DOI: 10.37863/umzh.v74i3.7007

УДК 517.9

В. Жешут (Ун-т науки і техніки AGH, фак. прикл. математики, Краків, Польща),
І. М. Цифра (Ун-т науки і техніки AGH, фак. прикл. математики, Краків, Польща;
Ін-т геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, Київ, Україна),
В. А. Владіміров (Ун-т науки і техніки AGH, фак. прикл. математики, Краків, Польща)

СИМЕТРІЯ ЛІ – БЕКЛУНДА, РЕДУКЦІЯ І РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

We study the symmetry reduction of nonlinear partial differential equations which are used for describing diffusion processes in a nonhomogeneous medium. We find ansatzes reducing partial differential equations to systems of ordinary differential equations. The ansatzes are constructed by using operators of Lie – Bäcklund symmetry of the third order ordinary differential equation. The method gives a possibility to find solutions which can not be obtained by virtue of the classical Lie method. Such solutions were constructed for nonlinear diffusion equations which are invariant with respect to one-parameter, two-parameter, and three-parameter Lie groups of point transformations.

Вивчається симетрійна редукція нелінійних рівнянь, що використовуються для опису дифузійних процесів в неоднорідних середовищах. Знаходяться анзаци, які редукують рівняння з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь. Ці анзаци будуються з використанням операторів Лі – Беклунда симетрії звичайних диференціальних рівнянь третього порядку. Метод дає можливість знайти розв'язки, які не можна отримати класичним методом С. Лі. Такі розв'язки знайдено для нелінійних дифузійних рівнянь, які є інваріантними відносно однопараметричної, двопараметричної і трипараметричної групи Лі точкових перетворень.

1. Вступ. Відомо, що метод класичної [1] і некласичної (умовної) симетрії [2 – 5] є ефективним при пошуку точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому знаходяться спеціальні анзаци, які є загальною формою інваріантного або умовно-інваріантного розв'язку, що редукують вихідне рівняння з частинними похідними до рівняння з меншим числом незалежних змінних, зокрема, до звичайного диференціального рівняння. В роботах [6, 7] запропоновано метод умовної симетрії Лі – Беклунда еволюційних рівнянь з двома незалежними змінними. В рамках цього підходу рівняння з частинними похідними еволюційного типу редукується до системи звичайних диференціальних рівнянь. Застосування цього методу до нелінійних дифузійних рівнянь можна знайти, наприклад, в [8]. Зв'язок між узагальненою умовною симетрією еволюційних рівнянь і сумісністю системи рівнянь вивчається в [11]. В роботі [9] запропоновано метод редукції нелінійних еволюційних рівнянь до системи звичайних диференціальних рівнянь, що базується на симетрії Лі – Беклунда звичайних лінійних однорідних рівнянь і дає теоретико-групове обґрунтування методу „нелінійного відокремлення змінних".

У цій роботі ми використовуємо метод запропонований в [10], який можна трактувати як узагальнення методу Свірщевського. Він базується на симетрії Лі – Беклунда звичайних диференціальних рівнянь, які не обов'язково мають бути лінійними і однорідними і, в загальному випадку, є нелінійними. Крім того цей метод можна застосовувати не тільки до еволюційних рівнянь, а й, взагалі кажучи, до довільного рівняння з частинними похідними, а також допускає узагальнення на багатовимірні випадки [13, 14].

Ми покажемо ефективність застосування цього методу на прикладі рівняння, що описує процеси нелінійної дифузії в неоднорідних середовищах.

© В. ЖЕШУТ, І. М. ЦИФРА, В. А. ВЛАДІМІРОВ, 2022

2. Застосування методу з використанням звичайних диференціальних рівнянь третього порядку. Будемо розглядати звичайне диференціальне рівняння третього порядку

$$u_{xxx} - U(x, u, u_x, u_{xx}) = 0, \tag{1}$$

де $u(t, x)$ є функцією незалежної змінної x і змінної t, яку в даному випадку можна інтерпретувати як параметричну змінну. Функцію U будемо шукати у вигляді

$$U = \sum_{j_0, j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} a_{j_0, j_1, j_2}(x)\, u^{j_0}\, u_x^{j_1}\, u_{xx}^{j_2}.$$

де $a_{j_0,j_1,j_2}(x)$ є гладкими функціями, які мають бути визначеними. Ми вимагаємо, щоб рівняння (1) допускало оператор симетрії Лі – Беклунда $X = F(x, u, u_x, u_{xx})\partial_u$, де F є правою частиною еволюційного рівняння

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}). \tag{2}$$

В даній статті ефективність методу ілюструється на прикладі рівняння дифузійного типу

$$u_t = \left(\frac{H(x)}{u}\right)_{xx} + \eta(x, u, u_x). \tag{3}$$

Ми обмежимось розглядом функції H такого вигляду $H(x) = \dfrac{1}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$, де C_1, C_2, $C_0 \in R$ є дійсними сталими. Зауважимо, що якщо взяти $C_1 = C_2 = 0$, $C_0 = -1$, $\eta = 0$, то з рівняння (3) отримуємо добре відоме нелінійне диференціальне рівняння зі змінним коефіцієнтом теплопровідності, яке описує нелінійні дифузійні процеси і використовується в задачах фізики плазми, фізики твердого тіла і багатьох інших прикладних задачах. Це рівняння має нескінчену симетрію Лі – Беклунда і за допомогою певного відображення зводиться до лінійного рівняння теплопровідності.

Критерій інваріантності для рівняння (1) має вигляд

$$X^{(3)}\big(u_{xxx} - U(x, u, u_x, u_{xx})\big)\Big|_{u_{xxx}=U} = 0, \tag{4}$$

де $X^{(3)}$ є продовженням третього порядку оператора симетрії Лі – Беклунда X. Процес знаходження функції U є досить громіздким і не наводиться в даній статті. Ми тільки подаємо отриманий результат в наступному твердженні.

Твердження 1. *Рівняння* (1) *допускає оператор симетрії Лі – Беклунда* $X = \left(\dfrac{H(x)}{u}\right)_{xx}\partial_u$, *де* $H(x) = \dfrac{1}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$, *якщо воно має вигляд*

$$u_{xxx} = 9\frac{u_{xx}u_x}{u} - 12\frac{u_x^3}{u^2} + \frac{6(2C_2x + C_1)}{C_2x^2 + C_1x + C_0}u_{xx} - \frac{18(2C_2x + C_1)}{C_2x^2 + C_1x + C_0}\frac{u_x^2}{u} -$$
$$- \frac{6(10C_2^2x^2 + 10C_1x - 2C_0C_2 + 3C_1^2)}{(C_2x^2 + C_1x + C_0)^2}u_x - \frac{6(2C_2x + C_1)(5C_2^2x^2 + 5C_1x - 3C_0C_2 + 2C_1^2)}{(C_2x^2 + C_1x + C_0)^3}u,$$

а $C_1, C_2, C_0 \in R$ *є дійсними сталими.*

2.1. Як знайти розв'язки рівняння $\boldsymbol{u_t = \left(\dfrac{H(x)}{u}\right)_{xx} + \eta(x, u, u_x)}$***?*** Використовуємо властивість редукції рівняння

$$u_t = \left(\frac{H(x)}{u}\right)_{xx}, \tag{5}$$

коли $H(x) = \dfrac{1}{C_2x^2 + C_1x + C_0}$ до системи трьох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку за допомогою анзацу, який є загальним розв'язком звичайного диференціального рівняння третього порядку з твердження 1. Очевидним є той факт, що якщо ми візьмемо оператор контактної симетрії цього звичайного диференціального рівняння $X = \eta(x, u, u_x)\partial_u$, записаний в формі Лі–Беклунда, то рівняння (3) також буде редукуватись до системи трьох звичайних диференціальних рівнянь за допомогою того ж самого анзацу, тобто властивість редукції модифікованого рівняння зберігається.

Розглянемо кілька часткових випадків з твердження 1.

Нехай $C_2 = C_0 = 0$, $C_1 \neq 0$. Тоді можна взяти $H(x) = \dfrac{\kappa}{x}$, $\kappa = \mathrm{const}$. Тоді звичайне диференціальне рівняння, яке генерує анзац, має вигляд

$$u_{xxx} = 9\frac{u_{xx}u_x}{u} - 12\frac{u_x^3}{u^2} + \frac{6}{x}u_{xx} - \frac{18}{x}\frac{u_x^2}{u} - \frac{18}{x^2}u_x - \frac{12}{x^3}u. \tag{6}$$

Його розв'язок задається формулою

$$u(x) = \pm\frac{1}{x\sqrt{\varphi_2x^2 + \varphi_1x + \varphi_0}}, \tag{7}$$

де φ_1, φ_2, φ_3 є довільними функціями змінної t. Водночас алгебра Лі групи Лі контактних перетворень, що є групою симетрії рівняння (6), можна задати базисними елементами:

$$X_1 = u\partial_u, \qquad X_2 = xu_x\partial_u, \qquad X_3 = x^2u^3\partial_u, \qquad X_4 = x^3u^3\partial_u, \qquad X_5 = x^4u^3\partial_u, \tag{8}$$

$$X_6 = \left(\frac{u}{x} + u_x\right)\partial_u, \qquad X_7 = (2xu + x^2u_x)\partial_u, \tag{9}$$

$$X_8 = \frac{x^2u_x^2 + 4xuu_x + 4u^2}{x^2u^3}\partial_u, \quad X_9 = \frac{x^2u_x^2 + 3xuu_x + 2u^2}{x^3u^3}\partial_u, \quad X_{10} = \frac{x^2u_x^2 + 2xuu_x + u^2}{x^4u^3}\partial_u. \tag{10}$$

Отже, метод редукції можна застосувати до довільного рівняння з класу

$$u_t = \left(\frac{\kappa}{xu}\right)_{xx} + \sum_{i=1}^{10} a_iX_iu, \qquad a_i = \mathrm{const}, \quad i = 1, \ldots, 10.$$

Модифікуємо вихідне рівняння, додаючи члени, що містять похідні порядку меншого ніж два. В даній статті будемо розглядати тільки характеристики операторів точкової симетрії. Отже, розглянемо рівняння

$$u_t = \left(\frac{\kappa}{xu}\right)_{xx} + a_1u + a_2xu_x + a_4(xu)^3, \quad \kappa, a_i \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

При $\kappa \neq 0$ і довільних $a_1, a_2, a_4 \in \mathbb{R}$ це рівняння допускає двовимірну алгебру Лі з базисними елементами

$$X_1 = \partial_t,$$

$$X_2 = 2x\partial_x - 3u\partial_u,$$

причому ця алгебра є максимальною в даному випадку, тобто алгеброю Лі повної групи симетрії рівняння (11). Надалі в тексті, коли розглядатимемо групу точкових перетворень симетрії дифузійного рівняння будемо мати на увазі саме повну групу (тобто максимальну алгебру Лі) і не будемо весь час це повторювати.

Якщо $2a_1 \neq 3a_2,\ a_4 = 0$, то рівняння допускає додатковий оператор

$$X_3 = e^{(2a_1-3a_2)t}\big(-a_2x\partial_x + \partial_t + a_1u\partial_u\big),$$

а якщо виконуються умови $2a_1 = 3a_2,\ a_4 = 0$, то рівняння допускає додатковий оператор такого вигляду

$$X_3' = -a_2x\partial_x + t\partial_t + \left(a_1t + \frac{1}{2}\right)u\partial_u.$$

Анзац (7) редукує рівняння (11) до системи трьох звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_2' + 2(a_1 - 2a_2)\varphi_2 = 0,$$
$$\varphi_0' + 2(a_1 - a_2)\varphi_0 = 0,$$
$$\varphi_1' - \frac{1}{2}\kappa\varphi_1^2 + 2\kappa\varphi_0\varphi_2 + 2\left(a_1 - \frac{3}{2}a_2\right)\varphi_1 + 2a_4 = 0.$$

Якщо $2a_1 \neq 3a_2,\ a_4 = 0$, то ми одержуємо розв'язки системи редукованих рівнянь:

$$u(x,t) =$$
$$= \pm\frac{1}{x\sqrt{c_2e^{2(2a_2-a_1)t}x^2 + 2A(t)\dfrac{c_3\cos\left(\dfrac{\kappa A(t)}{2a_1-3a_2}\right) - c_4\sin\left(\dfrac{\kappa A(t)}{2a_1-3a_2}\right)}{c_3\sin\left(\dfrac{\kappa A(t)}{2a_1-3a_2}\right) + c_4\cos\left(\dfrac{\kappa A(t)}{2a_1-3a_2}\right)}x + c_0e^{2(a_2-a_1)t}}}, \tag{12}$$

де $c_0c_2 < 0,\ A(t) = \sqrt{-c_0c_2}\,e^{(3a_2-2a_1)t},\ c_3^2 + c_4^2 > 0$, або

$$u(x,t) =$$
$$= \pm\frac{1}{x\sqrt{c_2e^{2(2a_2-a_1)t}x^2 + 2B(t)\dfrac{c_3\cosh\left(\dfrac{\kappa B(t)}{2a_1-3a_2}\right) + c_4\sinh\left(\dfrac{\kappa B(t)}{2a_1-3a_2}\right)}{c_3\sinh\left(\dfrac{\kappa B(t)}{2a_1-3a_2}\right) + c_4\cosh\left(\dfrac{\kappa B(t)}{2a_1-3a_2}\right)}x + c_0e^{2(a_2-a_1)t}}}, \tag{13}$$

де $c_0c_2 > 0,\ B(t) = \sqrt{c_0c_2}\,e^{(3a_2-2a_1)t},\ c_3^2 + c_4^2 > 0$.

Коли $a_1 = \dfrac{3}{2}a_2 = \dfrac{3}{2}a$ а $a_4 \in \mathbb{R}$ є довільним, отримуємо розв'язки системи редукованих рівнянь:

$$u(x,t) = \pm \frac{1}{x\sqrt{c_2 e^{at}x^2 - \dfrac{2\sqrt{-C}}{\kappa}\dfrac{c_3\cos(\sqrt{-C}t)\ +\ c_4\sin(\sqrt{-C}t)}{c_3\sin(\sqrt{-C}t)\ -\ c_4\cos(\sqrt{-C}t)}x + c_0 e^{-at}}}, \tag{14}$$

де $C = \kappa^2 c_0 c_2 + \kappa a_4 < 0,\ c_3^2 + c_4^2 > 0$, або

$$u(x,t) = \pm \frac{1}{x\sqrt{c_2 e^{at}x^2 - \dfrac{2\sqrt{C}}{\kappa}\dfrac{c_3\cosh(\sqrt{C}t)\ +\ c_4\sinh(\sqrt{C}t)}{c_3\sinh(\sqrt{C}t)\ +\ c_4\cosh(\sqrt{C}t)}x + c_0 e^{-at}}}, \tag{15}$$

де $C = \kappa^2 c_0 c_2 + \kappa a_4 > 0,\ c_3^2 + c_4^2 > 0$.

Беручи в (13) $c_3 = 0,\ c_4 \neq 0$, одержуємо частковий розв'язок, який містить функцію $\tanh\left(\dfrac{\kappa B(t)}{2a_1 - 3a_2}\right)$. Якщо ж в отриманій формулі замінити $\tanh\left(\dfrac{\kappa B(t)}{2a_1 - 3a_2}\right)$ на $\coth\left(\dfrac{\kappa B(t)}{2a_1 - 3a_2}\right)$, то знову отримуємо розв'язок рівняння (11). В цьому можна переконатися беручи $c_3 \neq 0,\ c_4 = 0$ в формулі (13). Легко зауважити також, що аналогічна властивість притаманна розв'язкам (15).

З умови інваріантності розв'язку (12) відносно певної однопараметричної підгрупи

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i X_i (u - u(x,t))\big|_{u=u(x,t)} = 0$$

випливає, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, розв'язок (12) рівняння (11) не є інваріантним розв'язком і тому не може бути отриманий за допомогою класичного методу С. Лі. Аналогічно показується, що розв'язки (13), (14) і (15) не є інваріантними.

Далі розглянемо частковий випадок коли $C_1 = C_0 = 0,\ C_2 \neq 0$. Тоді можна взяти $H(x) = \dfrac{\kappa}{x^2},\ \kappa = \mathrm{const}$. Звичайне диференціальне рівняння, яке генерує анзац, в даному випадку має такий вигляд:

$$u_{xxx} = 9\frac{u_{xx}u_x}{u} - 12\frac{u_x^3}{u^2} + \frac{12}{x}u_{xx} - \frac{36}{x}\frac{u_x^2}{u} - \frac{60}{x^2}u_x - \frac{60}{x^3}u. \tag{16}$$

Знайдено розв'язок цього рівняння

$$u(x) = \pm \frac{1}{x^2\sqrt{\varphi_2 x^2 + \varphi_1 x + \varphi_0}}, \tag{17}$$

де $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$ є довільними функціями змінної t.

Алгебру Лі групи Лі контактних перетворень групи симетрії рівняння (16), можна задати базисними елементами:

$$X_1 = u\partial_u, \quad X_2 = xu_x\partial_u, \quad X_3 = x^4u^3\partial_u, \quad X_4 = x^5u^3\partial_u, \quad X_5 = x^6u^3\partial_u, \tag{18}$$

$$X_6 = \left(2\frac{u}{x} + u_x\right)\partial_u, \qquad X_7 = (3xu + x^2u_x)\partial_u, \tag{19}$$

$$X_8 = \frac{x^2u_x^2 + 6xuu_x + 9u^2}{x^4u^3}\partial_u, \quad X_9 = \frac{x^2u_x^2 + 5xuu_x + 6u^2}{x^5u^3}\partial_u, \quad X_{10} = \frac{x^2u_x^2 + 4xuu_x + 4u^2}{x^6u^3}\partial_u, \tag{20}$$

Отже метод редукції за допомогою анзацу (17) можна застосувати до довільного рівняння, що належить до класу рівнянь

$$u_t = \left(\frac{\kappa}{x^2 u}\right)_{xx} + \sum_{i=1}^{10} a_i X_i u, \qquad a_i = \text{const}, \quad i = 1, \ldots, 10.$$

Розглянемо рівняння з цього класу такого вигляду

$$u_t = \left(\frac{\kappa}{x^2 u}\right)_{xx} + a_4 x^5 u^3 + a_5 x^6 u^3 + a_7(3xu + x^2 u_x), \qquad \kappa, a_i \in \mathbb{R}, \quad \kappa \neq 0. \tag{21}$$

При довільних $a_4, a_5, a_7 \in \mathbb{R}$ це рівняння допускає однопараметричну групу Лі з інфінітезимальним генератором

$$Y_1 = \partial_t.$$

Водночас, якщо $a_4 \neq 0,\ a_7 = 0$, то рівняння допускає додатковий оператор

$$Y_2' = \left(-2x^2 \frac{a_5}{a_4} - 2x\right)\partial_x + t\partial_t + \frac{3}{2}\left(4x\frac{a_5}{a_4} + 3\right)u\partial_u,$$

а якщо виконується умова $a_4 = 0$, то рівняння допускає два додаткових оператори

$$Y_2 = -x\partial_x + t\partial_t + \frac{5}{2}u\partial_u, \qquad Y_3 = x^2\partial_x - 3xu\partial_u.$$

Якщо крім того $a_4 = a_5 = 0$, то додатково появляється четвертий оператор

$$Y_4 = -a_7 t x^2 \partial_x + t\partial_t + \left(3a_7 t x + \frac{1}{2}\right)u\partial_u.$$

Анзац (17) редукує рівняння (21) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&\varphi_2' + 2\kappa\varphi_0\varphi_2 - \frac{1}{2}\kappa\varphi_1^2 + 2a_5 + a_7\varphi_1 = 0,\\
&\varphi_1' + 2a_4 + 2a_7\varphi_0 = 0,\\
&\varphi_0' = 0.
\end{aligned}$$

Розв'язки системи редукованих рівнянь мають такий вигляд

$$\begin{gathered}
\varphi_2 = \frac{(c_0 a_7 + a_4)^2}{c_0} t^2 - (c_0 a_7 + a_4)\left(\frac{c_1}{c_0} + \frac{a_4}{\kappa c_0^2}\right)t + \\
+ \frac{c_1^2}{4c_0} + \frac{c_1 a_4 - 2c_0 a_5}{2\kappa c_0^2} + \frac{a_4(c_0 a_7 + a_4)}{2\kappa^2 c_0^3} + c_2 e^{-2c_0\kappa t},\\
\varphi_1 = -2(c_0 a_7 + a_4)t + c_1,\\
\varphi_0 = c_0, \quad c_0 \neq 0,
\end{gathered}$$

або

$$\varphi_2 = \frac{2}{3}\kappa a_4^2 t^3 + a_4(a_7 - \kappa c_1)t^2 + \left(\frac{1}{2}c_1^2\kappa - c_1 a_7 - 2a_5\right)t + c_2,$$

$$\varphi_1 = -2a_4 t + c_1, \quad \varphi_0 = 0.$$

Підставляючи $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ в (17), отримуємо розв'язки, які є інваріантними відносно відповідної однопараметричної підгрупи з генератором, що є нетривіальною лінійною комбінацією операторів $\{Y_1, Y_2', Y_2, Y_3, Y_4\}$ тільки тоді, коли $a_4 = a_5 = 0$ або $a_4 = \varphi_0 = 0$, в іншому випадку вони не є інваріантними розв'язками.

Далі розглянемо рівняння

$$u_t = \left(\frac{\kappa}{x^2 u}\right)_{xx} + a_1 u + a_4 x^5 u^3 + a_5 x^6 u^3, \qquad \kappa, a_i \in \mathbb{R}, \quad a_1 \neq 0, \quad \kappa \neq 0. \tag{22}$$

Рівняння (22) допускає оператор $Z_1 = \partial_t$, якщо a_4, a_5 є довільними дійсними числами. Якщо ж $a_4 = 0$, то рівняння допускає додатковий оператор

$$Z_2 = x^2 \partial_x - 3xu\partial_u,$$

а якщо, крім того, $a_4 = a_5 = 0$, то з'являються ще два оператори

$$Z_3 = x\partial_x - 2u\partial_u, \qquad Z_4 = e^{2a_1 t}(\partial_t + a_1 u \partial_u).$$

Анзац (17) редукує рівняння (22) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_2' + 2\kappa\varphi_0\varphi_2 - \frac{1}{2}\kappa\varphi_1^2 + 2a_1\varphi_2 + 2a_5 = 0,$$
$$\varphi_1' + 2a_1\varphi_1 + 2a_4 = 0,$$
$$\varphi_0' + 2a_1\varphi_0 = 0,$$

розв'язки якої задаються формулами

$$\varphi_2 = e^{-2a_1 t}\left(e^{\frac{c_0\kappa}{a_1}e^{-2a_1 t}}\left(c_2 - \frac{\kappa}{4a_1^2}\left(2c_1 a_4 - c_0\left(4a_5 - \frac{a_4^2\kappa}{a_1^2}\right)\right)\Gamma\left(0, \frac{c_0\kappa}{a_1}e^{-2a_1 t}\right)\right) + \frac{c_1^2}{4c_0}\right) - \frac{a_5}{a_1} + \frac{\kappa a_4^2}{4a_1^3},$$
$$\varphi_1 = -\frac{a_4}{a_1} + c_1 e^{-2a_1 t},$$
$$\varphi_0 = c_0 e^{-2a_1 t}, \quad c_0 \neq 0,$$

або

$$\varphi_2 = \left(c_2 - \frac{c_1 a_4 \kappa}{a_1} t\right) e^{-2a_1 t} - \frac{\kappa c_1^2}{4a_1} e^{-4a_1 t} - \frac{a_5}{a_1} + \frac{\kappa a_4^2}{4a_1^3},$$
$$\varphi_1 = -\frac{a_4}{a_1} + c_1 e^{-2a_1 t},$$
$$\varphi_0 = 0,$$

де $\Gamma\big(0, z\big)$ є верхньою неповною гамма-функцією. Розв'язок $u(x,t)$ отриманий за допомогою (17) та розв'язків φ_0, φ_1, φ_2 редукованої системи рівнянь, не є інваріантним, коли $a_4 \neq 0$ або $a_5 \neq 0$.

Насамкінець розглянемо рівняння

$$u_t = \left(\frac{\kappa}{x^2 u}\right)_{xx} + a_3 x^4 u^3 + a_4 x^5 u^3 + a_5 x^6 u^3, \qquad \kappa, a_i \in \mathbb{R}, \quad a_3 \neq 0, \quad \kappa \neq 0. \tag{23}$$

При довільних $a_4,\ a_5$ це рівняння допускає оператор симетрії

$$W_1 = \partial_t.$$

Якщо ж $a_4 = a_5 = 0,$ то рівняння допускає додатковий оператор

$$W_2 = x\partial_x - 2u\partial_u.$$

Тоді анзац (17) редукує рівняння (23) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}
\varphi_2' + 2\kappa\varphi_0\varphi_2 - \frac{1}{2}\kappa\varphi_1^2 + 2a_5 = 0,\\
\varphi_1' + 2a_4 = 0,\\
\varphi_0' + 2a_3 = 0,
\end{gathered}$$

яка має наступний розв'язок

$$\varphi_2 = e^{2\kappa(a_3t^2 - c_0t)}\left(\frac{-\sqrt{\pi}\left(\kappa\left(c_1 - \dfrac{c_0a_4}{a_3}\right)^2 + \left(\dfrac{a_4^2}{a_3} - 4a_5\right)\right)}{4\sqrt{2a_3\kappa}}e^{\frac{\kappa c_0^2}{2a_3}}\operatorname{erf}\left(\frac{\kappa(-2a_3t + c_0)}{\sqrt{2a_3\kappa}}\right) + c_2\right) +$$

$$+\frac{a_4}{4a_3}\left(-2a_4t + 2c_1 - \frac{c_0a_4}{a_3}\right),$$

$$\varphi_1 = -2a_4t + c_1,$$

$$\varphi_0 = -2a_3t + c_0,$$

де $\operatorname{erf}(z)$ є функцією помилок. Розв'язок $u(x,t)$ рівняння (23) одержуємо, підставляючи $\varphi_0,\ \varphi_1,$ φ_2 в (17). Для $a_4 \neq 0$ або $a_5 \neq 0,$ отриманий розв'язок не є інваріантним відносно однопараметричної групи з інфінітезимальним генератором $W_1 = \partial_t,$ а також однопараметричної групи з генератором $\alpha_1W_1 + \alpha_2W_2,$ де $\alpha_1,\ \alpha_2$ є довільними сталими у випадку, коли $a_4 = a_5 = 0.$

Очевидно, ми можемо використовувати також оператори Лі – Беклунда звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянемо, наприклад, диференціальне рівняння

$$\psi_x = u\psi^2 + v. \tag{24}$$

Виявляється, що рівняння (24) допускає оператор симетрії Лі – Беклунда

$$Q = \left(-\psi_t + \exp\left(\frac{\psi_x - v}{\psi^2}\right)\cdot\left(\frac{\psi_x - v}{\psi^2}\right)_x\psi^2 + \beta\right)\partial_\psi,$$

якщо $u,\ v$ задовольняє наступну систему визначальних рівнянь

$$u_t = (e^u u_x)_x, \qquad v_t = \left(\frac{e^u u_x v}{u}\right)_x. \tag{25}$$

Як випливає з вищенаведеного, в даному випадку метод редукції може бути застосований до нелінійного диференціального рівняння

$$\psi_t = \exp\left(\frac{\psi_x - v}{\psi^2}\right)\cdot\left(\frac{\psi_x - v}{\psi^2}\right)_x\psi^2 + \frac{e^u u_x v}{u},$$

де $u(t,x),\ v(t,x)$ є розв'язками системи (25).

3. Висновки. В роботі знайдено розв'язки нелінійних еволюційних рівнянь, що описують процеси дифузії в нелінійних неоднорідних середовищах за допомогою методу, запропонованого в [10], який є узагальненням методу Свірщевського [9]. Показано, що метод дає можливість отримати розв'язки, які не є інваріантними в класичному сенсі С. Лі. Для цього використовуються оператори симетрії Лі – Беклунда звичайних диференціальних рівнянь третього порядку. Анзаци, які є загальними розв'язками звичайних диференціальних рівнянь, редукують нелінійне дифузійне рівняння до системи трьох звичайних диференціальних рівнянь. Виявляється, що розв'язки, отримані в рамках даного підходу, не можуть бути отримані за допомогою класичного методу С. Лі тільки в тому випадку, коли алгебра інваріантності дифузійного рівняння є одно-, дво- або тривимірною. Якщо ж алгебра є чотиривимірною, то тоді знайдені розв'язки можуть бути отримані також класичним методом С. Лі, як показано в пп. 2.1. Ці результати узгоджуються з результатами роботи [12], коли розв'язки знаходяться за допомогою методу умовної точкової симетрії.

Даний метод, очевидно, можна застосувати також для побудови інших класів дифузійних рівнянь і їх розв'язків, використовуючи оператори симетрії Лі – Беклунда інших звичайних диференціальних рівнянь.

Література

1. P. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York (1993).
2. G. Bluman, J. D. Cole, *The general similarity solution of the heat equation*, J. Math. Mech., **18**, № 11, 1025 – 1042 (1969).
3. P. J. Olver, P. Rosenau, *The construction of special solutions to partial differential equations*, Phys. Lett., **114A**, № 3, 107 – 112 (1986).
4. P. J. Olver, P. Rosenau, *Group-invariant solutions of differential equations*, SIAM J. Appl. Math., **47**, № 2, 263 – 278 (1987).
5. W. I. Fushchych, I. M. Tsyfra, *On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry*, J. Phys. A., **20**, № 2, L45 – L48 (1987).
6. A. S. Fokas, Q. M. Liu, *Nonlinear interaction of traveling waves of non-integrable equations*, Phys. Rev. Letters, **72**, № 21, 3293 – 3296 (1994).
7. R. Z. Zhdanov, *Conditional Lie-Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations*, J. Phys. A: Math. Gen., **28**, 3841 – 3850 (1995).
8. C. Z. Qu, *Exact solutions to nonlinear diffusion equations obtained by a generalized conditional symmetry method*, IMA J. Appl. Math., **62**, 283 – 302 (1999).
9. S. R. Svirshchevskii, *Lie – Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalized separation of variables in nonlinear equations*, Phys. Lett. A, **199**, 344 – 349 (1995).
10. I. M. Tsyfra, *Symmetry reduction of nonlinear differential equations*, Proc. Ins. Math., **50**, 266 – 270 (2004).
11. M. Kunzinger, R. O. Popovych, *Generalized conditional symmetry of evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., **379**, № 1, 444 – 460 (2011).
12. I. M. Tsyfra, *Conditional symmetry reduction and invariant solutions of nonlinear wave equations*, Proc. Ins. Math., **43**, 229 – 233 (2002).
13. I. M. Tsyfra, W. Rzeszut, *Lie – Backlund symmetry reduction of nonlinear and non-evolution equations*, Proc. Ins. Math., **16**, № 1, 174 – 180 (2019).
14. I. Tsyfra, T. Czyzycki, *Nonpoint symmetry and reduction of nonlinear evolution and wave type equations*, Abstract and Applied Anal., **2015**, Article ID 181275 (2015).

Одержано 20.11.21