_2 t + C_1,\ C_1$ — стала. Використовуючи формулу (2.23), знаходимо розв’язок рівняння (3.36):

$$u^{-4} = (-\lambda_2 t + C_1)^{-1} p(x), \tag{3.40}$$

де $p(x)$ задається неявно одним із співвідношень (3.38), (3.39). Поклавши в (3.40) $v = u^{-4}$, отримаємо розв’язок рівняння:

$$v_t = \sigma_2 v v_{xx} - \frac{1}{4}\sigma_2 (v_x)^2. \tag{3.41}$$

Оскільки $\lambda_2 = \frac{1}{4}\sigma_2 b$ то розв’язок (3.40) запишеться так:

$$u^{-4} = \left(-\frac{1}{4}\sigma_2 bt + C_1\right)^{-1} p(x).$$

2) Випадок $\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0$. Для рівняння (3.34) підстановка (1.2) має вигляд

$$v = p(x)w^{-1}, \tag{3.42}$$

де $p(x)$ є розв'язок рівняння (3.32) і визначається за допомогою одного із співвідношень (3.38), (3.39), а $w(t)$ є розв'язок рівняння

$$w' = -\lambda_1 w^{-1/2} - \lambda_2$$

і задається неявно за допомогою співвідношення

$$\frac{1}{\lambda_2}w - \frac{2\lambda_1}{\lambda_2^2}w^{1/2} + \frac{2\lambda_1^2}{\lambda_2^3}\ln\left|\lambda_1 + \lambda_2 w^{1/2}\right| + C_1 = -t. \tag{3.43}$$

Виразивши в (3.43) параметри $\lambda_1,\ \lambda_2$ через параметри $\sigma_1,\ \sigma_2$ згідно формул (3.35) отримаємо співвідношення

$$\frac{4}{\sigma_2 b}w + \frac{8\sigma_1 a}{\sigma_2^2 b^2}w^{1/2} + \frac{8\sigma_1^2 a^2}{\sigma_2^3 b^3}\ln\left|-\frac{1}{4}\sigma_1 a + \frac{1}{4}\sigma_2 b w^{1/2}\right| + C_1 = -t, \tag{3.44}$$

в якому $a,\ b,\ C_1$ розглядаються як сталі, $a \neq 0,\ b \neq 0$. Таким чином, рівняння (3.34) має розв'язок (3.42), де функція $w(t)$ задається неявно за допомогою співвідношення (3.44).

Для побудови розв'язків рівняння (3.33) необхідно визначити функцію $\varphi(u)$, яка задовольняє рівняння (2.13) для значень $n = 1/2,\ m = 1$:

$$\sigma_2\left[-2\varphi\varphi'' + \frac{5}{2}(\varphi')^2\right]\varphi^{1/2} - \sigma_1\left[2\varphi\varphi'' - 4(\varphi')^2\right]\varphi = 0. \tag{3.45}$$

Згідно теореми 3.1 (випадок II при $n = 1/2,\ m = 1$) рівняння (3.45) має з точністю до еквівалентності такі розв'язки:

1°) якщо $\theta_1^2 = -\sigma_2\varphi^{-1/2} - \sigma_1 \geq 0$, то

$$u = \left(-\sigma_2\varphi^{-1/2} - \sigma_1\right)^{1/2} - \frac{\sigma_1}{(-\sigma_2\varphi^{-1/2} - \sigma_1)^{1/2}}; \tag{3.46}$$

2°) якщо $\theta_1^2 = \sigma_2\varphi^{-1/2} + \sigma_1 \geq 0$, то

$$u = \left(\sigma_2\varphi^{-1/2} + \sigma_1\right)^{1/2} + \frac{\sigma_1}{(\sigma_2\varphi^{-1/2} + \sigma_1)^{1/2}}. \tag{3.47}$$

Таким чином, якщо рівняння (1.1) допускає підстановку (1.2), (3.32), то воно має вигляд

$$u = \left(\sigma_2\varphi + \sigma_1\varphi^{3/2}\right)u_{xx} + \left(\sigma_2 + \frac{3}{2}\sigma_1\varphi^{1/2}\right)\varphi'(u_x)^2, \tag{3.48}$$

де φ є розв'язком рівняння (3.45) і задається неявно за допомогою одного із співвідношень (3.46), (3.47). Точні розв'язки рівняння (3.48) отримуються з відповідних співвідношень (3.46), (3.47), якщо в них функцію $\varphi(u)$ замінити на функцію

$$h(t,x) = p(x)w^{-1},$$

де функція $w(t)$ задається неявно за допомогою співвідношення (3.44), а функція $p(x)$ задається неявно за допомогою одного із співвідношень (3.38), (3.39).

4. Висновки. Ми описали рівняння теплопровідності (1.1), що допускають розв’язки вигляду (1.2). Такі рівняння мають вигляд

$$u_t = \left[\left(\sigma_2 \varphi^{2-m} + \sigma_1 \varphi^{2-n} \right) u_x \right]_x, \tag{4.1}$$

де σ_1, σ_2 — параметри, а φ — розв’язок диференціального рівняння (2.13). У випадку $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$ загальний розв’язок рівняння (2.13) виражається через елементарні функції, якщо відповідний біноміальний диференціал

$$p^{-m/2}(ap^{n-m} + b)^{-1/2} dp$$

інтегрується в елементарних функціях.

Таким чином, підстановка (1.2) суттєво розширює клас рівнянь (1.1), для яких можна побудувати точні розв’язки.

Якщо в рівнянні (4.1) один з параметрів σ_1, σ_2 дорівнює нулю, наприклад $\sigma_1 = 0$, то отримуємо рівняння (2.20). Крім розв’язків вигляду (1.2) рівняння (2.20) має інваріантні розв’язки [1]. Для побудови інших розв’язків рівняння (2.20) можна використати рівняння (2.21). Так, відповідне рівняння (2.21) у випадку $m = 1$ має розв’язки з узагальненим відокремленням змінних [2, 21]:

$$v = \mu_2(t)x^2 + \mu_1(t)x + \mu_0(t),$$
$$v = \mu_2(t)x^2 + \mu_1(t)x^{\frac{2}{2-n}}, \quad n \neq 2,$$

що дозволяє за допомогою підстановки $v = \varphi(u)$ знаходити розв’язки рівняння (2.20), відмінні від інваріантних розв’язків і розв’язків вигляду (1.2).

Відмітимо, що підстановка (1.2) є ефективною також для побудови точних розв’язків нелінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = (F(u)u_x)_x + H(u). \tag{4.2}$$

Має місце така теорема:

Теорема 4.1. *Якщо рівняння* (4.2) *допускає підстановку* (1.2) *і* $n \neq 2$, $m \neq 2$, *то функція* $F(u)$ *визначається за формулою* (2.12),

$$H(u) = \lambda_3 \frac{\varphi}{\varphi'}, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R},$$

де φ *є розв’язком рівняння* (2.13), *а функція* $w = w(t)$ *задовольняє рівняння*

$$\frac{w'}{w} + \lambda_1 w^{n-2} + \lambda_2 w^{m-2} + \lambda_3 = 0.$$

Література

1. Л. В. Овсянников, *Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности*, Докл. АН СССР, **125**, № 3, 492 – 495 (1959).
2. A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL (2012).

3. Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец, *К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры*, Сборник, посв. 70-летию А. Ф. Йоффе, Москва, Изв. АН СССР, 61 – 71 (1950).
4. Г. И. Баренблат, *О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде*, Прикл. математика и механика, **16**, № 1, 67 – 78 (1952).
5. А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, Москва (1987).
6. Г. А. Рудых, Э. И. Семенов, *О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком)*, Журн. вычисл. математики и мат. физики, **38**, № 6, 971 – 977 (1998).
7. D. Zwillinger, *Handbook of differential equations*, Academic Press, San Diego, Boston (1989).
8. С. Н. Аристов, *Периодические и локализованные точные решения уравнения* $h_t = \triangle \ln h$, Прикл. механика и тех. физика, **40**, № 1, 22 – 26 (1999).
9. G. W. Bluman, S. Kumei, *On the remarkable nonlinear diffusion equation* $[a(u+b)^{-2}u_x]_x - u_t = 0$, J. Math. Phys., **21**, № 5, 1019 – 1023 (1980).
10. Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, Москва (1983).
11. N. H. Ibragimov (ed.), *CRC Handbook of the Lie group to differential equations, Vol. 1*, Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws, Boca Raton, CRC Press (1994).
12. И. Ш. Ахатов, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов, *Нелокальные симметрии. Эвристический подход*, Соврем. пробл. математики, **34**, Москва, Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР, 3 – 83 (1989).
13. G. R. Philip, *General method of exact solutions of the concentration-dependent diffusion equation*, Australian J. Phys., **13**, № 1, 13 – 20 (1960).
14. P. W. Doyle, P. Vassiliou, *Separation of variables for the 1-dimensional nonlinear diffusion equation*, Int. J. Non-linear Mech., **33**, № 2, 315 – 326 (1998).
15. A. D. Polyanin, A. I. Zhurov, *Separation of variables in PDEs using nonlinear transformations: applications to reaction-diffusion type equations*, Appl. Math. Lett., **100**, 106055, 7 p. (2020).
16. A. D. Polyanin, *Functional separable solutions of nonlinear convection-diffusion equations with variable coefficients*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **73**, 379 – 390 (2019).
17. W. Fushchych, *Ansatz'95*, J. Nonlinear Math. Phys., **2**, № 3-4, 216 – 235 (1995).
18. R. Z. Zhdanov, V. I. Lahno, *Conditional symmetry of a porous medium equation*, Phys. D, **122**, 178 – 186 (1998).
19. M. Kunzinger, R. O. Popovych, *Singular reduction operators in two dimensions*, J. Phys. A, **41**, 505201, 24 pp. (2008); arXiv:0808.3577.
20. V. M. Boyko, M. Kunzinger, R. O. Popovych, *Singular reduction modules of differential equations*, J. Math. Phys., **57**, 101503, 34 pp. (2016), arXiv:1201.3223.
21. A. F. Barannyk, T. A. Barannyk, I. I. Yuryk, *Separation of variables for nonlinear equations of hyperbolic and Korteweg – de Vries type*, Rep. Math. Phys., **68**, № 1, 92 – 105 (2011).
22. A. F. Barannyk, T. A. Barannyk, I. I. Yuryk, *Generalized separation of variables for nonlinear equation* $u_{tt} = F(u)u_{xx} + aF'(u)u_x^2$, Rep. Math. Phys., **71**, № 1, 1 – 13 (2013).
23. A. F. Barannyk, T. A. Barannyk, I. I. Yuryk, *A Method for the construction of exact solutions to the nonlinear heat equation* $u_t = (F(u)u_x)_x + G(u)u_x + H(u)$, Ukr. Math. J., **71**, № 11, 1443 – 1454 (2019).
24. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. II, Физматгиз, Москва (1959).
25. A. G. Nikitin, T. A. Barannyk, *Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations*, Cent. Eur. J. Math., **2**, № 5, 840 – 858 (2004).
26. R. O. Popovych, O. O. Vaneeva, N. M. Ivanova, *Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation*, Phys. Lett. A, **362**, 166 – 173 (2007); arXiv:math-ph/0506067.

Одержано 01.04.21