DOI: 10.37863/umzh.v74i3.7035

УДК 517.9

І. Єгорченко (Ін-т математики НАН України, Київ),
А. Воробйова (Чорномор. нац. ун-т ім. П. Могили, Миколаїв)

УМОВНІ ТА ПРИХОВАНІ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНІ СИМЕТРІЇ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ

We consider conditional and hidden symmetry of multidimensional wave equations that are generated by additional conditions. An additional condition that corresponds to the dilation operator generates an infinite-dimensional symmetry for the wave equation.

Розглянуто умовну та приховану симетрії багатовимірних хвильових рівнянь, які породжуються додатковими умовами. Додаткова умова, яка відповідає оператору ділатації, породжує нескінченновимірну умовну симетрію для хвильового рівняння.

1. Основні поняття. В роботі [1] ми розглядали приклад нескінченновимірної симетрії, де коефіцієнти операторів симетрії включають довільні функції, яка виникає як умовна/прихована симетрія хвильового рівняння Клейна – Гордона

$$\Box u = F(x, u) \tag{1}$$

для дійсної функції $u = u(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_0 = t$ — це часова змінна, x_0, x_1, x_2,…,x_n — відповідні просторові змінні. Ми розглядали рівняння в багатовимірному просторі, тобто $n \neq 1$. Для позначення оператора д'Аламбера використовується символ $\Box u$, де

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \ldots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Таке загальне рівняння (1) використовується досить часто для побудови математичних моделей хвильових процесів. Проте, воно не є інваріантним відносно будь-яких операторів, якщо функція в правій частині явно залежить від всіх своїх змінних. Деякі рівняння в цьому класі мають досить широкі алгебри симетрії (див., наприклад, [2]).

В цій роботі ми аналізуємо та розширюємо результати роботи [1].

Якщо $F = F(u)$ (тобто не залежить від x), максимальною алгеброю ліївської симетрії рівняння (1) буде алгебра Пуанкаре $AP(1, n)$ в просторі з n просторовими змінними, яка може бути описана базисними операторами

$$p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \qquad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$

де μ, ν приймають значення $0,\ 1,\ 2, \ldots, n$; і ми завжди, якщо не зазначене інше, вважаємо, що відбувається підсумовування за індексами, що повторюються — для малих грецьких літер:

$$x_\nu x_\nu = x_\nu x^\nu = x^\nu x_\nu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2,$$

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, \ldots, -1),$$

для малих латинських літер:

$$x_k x_k = x_k x^k = x^k x_k = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Алгебри інваріантності для рівняння (1) в часткових випадках включатимуть також оператори ділатації, якщо $F = \lambda u^k$ або $F = \lambda \exp u$, та конформні оператори для $F = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}$.

Для ще одного часткового випадку максимальна алгебра інваріантності для рівняння (1) з $F = F(x^2, u)$ $(x^2 = x_\nu x_\nu)$ є підалгеброю алгебри Пуанкаре $AP(1,n)$ з базисними операторами - поворотами алгебри Лоренца $J_{\mu\nu}$.

Класична ліївська симетрія лінійного рівняння (1) з $F = 0$ та нелінійного $F = \lambda \exp u$, $n = 1$ буде нескінченновимірною. Рівняння з нескінченновимірною симетрією є досить цікавими, тому що мають широкі класи точних розв'язків та можуть бути інтегровними.

Процедура симетрійної редукції [2 – 5] відносно нееквівалентних підалгебр алгебри інваріантності рівняння (1) дозволяє знайти симетрійні точні розв'язки для цього рівняння.

Ми будемо використовувати наступні означення, які стосуються умовної симетрії:

Означення 1. *Рівняння* $\Phi(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l}{u}) = 0$, *де* $\underset{k}{u}$ — *набір всіх частинних похідних порядку* k *функції* $u = (u^1, u^2, \ldots, u^m)$, *називається умовно інваріантним* [4] *відносно оператора*

$$Q = \xi^i(x,u)\partial_{x_i} + \eta^r(x,u)\partial_{u^r},$$

якщо існує додаткова умова

$$G\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{l_1}{u}\right) = 0, \tag{2}$$

така, що система з двох рівнянь $\Phi = 0$, $G = O$ *інваріантна відносно оператора* Q.

Якщо (2) має форму $G = Qu$, тоді ми маємо частковий випадок умовної симетрії, а саме Q-умовну симетрію. Рівняння $\Phi = 0$ буде тоді називатись Q-умовно інваріантним відносно оператора Q [4].

Це означення умовної інваріантності певного рівняння, або системи рівнянь базується фактично на тому, що є класичною ліївською симетрією (див. наприклад, класичні монографії [12 – 14]) того самого рівняння з якоюсь додатковою умовою.

Поняття умовної симетрії (хоча різні автори могли використовувати різні терміни, наприклад, неліївська, некласична, слабка симетрія) було запроваджене та розглядалось в багатьох роботах - кілька авторів незалежно досліджували це поняття: [6 – 10], і пізніше ще багато авторів розвинули це поняття у теорію та деякі алгоритми для дослідження симетрійних властивостей рівнянь математичної фізики та для побудови точних розв'язків (див., наприклад, [11]).

Пояснимо суттєву різницю між поняттями Q-умовної симетрії, та просто умовної симетрії, яка не є Q-умовною: Q-умовна симетрія забезпечує можливості для редукції вихідного рівняння та знаходження розв'язків, аналогічні можливостям та властивостям звичайної ліївської симетрії: виникає можливість редукувати вихідне рівняння до одного нового рівняння з меншим числом незалежних змінних, на основі розв'язків можна побудувати за допомогою відповідного анзацу розв'язки вихідного диференціального рівняння. На відміну від цього, анзац, побудований за допомогою оператора умовної симетрії, який не є оператором Q-умовної симетрії, редукуватиме вихідну систему рівнянь з додатковою умовою $\Phi = 0,\ G = O$ до двох редукованих рівнянь з меншим числом незалежних змінних.

Умовні симетрії саме хвильового рівняння розглянуті, наприклад, в роботах [15 – 17]. Зазначимо, що систематичне дослідження умовних, і зокрема, Q-умовних симетрій для хвильових (квазігіперболічних) рівнянь, є суттєво складнішим, ніж таке дослідження для квазіпараболічних (еволюційних) рівнянь.

В роботах [18 – 20] проведена класифікація ліївських, умовних та узагальнених симетрій рівняння Клейна – Гордона в двовимірному просторі (для однієї просторової змінної).

Означення 2. *Рівняння має приховану Q-умовну симетрію, якщо редуковане рівняння має нову Q-умовну симетрію відносно певної додаткової умови.*

Це означення було сформульоване в [21] на основі означення прихованої симетрії II типу для рівнянь в частинних похідних [22].

Алгоритм систематичного опису рівнянь, які мають задану Q-умовну, приховану та приховану Q-умовну, запропонований в роботі [23].

2. Умовна симетрія хвильового рівняння, яка не є Q-умовною симетрією. Переважна більшість робіт, присвячених умовній симетрії диференціальних рівнянь в частинних похідних, надає приклади Q-умовної симетрії. Ми розглядаємо приклади умовної симетрії рівняння (1), яка не є Q-умовною. Саме Q-умовна симетрія має визначну властивість, доведену в роботі [11]) — яку можна описово сформулювати так наявність Q-умовної симетрії за певних умов (системи в інволюції) еквівалентна можливості редукувати рівняння за допомогою анзацу, який відповідає цій симетрії.

Теорема 1. *Рівняння* (1), $F = x_0^{-2} F_1\left(\dfrac{x_a}{x_0}, u x_0^{-\alpha}\right)$, *де* x_a — *просторові змінні*, $a = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$ *з додатковою умовою*

$$x_\mu u_\mu + \alpha u = 0, \tag{3}$$

де $\alpha \neq 0$, *має максимальну алгебру симетрії, яка визначається операторами*

$$X = \left(-\frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}} x_\mu \int \Phi_u u^{\frac{1}{\alpha}-1} du + d x_\mu\right) p_{x_\mu} + \Phi \partial_u, \tag{4}$$

де $\Phi = \Phi\big(u, u^{\frac{1}{\alpha}} x_\mu\big)$ — *довільна функція своїх аргументів.*

Позначення ∂_u використовується для скороченого запису оператора $\dfrac{\partial}{\partial u}$.

$\alpha = 1$ не є спеціальним випадком, проте саме для такого значення α оператор (4) матиме більш просту форму

$$X = (-u x_\mu \Phi + d x_\mu) p_{x_\mu} + \Phi \partial_u, \quad \Phi = \Phi(u, x_\mu) \tag{5}$$

Якщо $\alpha = 0$, відповідна максимальна алгебра інваріантності породжується оператором

$$X = x_0 \phi^\mu \left(\frac{x_a}{x_0}, u\right) p_{x_\mu} + \psi \left(\frac{x_a}{x_0}, u\right) \partial_u, \tag{6}$$

де ϕ^μ, ψ — довільні функції своїх аргументів.

Додаткова умова (3) може бути представлена як $Du = 0$, де D — оператор ділатації

$$D = x_\mu \partial_\mu + i\alpha u \partial_u. \tag{7}$$

Рівняння (3) має загальний розв'язок

$$u = x_0^\alpha \phi\left(\frac{x_a}{x_0}\right), \tag{8}$$

де ϕ — довільна функція.

Якщо ми застосуємо анзац (8), де $\omega_a = \dfrac{x_a}{x_0}$, до лінійного хвильового рівняння

$$\Box u = 0, \tag{9}$$

ми отримаємо редуковане рівняння

$$(1 + 2\alpha)\omega_a \phi_{\omega_a} + \omega_a \omega_b \phi_{\omega_a \omega_b} + \alpha(\alpha + 1)\phi - \phi_{\omega_a \omega_a} = 0. \tag{10}$$

Анзац (8) породжується оператором ділатації (7), який є оператором класичної ліївської симетрії рівняння (9).

В роботі [1] ми знайшли деякі часткові розв'язки рівняння (10). Анзац $\phi = \phi(\omega)$, де $\omega = m_a \omega_a$, m_a — параметри, для яких виконується умова $m_a m_a = 1$, ми отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$(1 + 2\alpha)\omega\phi' + (\omega^2 - 1)\phi'' + \alpha(\alpha + 1)\phi = 0. \tag{11}$$

Його розв'язок для $\alpha = 0$ —

$$\phi = c_1 \ln|\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}| + c_2,$$

для $\alpha = -1$ —

$$\phi = c_1 \left(\frac{\omega}{2}\sqrt{\omega^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}|\right) + c_2.$$

Якщо $\phi = \phi(\omega)$, $\omega = \omega_a \omega_a$, $\alpha = 0$, тоді розв'язок (10) матиме вигляд

$$\phi = \int \omega^{-\frac{n}{2}} (\omega - 1)^{-\frac{n}{2} - 1} d\omega.$$

Аналогічно можна отримати редуковані рівняння для початкового рівняння (1) з довільною нелінійністю, хоча точні розв'язки для цих рівнянь буде отримати набагато складніше.

Ми отримали розв'язки, які не є новими - це класичні симетрійні розв'язки рівняння, отримані за допомогою симетрійних анзаців. Проте, знайдена умовна нескінченновимірна симетрія дозволяє розмноження цих розв'язків та отримання нових, які вже не будуть класичними ліївськими розв'язками.

Умовні симетрії (4) та (6) можна розглядати як приклади прихованої симетрії рівняння (9) — це нові симетрії редукованого рівняння (10) за умови $\alpha \neq 0$ або $\alpha = 0$, які не є симетріями початкового рівняння.

3. Умовна симетрія лінійного хвильового рівняння, яка дає антиредукцію. Далі ми наведемо приклад анзацу та розв'язків для лінійного хвильового рівняння (9) з іншою додатковою умовою

$$x_\mu x_\nu u_{\mu\nu} + \alpha x_\mu u_\mu = 0. \tag{12}$$

Цю умову можна розглядати як диференціальний наслідок умови типу (3).

Ця нова умова (12) породжує наступний анзац для (9):

$$u = x_0^{1-\alpha}\psi\left(\frac{x_a}{x_0}\right) + \phi\left(\frac{x_a}{x_0}\right) f(x_0), \tag{13}$$

де $f(x_0) = \ln x_0$ для $\alpha = 1$, або $f(x_0) = 1$ для $\alpha \neq 1$.

Анзац (13) породжує антиредукцію [24], тобто для одного початкового рівняння дає систему двох редукованих рівнянь виду

$$\begin{gathered} 2\omega_a\phi_{\omega_a} + \omega_a\omega_b\phi_{\omega_a\omega_b} - \phi_{\omega_a\omega_a} = 0, \\ \alpha(\alpha-1)\psi + 2\alpha\omega_a\psi_{\omega_a} + \omega_a\omega_b\psi_{\omega_a\omega_b} - \psi_{\omega_a\omega_a} = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

для $\alpha \neq 1$, та

$$\begin{gathered} 2\omega_a\phi_{\omega_a} + \omega_a\omega_b\phi_{\omega_a\omega_b} - \phi_{\omega_a\omega_a} = 0, \\ \alpha\omega_a\psi_{\omega_a} + \omega_a\omega_b\psi_{\omega_a\omega_b} - \psi_{\omega_a\omega_a} - \phi - 2\omega_a\phi_{\omega_a} = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

для $\alpha = 1$.

Наведемо часткові розв'язки цих редукованих рівнянь, де $\phi = \phi(\omega)$, $\omega = m_a\omega_a$, m_a — параметри, для яких виконується умова $m_a m_a = 1$.

Для (14) це

$$\phi = c_1 \ln\frac{\omega-1}{\omega+1},$$
$$\psi = c_3 \int \frac{d\omega}{(\omega^2-1)^\alpha},$$

для (15) це

$$\phi = c_1 \ln\frac{\omega-1}{\omega+1},$$
$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\omega^2-1}}\left\{c_2 \ln|\omega+\sqrt{\omega^2-1}| - 2\frac{c_1}{\sqrt{\omega^2-1}} + c_1\int\frac{1}{\sqrt{\omega^2-1}}\ln|\omega+\sqrt{\omega^2-1}|d\omega\right\}.$$

Підстановка знайдених розв'язків редукованих рівнянь до анзацу (13) дасть точні розв'язки рівняння (9).

Розглянемо застосування анзацу (13) до загального рівняння (1). Підстановка анзацу (13) в це рівняння призводить до висновку, що редукція можлива лише для лінійного рівняння (функція F має залежати від u лише лінійно):

$$F = x_0^{-2} u f(\omega_a).$$

4. Висновки. Система з хвильового рівняння та додаткової умови — породженої оператором ділатації або диференціального наслідку такої умови — має нові цікаві симетрії, яких не має початкове рівняння.

Подальші дослідження можуть включати застосування розглянутих в цій роботі додаткових умов та анзаців до інших хвильових рівнянь, що включають диференціальні інваріанти алгебри Пуанкаре (проте, можуть не бути інваріантними відносно цієї алгебри). Редукція таких рівнянь за допомогою цих анзаців може давати нові симетрії та точні розв'язки.

Може бути цікавим також систематичне дослідження інших рівнянь, які мають симетрійні властивості, аналогічні описані в цій роботі. Для такого дослідження можна використати алгоритм опису рівнянь з заданою умовною та прихованою симетрією [23].

Література

1. I. A. Yehorchenko, A. I. Vorobyova, *Infinite-dimensional symmetry for wave equation with additional condition*, arXiv:0910. 2380.
2. W. I. Fushchych, N. I. Serov, *The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations*, J. Phys. A, **16**, 3645 – 3658 (1983); https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/15/030.
3. M. Tajiri, *Some remarks on similarity and soliton solutions of nonlinear Klein – Gordon equations*, J. Phys. Soc. Japan, **53**, 3759 – 3764 (1984); https://doi.org/10.1143/JPSJ.53.3759.
4. В. И. Фущич, В. М. Штелень, Н. И. Серов, *Симетрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*, Наук. думка, Київ (1989).
5. В. І. Фущич, А. Ф. Баранник, *Про точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера в просторі Мінковського* $R(1, n)$, Допов. НАН України, Сер. А, № 6, 31 – 34 (1990).
6. P. J. Olver, P. Rosenau, *The construction of special solutions to partial differential equations*, Phys. Lett. A, **114**, 107 – 112 (1986); https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90534-7.
7. W. I. Fushchych, I. M. Tsyfra, *On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry*, J. Phys. A, **20**, L45 – L48 (1987); https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/2/001.
8. W. I. Fushchych, R. Z. Zhdanov, *Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations*, Phys. Rep., **172**, 123 – 174 (1989); https://doi.org/10.1016/0370-1573(89)90090-2.
9. P. Clarkson, M. D. Kruskal, *New similarity reductions of the Boussinesq equation*, J. Math. Phys., **30**, 2201 – 2213 (1989); https://doi.org/10.1063/1. 528613.
10. D. Levi, P. Winternitz, *Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation*, J. Phys. A, **22**, 2915 – 2924 (1989); https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/15/010.
11. R. Z. Zhdanov, I. M. Tsyfra, R. O. Popovych, *A precise definition of reduction of partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **238**, , № 1, 101 – 123 (1999); https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6511.
12. L. V. Ovsyannikov, *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York (1982).
13. P. J. Olver, *Application of Lie groups to differential equations*, Springer Verlag, New York (1987).
14. G. W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and differential equations*, Springer Verlag, New York (1989).
15. І. А. Єгорченко, А. І. Воробйова, *Умовна інваріантність та точні розв'язки рівняння Клейна – Гордона – Фока*, Допов. НАН України, № 3, 19 – 22 (1992).
16. В. И. Фущич, Н. И. Серов, *Условная инвариантность нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Борна – Инфельда и Монжа – Ампера относительно конформной алгебры*, Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики, АН УРСР, Ін-т математики, Київ, 98 – 102 (1988).
17. A. F. Barannyk, Yu. D. Moskalenko, *Conditional symmetry and exact solutions of the multidimensional nonlinear d'Alembert equation*, J. Nonlinear Math. Phys., **3** 336 – 340 (1996); https://doi.org/10.2991/jnmp.1996.3.3-4.11.
18. V. Lahno, R. Zhdanov, O. Magda, *Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations*, Acta Appl. Math., **91**, 253 (2006); https://doi.org/10.1007/s10440-006-9039-0.
19. V. M. Boyko, O. V. Lokaziuk, R. O. Popovych, *Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of* (1+1)*-dimensional generalized nonlinear Klein – Gordon equations*, Anal. Math. Phys., **11**, 127 (2021); https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z.

20. S. Opanasenko, R. Popovych, *Generalized symmetries and conservation laws of* $(1+1)$*-dimensional Klein – Gordon equation*, J. Math. Phys., **61**, 101515 (2020); https://doi.org/10.1063/5.0003304.
21. I. A. Yehorchenko, *Group classification with respect to hidden symmetry*, Proceedings of Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (June 23 – 29, 2003, Kyiv), Eds A. G. Nikitin, V. M. Boyko, R. O. Popovych, and I. A. Yehorchenko, Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv, **50**, Pt 1, 290 – 297 (2004).
22. B. Abraham-Shrauner, *Hidden symmetries and nonlocal group generators for ordinary differential equations*, IMA J. Appl. Math., **56**, 235 – 252 (1996); https://doi.org/10.1093/imamat/56.3.235.
23. I. A. Yehorchenko, *Differential invariants, hidden and conditional symmetry*, Ukr. Mat. Zh., **73**, № 8, 1023 – 1033 (2021), doi:10.37863/umzh.v73i8.6377.
24. W. I. Fushchych, R. Z. Zhdanov, *Antireduction and exact solutions of nonlinear heat equations*, J. Nonlin. Math. Phys., **1**, 60—64 (1994); https://doi.org/10.2991/jnmp.1994.1.1.4.

Одержано 09.12.21