DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7151

УДК 517.5

А. О. Кореновський, Р. В. Шанін (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ СЕРЕДНІХ АРИФМЕТИЧНИХ КОЛИВАНЬ МОНОТОННОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

For a sequence $Y = \{y_i\}_{i=P+1}^{Q}$ (the numbers $P, Q \in \mathbb{Z}$ are fixed, $P < Q$), we consider the arithmetic mean oscillations

$$\Omega\big(Y; [p,q]\big) = \frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^{q} \big|y_i - \sigma\big(Y; [p,q]\big)\big|,$$

where $\sigma\big(Y; [p,q]\big) = \dfrac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^{q} y_i$ is the arithmetic mean of the sequence Y on the segment $[p,q]$, numbers $P \le p < q \le Q$ are arbitrary. Such oscillations coincide with the integral mean oscillations of the function $f_Y = \sum_{i=P+1}^{Q} y_i \chi_{(i-1,i)}$ (χ_E is the characteristic function of the set E)

$$\Omega(f_Y; [p,q]) = \frac{1}{q-p} \int\limits_p^q |f_Y(x) - \sigma(f_Y; [p,q])|\, dx, \quad \sigma(f_Y; [p,q]) = \frac{1}{q-p} \int\limits_p^q f_Y(x)\, dx,$$

on segments with integer boundaries.

The main result of the paper is the following equality:

$$\max_{\{p,q\,:\,P \le p < q \le Q\}} \Omega\big(Y; [p,q]\big) = \max_{\{r \in \mathbb{Z}\,:\,P \le r \le Q\}} \max\big\{\Omega\big(Y; [P,r]\big), \Omega\big(Y; [r,Q]\big)\big\},$$

which holds for every monotonic sequence Y. Here, the main point is the fact that the maximum in the right-hand side is taken only over all integer numbers r. This equality turns into a well-known equality if we consider the function f_Y instead of the sequence Y, replace the arithmetic mean oscillations by the integral mean oscillations and, in addition, assume that r is not necessarily a integer number.

Для числової послідовності $Y = \{y_i\}_{i=P+1}^{Q}$ (номери $P, Q \in \mathbb{Z}$ фіксовані, $P < Q$) розглянуто середні арифметичні коливання

$$\Omega\big(Y; [p,q]\big) = \frac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^{q} \big|y_i - \sigma\big(Y; [p,q]\big)\big|,$$

де $\sigma\big(Y; [p,q]\big) = \dfrac{1}{q-p} \sum_{i=p+1}^{q} y_i$ — середнє арифметичне значення послідовності Y на відрізку $[p,q]$, номери $P \le p < q \le Q$ довільні. Такі коливання збігаються із середніми інтегральними коливаннями функції $f_Y = \sum_{i=P+1}^{Q} y_i \chi_{(i-1,i)}$ (χ_E — характеристична функція множини E)

$$\Omega(f_Y; [p,q]) = \frac{1}{q-p} \int\limits_p^q |f_Y(x) - \sigma(f_Y; [p,q])|\, dx,$$

$$\sigma(f_Y; [p,q]) = \frac{1}{q-p} \int\limits_p^q f_Y(x) dx$$

на відрізках із цілочисловими межами.

Основний результат роботи полягає в тому, що для монотонної послідовності Y справджується рівність

$$\max_{\{p,q\,:\,P \le p < q \le Q\}} \Omega\big(Y; [p,q]\big) = \max_{\{r \in \mathbb{Z}\,:\,P \le r \le Q\}} \max\big\{\Omega\big(Y; [P,r]\big), \Omega\big(Y; [r,Q]\big)\big\},$$

до того ж максимум у правій частині береться лише за всіма цілими r. Якщо у цій рівності замість Y взяти f_Y і, відповідно, арифметичні коливання замінити середніми інтегральними коливаннями, а також вважати число r у правій частині не обов'язково цілим, то отриманий аналог такої рівності є відомим.

Вступ. Нехай функція f сумовна на відрізку $[A,B]\subset\mathbb{R}$. Для деякого відрізка $[a,b]\subset[A,B]$ середнім інтегральним значенням функції f на $[a,b]$ називають

$$\sigma\big(f;[a,b]\big)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

а середнім інтегральним коливанням —

$$\Omega\big(f;[a,b]\big)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \big|f(x)-\sigma\big(f;[a,b]\big)\big|\,dx.$$

Кажуть, що f є функцією з обмеженими середніми коливаннями ($f\in BMO$) на $[A,B]$, якщо

$$\|f\|_*=\sup_{[a,b]}\Omega\big(f;[a,b]\big)<+\infty,$$

де точна верхня межа береться по всіх відрізках $[a,b]\subset[A,B]$. Клас BMO, введений у роботі [1], отримав багато застосувань у різних напрямках. Тому зрозуміла увага багатьох авторів до вивчення властивостей середніх інтегральних коливань. Звичайно, таких властивостей багато, ми зосередимо увагу лише на тих, які мають безпосереднє відношення до цієї роботи. Більшість з наведених властивостей можна знайти, наприклад, у [2].

Для вимірної на множині E функції f і сталої c через $E(f>c)$ позначатимемо множину $\big\{x\in E\colon f(x)>c\big\}$. Аналогічно означаються множини $E(f\geq c)$, $E(f<c)$ і $E(f\leq c)$. Очевидно, що

$$\Big|E\big(f>\sigma(f;E)\big)\Big|+\Big|E\big(f<\sigma(f;E)\big)\Big|\leq\frac{|E|}{2},$$
$$\Big|E\big(f\geq\sigma(f;E)\big)\Big|+\Big|E\big(f\leq\sigma(f;E)\big)\Big|\geq\frac{|E|}{2}.$$

Якщо $E=[a,b]$ $\big(|E|=b-a\big)$, то зрозуміло, що для будь-якої сталої c

$$\sigma(f+c;E)=\sigma(f;E)+c,\qquad \Omega(f+c;E)=\Omega(f;E),$$

а умова $\Omega(f;E)=0$ рівносильна тому, що f на E еквівалентна тотожній сталій $\sigma(f;E)$. Далі,

$$\int\limits_{E(f>\sigma(f;E))}\big(f(x)-\sigma(f;E)\big)dx=\int\limits_{E(f\geq\sigma(f;E))}\big(f(x)-\sigma(f;E)\big)dx=$$
$$=\int\limits_{E(f<\sigma(f;E))}\big(\sigma(f;E)-f(x)\big)dx=\int\limits_{E(f\leq\sigma(f;E))}\big(\sigma(f;E)-f(x)\big)dx.$$

З цієї рівності випливає, що

$$\Omega(f;E)=\frac{2}{b-a}\int\limits_{E(f>\sigma(f;E))}\big(f(x)-\sigma(f;E)\big)dx.$$

Якщо функція f істотно обмежена на E, то (див. [3, с. 224; 2, с. 29])

$$\Omega(f;E) \le \frac{1}{2}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} f(x) - \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} f(x)\right).$$

Легко показати, що

$$\Omega\big(|f|;E\big) \le 2\cdot\Omega(f;E), \tag{1}$$

причому сталий множник 2 у правій частині, взагалі кажучи, не можна зменшити [2, с. 29; 4]. Наведемо відповідний приклад.

***Приклад* 1.** Нехай натуральне $Q \ge 3$. Означимо на $[0,Q]$ функцію $f = \chi_{[0,1]} - \chi_{(Q-1,Q]}$, де χ_E — характеристична функція множини E. Маємо

$$\sigma(f;[0,Q]) = 0, \qquad \Omega(f;[0,Q]) = \frac{2}{Q},$$

$$\sigma\big(|f|;[0,Q]\big) = \frac{2}{Q}, \qquad \Omega(|f|;[0,Q]) = \frac{2}{Q}\cdot 2\left(1-\frac{2}{Q}\right) = \frac{4(Q-2)}{Q^2},$$

$$\frac{\Omega\big(|f|;[0,Q]\big)}{\Omega(f;[0,Q])} = 2\cdot\frac{Q-2}{Q} \to 2, \quad Q\to\infty.$$

Незважаючи на те, що нерівність (1) є точною, відповідна нерівність для норм має вигляд

$$\big\||f|\big\|_* \le \|f\|_*$$

(див. [2, с. 67]). Доведення цієї нерівності ґрунтується на використанні оцінок рівновимірних перестановок функцій, які опираються на оцінки коливань монотонної функції; деталі ми пропускаємо.

Перейдемо до оцінювання коливань монотонної функції (див. [2, с. 35]). Основою для таких оцінювань є таке твердження (див. [5]).

Лема 1. *Нехай функція f монотонна на відрізку $[a,b]$, а відрізок $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ такий, що*

$$\sigma\big(f;[a,b]\big) = \sigma(f;[a_1,b_1]).$$

Тоді

$$\Omega(f;[a_1,b_1]) \le \Omega\big(f;[a,b]\big).$$

В свою чергу, на цю лему опирається доведення такого твердження.

Лема 2. *Нехай функція f монотонна на відрізку $[a,b]$. Тоді*

$$\|f\|_* = \sup_{a\le c\le b}\max\big\{\Omega(f;[a,c]),\,\Omega(f;[c,b])\big\}.$$

Цю лему легко отримати із попередньої. Справді, спираючись на абсолютну неперервність інтеграла Лебега, достатньо для довільного відрізка $[a_1,b_1]\subset[a,b]$ побудувати такий із двох відрізків $[a,c]\supset[a_1,b_1]$ чи $[c,b]\supset[a_1,b_1]$, для якого $\sigma(f;[a,c]) = \sigma(f;[a_1,b_1])$ або $\sigma(f;[c,b]) = \sigma(f;[a_1,b_1])$. Але у дискретному випадку властивість абсолютної неперервності не має місця, тому описану схему доведення леми 2 застосувати не можна. Основний результат даної роботи полягає у тому, що аналог леми 2 залишається справедливим і у дискретному випадку.

Середні арифметичні коливання послідовності. Вважаємо, що межі $P,\ Q,\ p,\ q,\ r,\ldots$ усіх відрізків — цілі числа. Для зручності скінченні набори дійсних чисел будемо називати послідовностями.

Нехай задано послідовність $Y=\{y_i\}_{i=P+1}^{Q}$. Для $P\le p<q\le Q$ середнім арифметичним значенням послідовності Y на відрізку $[p,q]$ називається

$$\sigma\big(Y;[p,q]\big)=\frac{1}{q-p}\sum_{i=p+1}^{q}y_i,$$

а середнім арифметичним коливанням —

$$\Omega\big(Y;[p,q]\big)=\frac{1}{q-p}\sum_{i=p+1}^{q}\big|y_i-\sigma\big(Y;[p,q]\big)\big|;$$

при $p=q$ вважаємо, що $\sigma\big(Y;[p,p]\big)=\Omega\big(Y;[p,p]\big)=0$. Для фіксованих $P<Q$ означимо

$$\|Y\|_d=\max_{P\le p<q\le Q}\big\{\Omega\big(Y;[p,q]\big)\big\}.$$

Якщо на $[P,Q]$ означити функцію $f_Y=\sum_{i=P+1}^{Q}y_i\chi_{(i-1,i)}$, то, очевидно, для будь-яких $P\le p<q\le Q$

$$\sigma\big(f_Y;[p,q]\big)=\sigma\big(Y;[p,q]\big),\qquad \Omega\big(f_Y;[p,q]\big)=\Omega\big(Y;[p,q]\big).$$

Зазначимо, що норма $\|Y\|_d$ відрізняється від норми $\|f_Y\|_*$ лише тим, що точна верхня межа береться не по всіх відрізках, а лише по відрізках із цілочисловими межами. Тому і $\|Y\|_d\le$ $\le\|f_Y\|_*$, а оскільки функція f_Y обмежена, то $\|f_Y\|_*\le\dfrac{1}{2}\big(\max_{P+1\le i\le Q}y_i-\min_{P+1\le i\le Q}y_i\big)<$ $<\infty$, тобто у будь-якому випадку $f_Y\in BMO$.

Багато властивостей середніх арифметичних коливань послідовності Y можна отримати із відповідних властивостей середніх інтегральних коливань функції f_Y. Наприклад, $\sigma\big(Y;[r-$ $-1,r]\big)=y_r,\ \Omega\big(Y;[r-1,r]\big)=0\ \ (r=P+1,\ldots,Q)$, а умова $\Omega\big(Y;[p,q]\big)=0$ рівносильна тому, що $y_{p+1}=\ldots=y_q=\sigma\big(Y;[p,q]\big)$. Також легко бачити, що

$$\Omega\big(Y;[p,q]\big)=\frac{2}{q-p}\sum_{\{i\in[p+1,q]\,:\,y_i>\sigma(Y;[p,q])\}}\big(y_i-\sigma\big(Y;[p,q]\big)\big)=$$
$$=\frac{2}{q-p}\sum_{\{i\in[p+1,q]\,:\,y_i<\sigma(Y;[p,q])\}}\big(\sigma\big(Y;[p,q]\big)-y_i\big).$$

З іншого боку, дискретизація відрізків, за якими можна розглядати середні інтегральні коливання функції f_Y, накладає певні обмеження, зокрема, як вже зазначалось, відсутність властивості абсолютної неперервності.

Зрозуміло, що будь-яке коливання послідовності Y можна записати у вигляді відповідного коливання функції f_Y, тому далі можна було б обмежитись дослідженням середніх інтегральних коливань функції f_Y за цілочисловими відрізками. Але щоб не зазначати щоразу, що межі відрізків цілочислові, подальший виклад будемо проводити у термінах послідовностей. Для $Y=\{y_i\}_{i=P+1}^{Q}$ позначаємо

$$|Y| = \{|y_i|\}_{i=P+1}^{Q}, \qquad cY = \{c \cdot y_i\}_{i=P+1}^{Q}, \qquad Y + c = \{y_i + c\}_{i=P+1}^{Q},$$

де c — деяка стала.

Основним результатом роботи є наступна теорема, що є дискретним аналогом леми 2. Як і в лемі 2, в цій теоремі звичайно також припускається умова монотонності.

Теорема. *Нехай послідовність $Y = \{y_i\}_{i=P+1}^{Q}$ монотонна. Тоді*

$$\max_{\{p,q\,:\,P \le p < q \le Q\}} \Omega\big(Y; [p,q]\big) = \max_{\{r\,:\,P \le r \le Q\}} \max \big\{\Omega(Y; [P,r]), \Omega(Y; [r,Q])\big\}.$$

Для доведення теореми встановимо спочатку кілька допоміжних тверджень, які в деякому сенсі замінюють лему 1, що використовувалась при доведенні леми 2. Така заміна потрібна тому, що у дискретному випадку для довільного відрізка $[p,q] \subset [P,Q]$ не можна гарантувати наявність принаймні одного з таких цілочислових відрізків $[P,r]$ чи $[r,Q]$, для яких $\sigma(Y;[P,r]) = \sigma(Y;[p,q])$ або $\sigma(Y;[r,Q]) = \sigma(Y;[p,q])$.

Лема 3. *Нехай послідовність $Z = \{z_i\}_{i=1}^{r}$ задовольняє умови*

$$z_1 \ge z_2 \ge \ldots \ge z_{r'} > 0 \ge z_{r'+1} \ge \ldots \ge z_r,$$

до того ж

$$r' < \frac{r+1}{2}, \tag{2}$$

$$\sigma(Z;[1,r]) = \sum_{i=2}^{r} z_i = 0. \tag{3}$$

Тоді

$$\Omega\big(Z;[0,r]\big) \ge \Omega(Z;[1,r]). \tag{4}$$

Доведення. Спочатку покажемо, що за умови (2) виконується нерівність

$$r - r' \ge r' + 1. \tag{5}$$

Справді, для доведення нерівності (5) у випадку $r = 2k+1$, тобто $\dfrac{r+1}{2} = k+1$, за умови (2) маємо $r' \le k$, і тому $r - r' = 2k + 1 - r' \ge r' + 1$. Якщо ж $r = 2k$, тобто $\dfrac{r+1}{2} = k + \dfrac{1}{2}$, то за умови (2) маємо $r' \le k - \dfrac{1}{2}$, і тому $r - r' \ge 2k - \left(k - \dfrac{1}{2}\right) = k + \dfrac{1}{2} \ge r' + 1$. Отже, нерівність (5) виконується у будь-якому випадку.

За умови (3)

$$\sigma\big(Z;[0,r]\big) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} z_i = \frac{z_1}{r} > 0.$$

Знайдемо таке максимальне $r'' \in [1, r']$, що

$$z_{r''} > \sigma\big(Z;[0,r]\big),$$

і отримаємо

$$\frac{1}{2}\left(\Omega\big(Z;[0,r]\big)-\Omega(Z;[1,r])\right)=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r''}\big(z_i-\sigma\big(Z;[0,r]\big)\big)-\frac{1}{r-1}\sum_{i=2}^{r'}z_i=$$

$$=\frac{1}{r}\left(\left(z_1-\frac{z_1}{r}\right)+\sum_{i=2}^{r''}\left(z_i-\frac{z_1}{r}\right)\right)-\frac{1}{r-1}\sum_{i=2}^{r'}z_i=$$

$$=\frac{(r-1)z_1}{r^2}+\frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r''}z_i-\frac{(r''-1)z_1}{r^2}-\frac{1}{r-1}\sum_{i=2}^{r'}z_i=$$

$$=\frac{(r-r'')z_1}{r^2}+\frac{1}{r}\sum_{i=2}^{r'}z_i-\frac{1}{r}\sum_{i=r''+1}^{r'}z_i-\frac{1}{r-1}\sum_{i=2}^{r'}z_i=$$

$$=\frac{(r-r'')z_1}{r^2}-\frac{1}{r(r-1)}\sum_{i=2}^{r'}z_i-\frac{1}{r}\sum_{i=r''+1}^{r'}z_i=$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{(r-r')z_1}{r}-\frac{1}{r-1}\sum_{i=2}^{r'}z_i\right)+\frac{r'-r''}{r}\left(\frac{z_1}{r}-\frac{1}{r'-r''}\sum_{i=r''+1}^{r'}z_i\right)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{r}S_1+\frac{r'-r''}{r}S_2 \tag{6}$$

$\Big($нагадаємо, що при $r'=r''$ вважаємо, що $\sum_{i=r''+1}^{r'}z_i=\dfrac{1}{r'-r''}\sum_{i=r''+1}^{r'}z_i=0\Big)$. Оскільки послідовність Z не зростає, то

$$S_2=\frac{z_1}{r}-\frac{1}{r'-r''}\sum_{i=r''+1}^{r'}z_i=\sigma\big(Z;[0,r]\big)-\sigma(Z;[r'',r'])\geq 0.$$

Далі, запишемо

$$S_1=\frac{(r-r')z_1}{r}-\frac{1}{r-1}\sum_{i=2}^{r'}z_i=\frac{(r-r')z_1}{r}-\frac{r'-1}{r-1}\sigma\big(Z;[1,r']\big)$$

і скористаємось нерівністю $z_1\geq\sigma\big(Z;[1,r']\big)$, яка також випливає із монотонності Z. В результаті отримаємо

$$S_1=\frac{(r-r')z_1}{r}-\frac{r'-1}{r-1}\sigma\big(Z;[1,r']\big)\geq\frac{z_1}{r}\left(r-r'-\frac{r(r'-1)}{r-1}\right).$$

Залишилося показати, що вираз у дужках у правій частині є невід'ємним. Але за умови (5)

$$r-r'-\frac{r(r'-1)}{r-1}\geq r'+1-\frac{r(r'-1)}{r-1}=$$

$$=\frac{1}{r-1}((r-1)(r'+1)-r(r'-1))=\frac{r-r'+r-1}{r-1}>0.$$

Таким чином, $S_1\geq 0$. Раніше ми показали, що і $S_2\geq 0$, і тому із (6) випливає (4).

Лему 3 доведено.

Наступна лема симетрична до леми 3.

Лема 4. *Нехай послідовність* $Z = \{z_i\}_{i=2}^{r+1}$ *задовольняє умови*

$$z_2 \geq \ldots \geq z_{r'} \geq 0 > z_{r'+1} \geq \ldots \geq z_r \geq z_{r+1},$$

до того ж

$$r' > \frac{r+1}{2}, \qquad \sum_{i=2}^{r} z_i = 0.$$

Тоді

$$\Omega(Z; [1, r+1]) \geq \Omega(Z; [1, r]). \tag{7}$$

Доведення проведемо, застосувавши лему 3 до послідовності $Z' = \big\{z'_i = -z_{r+1-i}, i = 1, \ldots, r\big\}$.

В лемах 3 і 4 вилучено випадок $r' = \dfrac{r+1}{2}$. Це є істотним, оскільки доведення леми 3 опирається на нерівність (5), яка виконується при $r' = \dfrac{r+1}{2}$. В наступній лемі розглядається аналог саме такого випадку. Сформулюємо цю лему в дещо іншій, більш зручній формі.

Лема 5. *Нехай послідовність* $Z = \{z_i\}_{i=-r}^{r+1}$ *задовольняє умови*

$$z_{-r} \geq z_{-r+1} \geq \ldots \geq z_0 \geq 0 \geq z_1 \ldots \geq z_r \geq z_{r+1},$$

до того ж

$$\sigma\big(Z; [-r, r]\big) = \sum_{i=-r+1}^{r} z_i = 0. \tag{8}$$

Тоді

$$\Omega(Z; [-r-1, r+1]) \geq \Omega\big(Z; [-r, r]\big). \tag{9}$$

Доведення. Враховуючи (8), обчислюємо

$$\sigma(Z; [-r-1, r+1]) = \frac{1}{2r+2} \sum_{i=-r}^{r+1} z_i = \frac{z_{-r} + z_{r+1}}{2r+2}.$$

Розглянемо спочатку випадок $\sigma(Z; [-r-1, r+1]) \leq 0$, тобто $z_{-r} \leq -z_{r+1}$. Знайдемо таке найбільше $r' \in [0, r]$, при якому $z_{r'} \geq \sigma(Z; [-r-1, r+1])$. Тоді

$$\frac{1}{2}\Omega(Z; [-r-1, r+1]) - \frac{1}{2}\Omega\big(Z; [-r, r]\big) =$$

$$= \frac{1}{2r+2} \sum_{i=-r}^{r'} \big(z_i - \sigma(Z; [-r-1, r+1])\big) - \frac{1}{2r} \sum_{i=-r+1}^{0} z_i =$$

$$= \frac{1}{2r+2} \sum_{i=-r}^{0} z_i - \frac{1}{2r} \sum_{i=-r+1}^{0} z_i = \frac{1}{2}\sigma(Z; [-r-1, 0]) - \frac{1}{2}\sigma(Z; [-r, 0]).$$

Оскільки, завдяки спаданню послідовності Z, $\sigma(Z; [-r-1, 0]) \geq \sigma(Z; [-r, 0])$, то отримали (9).

Випадок $\sigma\big(Z; [-r-1, r+1]\big) \geq 0$ легко доводиться аналогічним чином, або ж, як і при доведенні леми 4, можна отримати із розглянутого випадку, застосованого до послідовності $Z' = \big\{z'_i = -z_{1-i},\ i = -r, \ldots, r+1\big\}$.

Лему 5 доведено.

Із лем $3-5$ випливає наступне твердження, яке підсумовує ці леми. Його сенс полягає у тому, що коли довільний відрізок можна істотно розширити в обидва боки, то його можна розширити принаймні в один бік таким чином, щоб на розширеному відрізку коливання не стало меншим.

Лема 6. *Нехай послідовність* $Y = \{y_i\}_{i=p}^{q+1}$ *монотонна. Тоді*

$$\Omega(Y;[p,q]) \le \max\big\{\Omega(Y;[p-1,q]), \Omega(Y;[p,q+1]), \Omega(Y;[p-1,q+1])\big\}. \tag{10}$$

Доведення. Очевидно, достатньо розглянути випадок незростаючої послідовності Y, для якої $\Omega(Y;[p,q]) > 0$.

Знайдемо такі $p' \ge p+1$ і $q' \le q-1$, що

$$y_{p'} > \sigma\big(Y;[p,q]\big) \ge y_{p'+1}, \qquad y_{q'} \ge \sigma\big(Y;[p,q]\big) > y_{q'+1}.$$

Легко бачити, що $p' \le q'$, і виконується принаймні одна з таких умов:

1) $p' < \dfrac{p+q}{2}$;

2) $q' > \dfrac{p+q}{2}$;

3) $p' = q' = \dfrac{p+q}{2}$,

до того ж перші дві умови можуть виконуватись одночасно, а третій випадок виключає об'єднання двох перших.

У двох перших випадках покладемо $r = q-p+1$,

$$Z = \big\{z_i = y_{p+i-1} - \sigma(Y;[p,q]),\ i = 1,\ldots,r+1\big\}$$

і отримаємо $\sigma(Z;[1,r]) = 0$. При цьому у першому випадку умова $p' < \dfrac{p+q}{2}$ рівносильна умові $r' \equiv p'-p+1 < \dfrac{r+1}{2}$. Це означає, що послідовність $Z = \{z_i\}_{i=1}^{r}$ задовольняє умови леми 3, згідно з якою виконується нерівність (4). Але, очевидно, нерівність (4) рівносильна тому, що

$$\Omega(Y;[p-1,q]) \ge \Omega(Y;[p,q]). \tag{11}$$

У другому випадку умова $q' > \dfrac{p+q}{2}$ рівносильна умові $r' \equiv q'-p+1 > \dfrac{r+1}{2}$. Це означає, що послідовність $Z = \{z_i\}_{i=2}^{r+1}$ задовольняє умови леми 4, згідно з якою виконується нерівність (7). Але, очевидно, нерівність (7) рівносильна тому, що

$$\Omega(Y;[p,q+1]) \ge \Omega(Y;[p,q]). \tag{12}$$

У третьому випадку $q+p$ парне, а тому і $q-p$ також є парним. Покладемо $r = \dfrac{q-p}{2}$,

$$Z = \Big\{z_i = y_{\frac{p+q}{2}+i} - \sigma(Y;[p,q]), i = -r,\ldots,r+1\Big\}$$

і отримаємо $\sigma\big(Z;[-r,r]\big) = 0$. При цьому умова $p' = q' = \dfrac{p+q}{2}$ рівносильна тому, що $r' \equiv p' - \dfrac{p+q}{2} = 0$. Це означає, що послідовність $Z = \{z_i\}_{i=-r}^{r+1}$ задовольняє умови леми 5, згідно з якою виконується нерівність (9). Але, очевидно, нерівність (9) рівносильна тому, що

$$\Omega(Y; [p-1, q+1]) \geq \Omega(Y; [p, q]). \tag{13}$$

Насамкінець зазначимо, що для незростаючої послідовності Y нерівність (10) випливає із нерівностей (11) – (13).

Лему 6 доведено.

Доведення теореми. Очевидно, достатньо розглянути випадок незростаючої послідовності Y.

Припустимо, що $P < p < q < Q$ і $\Omega(Y; [p, q]) > 0$. Позначимо $[p_0, q_0] = [p, q]$ і застосуємо лему 6. В результаті отримаємо відрізок $[p_1, q_1] \supset [p_0, q_0]$, де $[p_1, q_1]$ — той із відрізків $[p-1, q]$, $[p, q+1]$ чи $[p-1, q+1]$, на якому досягається максимум у правій частині (10). За лемою 6 $\Omega(Y; [p_0, q_0]) \leq \Omega(Y; [p_1, q_1])$. При цьому довжина відрізка $[p_1, q_1]$ принаймні на 1 більша за довжину відрізка $[p_0, q_0]$. Якщо $(p_1 - P)(Q - q_1) = 0$ (тобто один із кінців відрізка $[p_1, q_1]$ збігається з одним із кінців відрізка $[P, Q]$), то теорему доведено. У протилежному випадку застосуємо лему 6 до відрізка $[p_1, q_1]$, в результаті чого отримаємо відрізок $[p_2, q_2] \supset [p_1, q_1]$, довжина якого принаймні на 1 більша за довжину відрізка $[p_1, q_1]$, і $\Omega(Y; [p_1, q_1]) \leq \Omega(Y; [p_2, q_2])$. Зрозуміло, що за скінченну кількість кроків отримаємо такий відрізок $[p_k, q_k] \supset [p_{k-1}, q_{k-1}]$, один із кінців якого збігається з одним із кінців відрізка $[P, Q]$, і

$$\Omega(Y; [p_0, q_0]) \leq \Omega(Y; [p_1, q_1]) \leq \ldots \leq \Omega(Y; [p_k, q_k]).$$

Теорему доведено.

Висновки. Доведена теорема може виявитись корисною для встановлення подальших властивостей середніх арифметичних коливань послідовностей, зокрема, у випадку нескінченних послідовностей на $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ та оцінювання швидкості їх зростання, тобто дискретних аналогів теореми Джона – Ніренберга. Крім того, напевно цю теорему можна застосувати до оцінювання коливань послідовності із модулів елементів, або ж монотонних чи симетричних перестановок послідовностей.

Література

1. F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Commun. Pure and Appl. Math., **14**, № 4, 415 – 426 (1961).
2. A. A. Korenovskii, *Mean oscillations and equimeasurable rearrangements of functions*, Lect. Notes Unione Mat. Ital., **4**, Springer, Berlin (2007); DOI 10.1007/978-3-540-74709-3.
3. J. Garnett, *Bounded analytic functions*, Acad. Press, New York (1981).
4. А. А. Кореновский, *О связи между средними колебаниями и точными показателями суммируемости функций*, Мат. сб., **181**, № 12, 1721 – 1727 (1990).
5. I. Klemes, *A mean oscillation inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., **93**, № 3, 497 – 500 (1985).

Одержано 07.02.22