DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7034

УДК 517.5

О. Н. Нестеренко*, **І. Л. Петрова****, **А. В. Чайковський** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ МОДУЛІВ ГЛАДКОСТІ З ВАГАМИ ЯКОБІ

We prove a generalization of an important inequality for moduli of smoothness with Jacobi weights.

Наведено узагальнення однієї важливої нерівності для модулів гладкості з вагами Якобі.

Вступ. Формулювання основного результату. Нехай $1 \leq p < +\infty$. Для довільного проміжку $J \subset \mathbf{R}$ позначатимемо через $L_p(J)$ простір вимірних за Лебегом функцій $f : J \to \mathbf{R}$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(J)} := \left(\int\limits_J |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

а через $AC_{\mathrm{loc}}(J)$ множину функцій, які є абсолютно неперервними на кожному відрізку $[a, b] \subset J$.

Введемо також вагові функції $\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, і для довільних $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$

$$w_{\alpha,\beta}(x) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}, \quad x \in (-1, 1).$$

В роботі будемо досліджувати функції з класу

$$\mathbb{B}_p^k(w_{\alpha,\beta}) = \Big\{ f \mid f^{(k-1)} \in AC_{\mathrm{loc}}((-1, 1)),\ w_{\alpha,\beta}\varphi^k f^{(k)} \in L_p((-1, 1)) \Big\},$$

де $k \in \mathbf{N}$. На множинах

$$D_\delta = \left\{ x \left| \left[x - \frac{\delta}{2}\varphi(x), x + \frac{\delta}{2}\varphi(x) \right] \subset [-1, 1] \right. \right\} = \left\{ x \left| |x| \ \leq \frac{4 - \delta^2}{4 + \delta^2} \right. \right\} = \big[-x_*(\delta), x_*(\delta) \big],$$

визначених при $\delta \in [0, 2]$, введемо також вагові функції

$$W_\delta^{\xi,\zeta}(x) = \left(1 - x - \frac{\delta}{2}\varphi(x) \right)^{\xi} \left(1 + x - \frac{\delta}{2}\varphi(x) \right)^{\zeta}, \qquad x \in D_\delta, \quad \xi, \zeta \in \mathbf{R}.$$

Позначимо k-ту різницю так:

$$\triangle_h^k(f, x) := \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i} (-1)^{k-i} f\left(x - \dfrac{kh}{2} + ih \right), & \text{якщо} \quad \left[x - \dfrac{kh}{2}, x + \dfrac{kh}{2} \right] \subset [-1, 1], \\ 0 & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $k \in \mathbf{N}$, $h \geq 0$. Розглянемо модулі гладкості

* Підтримано грантом Міністерства освіти і науки України для перспективного розвитку наукового напрямку „математичні і природничі науки” в Київському національному університеті ім. Т. Шевченка.

** Підтримано Національним фондом досліджень України (проєкт 2020.02/0155).

$$\omega_{k,r}^{\varphi}(f^{(r)},t)_{\alpha,\beta,p} := \begin{cases} \sup_{0\le h\le t} \left\| W_{kh}^{r/2+\alpha,r/2+\beta}(\cdot)\triangle_{\varphi(\cdot)h}^{k}(f^{(r)},\cdot)\right\|_{L_p(D_{kh})}, & 0<t\le \dfrac{2}{k}, \\ \omega_{k,r}^{\varphi}\left(f^{(r)},\dfrac{2}{k}\right)_{\alpha,\beta,p}, & t>\dfrac{2}{k}. \end{cases}$$

Ці модулі гладкості були введені в роботі К. Копотуна, Д. Левіатана та І. Шевчука [1]. У частковому випадку $\alpha=\beta=0$ вони введені в роботі тих же авторів [2]. Якщо ж $r=\alpha=\beta=0$, то дані модулі гладкості — це відомі модулі Діціана – Тотіка [3].

У роботі [1] деякі властивості даного модуля гладкості встановлено за природних припущень щодо параметрів α і β, а саме, коли $\dfrac{r}{2}+\alpha>-\dfrac{1}{p}$ та $\dfrac{r}{2}+\beta>-\dfrac{1}{p}$, тоді як інші, зокрема і лема 3.1, встановлено лише при $\dfrac{r}{2}+\alpha\ge 0$ та $\dfrac{r}{2}+\beta\ge 0$. Основний результат цієї статті полягає в тому, що лема 3.1 [1] справджується і при $\dfrac{r}{2}+\alpha>-\dfrac{1}{p}$ та $\dfrac{r}{2}+\beta>-\dfrac{1}{p}$.

Теорема. *Нехай* $k\in\mathbf{N}, r\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $1\le p<+\infty$, $\dfrac{r}{2}+\alpha>-\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{r}{2}+\beta>-\dfrac{1}{p}$, $f\in\mathbb{B}_p^{k+r}(\omega_{\alpha,\beta})$. *Тоді*

$$\omega_{k,r}^{\varphi}(f^{(r)},t)_{\alpha,\beta,p}\le Ct^k\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p([-1,1])}, \quad 0<t\le\frac{1}{k},$$

де стала C *може залежати лише від* k, r, p, α *і* β.

Доведення основного результату. При доведенні будемо використовувати сталі $C_1, C_2,\ldots$ $\ldots, C_{49}$, які є додатними дійсними числами, що можуть залежати лише від k, r, p, α і β.

Спочатку наведемо допоміжні результати, необхідні для доведення теореми. Позначимо $D_\delta^+:=D_\delta\cap[0,1]$, $\delta\in[0,2]$.

Лема 1. *Для довільних* $\delta\in[0,1]$ *справджуються такі нерівності*:

якщо $x\in D_{2\delta}^+, u\in\left[x-\dfrac{\delta}{2}\varphi(x),x+\dfrac{\delta}{2}\varphi(x)\right]$, *то*

1) $\dfrac{1}{2}\big(1-|u|\big)\le 1-|x|\le 2\big(1-|u|\big)$,
2) $\dfrac{1}{2}\varphi(u)\le\varphi(x)\le 2\varphi(u)$,
3) $C_1(1-x)^\alpha\le w_{\alpha,\beta}(u)\le C_2(1-x)^\alpha$,
4) $C_3(1-x)^\xi\le W_\delta^{\xi,\zeta}(x)\le C_4(1-x)^\xi$;

якщо $x\in D_\delta^+\setminus D_{2\delta}^+$, $u\in\left[x-\dfrac{\delta}{2}\varphi(x),x+\dfrac{\delta}{2}\varphi(x)\right]$, *то*

5) $C_5\delta^2\le 1-x\le C_6\delta^2$,
6) $C_7(x_*(\delta)-x)\le 1-u\le C_8\delta^2$.

Доведення. Властивості 1 – 4 легко отримати з [1] (твердження 2.1 та його доведення). Крім того, за умов 5, 6 маємо

$$C_9\delta^2\le 1-x_*(\delta)\le 1-x\le 1-x_*(2\delta)\le C_{10}\delta^2,$$

$$1-u\le 1-x+\frac{\delta}{2}\varphi(x)\le 1-x+C_{11}\delta\sqrt{1-x}\le C_{12}\delta^2,$$

$$1-u \geq 1-x-\frac{\delta}{2}\varphi(x) = \frac{(1-x)^2-\dfrac{\delta^2}{4}(1-x^2)}{1-x+\dfrac{\delta}{2}\varphi(x)} \geq C_{13}\frac{(1-x)^2-\dfrac{\delta^2}{4}(1-x^2)}{\delta^2} =$$

$$= \frac{4+\delta^2}{4\delta^2}C_{13}(1-x)(x_*(\delta)-x) \geq C_{14}(x_*(\delta)-x).$$

Лема 2. *Нехай* $k \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, $h \in \left[0, \dfrac{1}{k}\right]$, $x \in D_{kh}^{+}$, $1 \leq p < +\infty$, q — *спряжений індекс до* p, $\dfrac{r}{2}+\alpha > -\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{r}{2}+\beta > -\dfrac{1}{p}$. *Тоді*

$$\left|\triangle^k_{\varphi(x)h}(f^{(r)},x)\right| \leq C_{15}\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p(J)}\left\|\left(x+\frac{kh}{2}\varphi(x)-\cdot\right)^{k-1}(1-\cdot)^{-\alpha-\frac{r+k}{2}}\right\|_{L_q(J)},$$

де $J := \left[x-\dfrac{kh}{2}\varphi(x), x+\dfrac{kh}{2}\varphi(x)\right]$.

Доведення. Позначимо $x_i := x-\dfrac{kh}{2}+ih$, $0 \leq i \leq k$,

$$p_j(u) := \prod_{i=0,\ i\neq j}^{k}(u-x_i), \quad 0 \leq j \leq k.$$

Використаємо відоме зображення для k-ї симетричної різниці за допомогою ядра Пеано (див. [4], формули (11) з § 4 і (14), (15) з § 6 гл. 3)

$$\triangle^k_h(f^{(r)},x) = h^k\int\limits_{x-\frac{kh}{2}}^{x+\frac{kh}{2}} f^{(k+r)}(u)B_{k-1}(u)du,$$

де

$$B_{k-1}(u) := k\sum_{j=0}^{k}\frac{\left(\max\{0,x_j-u\}\right)^{k-1}}{p_j(x_j)}$$

— ядро Пеано. Оскільки

$$|B_{k-1}(u)| \leq C_{16}h^{-k}\left(x+\frac{kh}{2}-u\right)^{k-1}, \quad u \in \left[x-\frac{kh}{2}, x+\frac{kh}{2}\right],$$

з наведеного зображення випливає оцінка

$$\left|\triangle^k_h(f^{(r)},x)\right| \leq C_{17}\int\limits_{x-\frac{kh}{2}}^{x+\frac{kh}{2}}\left|f^{(k+r)}(u)\right|\left(x+\frac{kh}{2}-u\right)^{k-1}du.$$

За нерівністю Гельдера

$$\left|\triangle^k_{\varphi(x)h}(f^{(r)},x)\right| \le C_{17} \int\limits_{x-\frac{kh}{2}\varphi(x)}^{x+\frac{kh}{2}\varphi(x)} \left| f^{(k+r)}(u)\left(x+\frac{kh}{2}\varphi(x)-u\right)^{k-1}\right| du \le$$

$$\le C_{17}\left\| f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p(J)} \left\| \varphi^{-k-r}w^{-1}_{\alpha,\beta}\left(x+\frac{kh}{2}\varphi(x)-\cdot\right)^{k-1}\right\|_{L_q(J)}.$$

Для $u\in J$ за умовою леми виконується оцінка $2\ge 1+u\ge 1-\dfrac{kh}{2}\ge\dfrac{1}{2}$, отже,

$$\varphi^{-k-r}(u)w^{-1}_{\alpha,\beta}(u)=(1-u)^{-\frac{k+r}{2}-\alpha}(1+u)^{-\frac{k+r}{2}-\beta}\le C_{18}(1-u)^{-\frac{k+r}{2}-\alpha}.$$

Лема 3. *Нехай* $k\in\mathbf{N}$, $r\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $1\le p<+\infty$, $\dfrac{r}{2}+\alpha>-\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{r}{2}+\beta>-\dfrac{1}{p}$, $f\in\mathbb{B}^{k+r}_p(\omega_{\alpha,\beta})$. *Тоді*

$$\int\limits_{D^+_{kh}\setminus D^+_{2kh}} \left| W^{r/2+\alpha,r/2+\beta}_{kh}(x)\triangle^k_{\varphi(x)h}(f^{(r)},x)\right|^p dx \le \left\| f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|^p_{L_p([-1,1])} h^{pk}.$$

Доведення. Оскільки для $x\in D^+_{kh}$ маємо $\dfrac{1}{2}\le 1+x-\dfrac{kh}{2}\varphi(x)\le 2$, то, враховуючи лему 1, отримуємо

$$\left| W^{r/2+\alpha,r/2+\beta}_{kh}(x)\right| \le C_{19}\left(1+x-\frac{kh}{2}\varphi(x)\right)^{r/2+\alpha} \le C_{20}\big(x_*(kh)-x\big)^{r/2+\alpha}.$$

Крім того, враховуючи, що $x+\dfrac{kh}{2}\varphi(x)-u\le 1-u$, з леми 2 знаходимо

$$\left|\triangle^k_{\varphi(x)h}(f^{(r)},x)\right| \le C_{21}\left\| f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p([-1,1])} M(x),$$

де

$$M(x):=\left\|(1-u)^{-\alpha-1-\frac{r-k}{2}}\right\|_{L_q(J)}, \qquad J:=\left[x-\frac{kh}{2}\varphi(x), x+\frac{kh}{2}\varphi(x)\right].$$

Отже,

$$\int\limits_{D^+_{kh}\setminus D^+_{2kh}} \left| W^{r/2+\alpha,r/2+\beta}_{kh}(x)\triangle^k_{\varphi(x)h}(f^{(r)},x)\right|^p dx \le C_{22}\left\| f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|^p_{L_p([-1,1])} N(h),$$

$$N(h):=\int\limits_{D^+_{kh}\setminus D^+_{2kh}} M^p(x)\big(x_*(kh)-x\big)^{p(r/2+\alpha)}dx.$$

Для оцінки норми $M(x)$ розглянемо три випадки.

Випадок 1: $\dfrac{k}{2}-\alpha-\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{p}>0$:

$$M(x)\le\left\|(1-u)^{-\alpha-1-\frac{r-k}{2}}\right\|_{L_q([x-\frac{kh}{2}\varphi(x),1])}=$$

$$=\left(1-x+\frac{kh}{2}\varphi(x)\right)^{\frac{k}{2}-\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{p}}.$$

За властивістю 6 леми 1 $1-x+\dfrac{kh}{2}\varphi(x)\le C_{23}h^2,\ x_*(kh)-x_*(2kh)\le C_{24}h^2$, тому

$$N(h)\le\int\limits_{x_*(2kh)}^{x_*(kh)}C_{25}(h^2)^{p\left(\frac{k}{2}-\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{p}\right)}(x_*(kh)-x)^{p(r/2+\alpha)}\,dx=$$

$$=C_{26}(h^2)^{p\left(\frac{k}{2}-\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{p}\right)}(x_*(kh)-x_*(2kh))^{p(r/2+\alpha)+1}\le C_{27}h^{pk}.$$

Випадок 2: $\dfrac{k}{2}-\alpha-\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{p}<0$:

$$M(x)\le\left\|(1-u)^{-\alpha-1-\frac{r-k}{2}}\right\|_{L_q([-1,x+\frac{kh}{2}\varphi(x)])}\le$$

$$\le C_{28}\left(1-x-\frac{kh}{2}\varphi(x)\right)^{\frac{k}{2}-\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{p}}.$$

За властивістю 6 леми 1 $1-x-\dfrac{kh}{2}\varphi(x)\ge C_{29}(x_*(kh)-x),\ x_*(kh)-x_*(2kh)\le C_{30}h^2$, тому

$$N(h)\le C_{31}\int\limits_{x_*(2kh)}^{x_*(kh)}(x_*(kh)-x)^{p\left(\frac{k}{2}-\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{p}+r/2+\alpha\right)}\,dx=$$

$$\le C_{32}(x_*(kh)-x_*(2kh))^{p\left(\frac{k}{2}-\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{p}+r/2+\alpha\right)+1}\le C_{33}h^{pk}.$$

Випадок 3: $\dfrac{k}{2}-\alpha-\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{p}=0$:

$$M(x)=\left(\ln\frac{1-x+\frac{kh}{2}\varphi(x)}{1-x-\frac{kh}{2}\varphi(x)}\right)^{1/q}\le\left(\frac{kh\varphi(x)}{1-x-\frac{kh}{2}\varphi(x)}\right)^{1/q}.$$

За властивістю 6 леми 1 $1-x-\dfrac{kh}{2}\varphi(x)\ge C_{34}(x_*(kh)-x),\ \varphi(x)\le C_{35}h,\ x_*(kh)-x_*(2kh)\le$ $\le C_{36}h^2$, тому

$$N(h)\le\int\limits_{x_*(2kh)}^{x_*(kh)}C_{37}(h^2)^{p/q}(x_*(kh)-x)^{-p/q+p(r/2+\alpha)}dx\le$$

$$\le C_{38}h^{2p/q}(x_*(kh)-x_*(2kh))^{-p/q+p(r/2+\alpha)+1}\le C_{39}h^{2p(r/2+\alpha)+2}=C_{39}h^{pk}.$$

Лема 4. *Для довільного заданого* $\delta\in(0,1]$ *розглянемо функції* $g_1(x)=x-\dfrac{\delta}{2}\varphi(x),\ g_2(x)=$ $=x+\dfrac{\delta}{2}\varphi(x),\ x\in[-1,1]$. *Тоді*:

1) *функції* $g_1,\ g_2$ *строго монотонно зростають на* $\big[-x_*(2\delta),x_*(2\delta)\big]$ *і мають обернені функції* $g_1^{-1},\ g_2^{-1}$;

2) $\big|g_1^{-1}(u)-g_2^{-1}(u)\big|\le\delta\varphi(u),\ u\in\big[-x_*(2\delta),x_*(2\delta)\big]$;

3) $|1-g_2^{-1}(u)|\ge\dfrac{4}{5}(1-u),\ u\in\big[-x_*(2\delta),x_*(2\delta)\big]$;

4) $\big\{(x,u)\mid g_1(x)\le u\le g_2(x),\ x\in\big[\delta,x_*(2\delta)-\delta\big]\big\}\subset\big\{(x,u)\mid g_2^{-1}(u)\le x\le g_1^{-1}(u),\ u\in$ $\in[g_1(\delta),g_2(x_*(2\delta)-\delta)]\big\}$.

Доведення. 1. Похідна цих функцій невід'ємна на $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{4+\delta^2}},\dfrac{2}{\sqrt{4+\delta^2}}\right]$, при $\delta\in(0,1]$ цей проміжок міститься в $\big[-x_*(2\delta),x_*(2\delta)\big]=\left[-\dfrac{1-\delta^2}{1+\delta^2},\dfrac{1-\delta^2}{1+\delta^2}\right]$.

2. Легко безпосередньо отримати, що

$$g_1^{-1}(u)=\frac{u+\dfrac{\delta}{2}\sqrt{1-u^2+\dfrac{\delta^2}{16}}}{1+\dfrac{\delta^2}{4}},\qquad g_2^{-1}(u)=\frac{u-\dfrac{\delta}{2}\sqrt{1-u^2+\dfrac{\delta^2}{16}}}{1+\dfrac{\delta^2}{4}}.$$

Різниця цих виразів задовольняє потрібну нерівність.

3. Маємо $\big|1-g_2^{-1}(u)\big|=\dfrac{1-u}{1+\dfrac{\delta^2}{4}}\ge\dfrac{4}{5}(1-u)$.

4. Для кожної точки з першої множини отримуємо $u\ge g_1(x)\ge g_1(\delta)$ і $u\le g_2(x)\le$ $\le g_2(x_*(2\delta)-\delta)$ внаслідок монотонності, тому $u\in\big[g_1(\delta),g_2(x_*(2\delta)-\delta)\big]$.

Крім того, з нерівності $g_1(x)\le u$ випливає, що $x\le g_1^{-1}(u)$, а з нерівності $g_2(x)\ge u$ — що $x\ge g_2^{-1}(u)$.

Лема 5. *Нехай* $k\in\mathbf{N},\ r\in\mathbf{N}\cup\{0\},\ 1\le p<+\infty,\ \dfrac{r}{2}+\alpha>-\dfrac{1}{p},\ \dfrac{r}{2}+\beta>-\dfrac{1}{p},\ f\in$ $\in\mathbb{B}_p^{k+r}(\omega_{\alpha,\beta})$. *Тоді*

$$\int\limits_{D_{2kh}^+}\left|W_{kh}^{r/2+\alpha,r/2+\beta}(x)\triangle_{\varphi(x)h}^k(f^{(r)},x)\right|^p dx\le C_{40}\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p([-1,1])}^p h^{pk}.$$

Доведення. Нехай $J=J(x):=\left[x-\dfrac{kh}{2}\varphi(x),x+\dfrac{kh}{2}\varphi(x)\right]$. При $x\in D_{2kh}^+,\ u\in J(x)$ за властивістю 1 леми 1 маємо $\dfrac{1}{2}(1-u)\le 1-x\le 2(1-u)$. Використовуючи лему 2, одержуємо

$$\left|\triangle_{\varphi(x)h}^k(f^{(r)},x)\right|\le C_{41}\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p(J)}\left\|\left(x+\frac{kh}{2}\varphi(x)-\cdot\right)^{k-1}(1-\cdot)^{-\alpha-\frac{r+k}{2}}\right\|_{L_q(J)}\le$$

$$\le C_{42}\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p(J)}\left\|\left(x+\frac{kh}{2}\varphi(x)-\cdot\right)^{k-1}(1-x)^{-\alpha-\dfrac{r+k}{2}}\right\|_{L_q(J)}=$$

$$= C_{43}\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p(J)}\big(kh\varphi(x)\big)^{k-\frac{1}{p}}(1-x)^{-\alpha-\frac{r+k}{2}} \le$$

$$\le C_{44}\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p(J)}h^{k-\frac{1}{p}}(1-x)^{-\alpha-\frac{r}{2}-\frac{1}{2p}} = \left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|_{L_p(J(x))}R(x).$$

Тому

$$\int\limits_{D^+_{2kh}}\left|W_{kh}^{r/2+\alpha,r/2+\beta}(x)\triangle^k_{\varphi(\cdot)h}(f^{(r)},x)\right|^p dx \le$$

$$\le \int\limits_{D^+_{2kh}}\left|W_{kh}^{r/2+\alpha,r/2+\beta}(x)R(x)\right|^p\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|^p_{L_p(J(x))}dx =$$

$$= \int\limits_0^{x_*(2kh)}\left(\int\limits_{x-\varphi(x)\frac{kh}{2}}^{x+\varphi(x)\frac{kh}{2}}\left|f^{(k+r)}(u)\varphi^{k+r}(u)w_{\alpha,\beta}(u)\right|^p\left|W_{kh}^{r/2+\alpha,r/2+\beta}(x)R(x)\right|^p du\right)dx \le$$

$$\le C_{45}\int\limits_0^{x_*(2kh)}\left(\int\limits_{x-\varphi(x)\frac{kh}{2}}^{x+\varphi(x)\frac{kh}{2}}\left|f^{(k+r)}(u)\varphi^{k+r}(u)w_{\alpha,\beta}(u)\right|^p h^{kp-1}(1-x)^{-1/2}du\right)dx \le$$

$$\le C_{45}\int\limits_{[0,\delta]\cup[x_*(2kh)-\delta,x_*(2kh)]}\left\|f^{(k+r)}\varphi^{k+r}w_{\alpha,\beta}\right\|^p_{L_p([-1,1])}h^{kp-1}(1-x)^{-1/2}dx+$$

$$+C_{45}\int\limits_{[\delta,x_*(2kh)-\delta]}\left(\int\limits_{x-\varphi(x)\frac{kh}{2}}^{x+\varphi(x)\frac{kh}{2}}\left|f^{(k+r)}(u)\varphi^{k+r}(u)w_{\alpha,\beta}(u)\right|^p h^{kp-1}(1-x)^{-1/2}du\right)dx.$$

Перший інтеграл задовольняє потрібну нерівність. Другий позначимо через $T(h)$ і змінимо в ньому порядок інтегрування. Для цього застосуємо лему 4 у випадку $\delta = kh$. Тоді отримаємо

$$T(h) \le \int\limits_{g_1(\delta)}^{g_2(x_*(2\delta)-\delta)}\left(\int\limits_{g_2^{-1}(u)}^{g_1^{-1}(u)}\left|f^{(k+r)}(u)\varphi^{k+r}(u)w_{\alpha,\beta}(u)\right|^p h^{kp-1}(1-x)^{-1/2}dx\right)du =$$

$$= 2\int\limits_{g_1(\delta)}^{g_2(x_*(2\delta)-\delta)}\left(\left|f^{(k+r)}(u)\varphi^{k+r}(u)w_{\alpha,\beta}(u)\right|^p h^{kp-1}\Big(\big(1-g_2^{-1}(u)\big)^{1/2}-(1-g_1^{-1}(u))^{1/2}\Big)\right)du =$$

$$= 2\int\limits_{g_1(\delta)}^{g_2(x_*(2\delta)-\delta)}\left(\left|f^{(k+r)}(u)\varphi^{k+r}(u)w_{\alpha,\beta}(u)\right|^p h^{kp-1}\frac{g_1^{-1}(u)-g_2^{-1}(u)}{\big(1-g_2^{-1}(u)\big)^{1/2}+\big(1-g_1^{-1}(u)\big)^{1/2}}\right)du \le$$

$$\le C_{46}\int\limits_{g_1(\delta)}^{g_2(x_*(2\delta)-\delta)}\left|f^{(k+r)}(u)\varphi^{k+r}(u)w_{\alpha,\beta}(u)\right|^p\frac{g_1^{-1}(u)-g_2^{-1}(u)}{\varphi(u)}h^{kp-1}du \le$$

$$\leq C_{47} h^{kp} \left\| f^{(k+r)} \varphi^{k+r} w_{\alpha,\beta} \right\|^p_{L_p([-1,1])}.$$

Доведення теореми. З лем 3 і 4 випливає, що

$$\left\| W_{kh}^{r/2+\alpha, r/2+\beta}(\cdot) \triangle^k_{\varphi(\cdot)h}(f^{(r)}, \cdot) \right\|_{L_p(D^+_{kh})} \leq C_{48} t^k \left\| f^{(k+r)} \varphi^{k+r} w_{\alpha,\beta} \right\|_{L_p([-1,1])}, \quad 0 < t \leq \frac{1}{k}.$$

Якщо застосувати цю нерівність до функції $g(x) = f(-x),\ x \in [-1,1]$, то отримаємо

$$\left\| W_{kh}^{r/2+\beta, r/2+\alpha}(\cdot) \triangle^k_{\varphi(\cdot)h}(f^{(r)}, \cdot) \right\|_{L_p(D^-_{kh})} \leq C_{49} t^k \left\| f^{(k+r)} \varphi^{k+r} w_{\beta,\alpha} \right\|_{L_p([-1,1])}, \quad 0 < t \leq \frac{1}{k},$$

де $D^-_{kh} := D_{kh} \cap [-1, 0]$. Враховуючи, що на $\alpha,\ \beta$ накладено однакові умови, їх можна поміняти місцями. Нарешті,

$$\left\| W_{kh}^{r/2+\alpha, r/2+\beta}(\cdot) \triangle^k_{\varphi(\cdot)h}(f^{(r)}, \cdot) \right\|_{L_p(D_{kh})} \leq \left\| W_{kh}^{r/2+\alpha, r/2+\beta}(\cdot) \triangle^k_{\varphi(\cdot)h}(f^{(r)}, \cdot) \right\|_{L_p(D^+_{kh})} +$$

$$+ \left\| W_{kh}^{r/2+\alpha, r/2+\beta}(\cdot) \triangle^k_{\varphi(\cdot)h}(f^{(r)}, \cdot) \right\|_{L_p(D^-_{kh})} \leq (C_{48} + C_{49}) t^k \left\| f^{(k+r)} \varphi^{k+r} w_{\alpha,\beta} \right\|_{L_p([-1,1])}.$$

З означення модуля неперервності випливає потрібна нерівність.

Автори висловлюють щиру вдячність члену-кореспонденту НАН України Ігорю Олександровичу Шевчуку за постановку задачі та увагу до роботи.

Література

1. K. A. Kopotun, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, *On moduli of smoothness with Jacobi weights*, Укр. мат. журн., **70**, № 3, 379 – 403 (2018).
2. K. A. Kopotun, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, *New moduli of smoothness: weighted DT moduli revisited and applied*, Constr. Approx., **42**, 129 – 159 (2015).
3. Z. Ditzian, V. Totik, *Moduli of smoothness*, Springer Ser. Comput. Math., **9**, Springer (1987).
4. К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Наука, Москва (1986).

Одержано 08.12.21