DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7057

УДК 517.53

М. В. Щеглов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОТОЧКОВА ОЦІНКА ЗНАКОЗБЕРІГАЮЧОГО НАБЛИЖЕННЯ НА КРИВИХ У КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ *

V. Andrievskii proved in 2014 that if a real-valued function $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ 0 < \alpha < 1,$ defined on a given smooth Jordan curve satisfying the Dini condition changes its sign finitely many times, then it can be approximated by a harmonic polynomial that changes its sign on the curve at the same points as f and the order of approximation error is the same as the classical Dzyadyk error of pointwise approximation. Applying the Andrievskii proof scheme, we generalize this result to the case of an arbitrary modulus of continuity $\omega(f,t)$ under the condition $\gamma\omega(f,2t) \geq \omega(f,t),$ where $\gamma = \mathrm{const} < 1.$

У 2014 році В. В. Андрієвський довів, що якщо задана на гладкій жордановій кривій (і яка задовольняє умову Діні) дійснозначна функція $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ 0 < \alpha < 1,$ змінює знак скінченне число разів, то її можна наблизити гармонічним поліномом, який змінює свій знак на кривій в тих же точках, що і f, і при цьому похибка наближення за порядком така ж, як і класична похибка Дзядика поточкового наближення. Користуючись схемою доведення В. В. Андрієвського, ми узагальнюємо цей результат на випадок довільного модуля неперервності $\omega(f,t)$, який задовольняє умову $\gamma\omega(f,2t) \geq \omega(f,t)$, де $\gamma = \mathrm{const} < 1.$

1. Позначення та формулювання основного результату. Нехай L — жорданова гладка крива на комплексній площині з кінцями z_0 і z^0. Для точок $\zeta_1, \zeta_2 \in L$ через $L(\zeta_1, \zeta_2)$ будемо позначати дугу кривої з кінцями в точках ζ_1 і ζ_2. Нехай $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_s\},\ s \in \mathbb{N},$ — набір попарно різних точок на $L/\{z_0, z^0\}$, пронумерованих у порядку „від z_0 до z^0," тобто

$$z_j \in L(z_{j-1}, z_{j+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

де $z_{s+1} := z^0$.

Позначимо через $\Delta^{(0)}(Z)$ множину дійснозначних неперервних на L функцій таких, що $(-1)^j f(z) \geq 0,\ z \in L(z_j, z_{j+1}),\ j = 0, 1, \ldots, s.$

Для $z \in L$ і $\delta > 0$ позначимо $\rho_\delta(z) := \delta\sqrt{\delta^2 + |z - z_0||z - z^0|}$.

Також будемо писати, що $L \in \mathcal{D}$, якщо крива L задовольняє умову Діні, тобто $|\beta(\zeta_2) - \beta(\zeta_1)| < h(|\zeta_2 - \zeta_1|)$, де $\beta(\zeta)$ — величина кута нахилу дотичної до кривої L в точці ζ, а h — зростаюча функція така, що $\displaystyle\int_0^1 x^{-1}h(x)dx < +\infty.$

Позначимо також через $\mathbb{P}_n$ множину алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$, а через $\mathbb{H}_n := \{\Re p_n, p_n \in \mathbb{P}_n\}$ множину гармонічних поліномів степеня $\leq n$.

Будемо писати, що $f \in \Omega^{(\gamma)}$, де $0 < \gamma = \mathrm{const} < 1$, якщо f — неперервна функція на L і для її модуля неперервності ω виконується нерівність

$$\gamma\omega(f, 2t) \geq \omega(f, t). \tag{1}$$

Основним результатом роботи є така теорема.

* Підтримано Національним фондом досліджень України (проєкт 2020.02/0155).

Теорема. *Для кожних кривої $L \in \mathcal{D}$, числа $\gamma \in (0,1)$ і набору Z точок $z_j \in L$ існують такі сталі $N = N(L, Z, \gamma)$ і $C = C(L, Z, \gamma)$, що для довільних функції $f \in \Delta^{(0)} \cap \Omega^{(\gamma)}$ і $n > N$ існує поліном $h_n \in \mathbb{H}_n \cap \Delta^{(0)}$ такий, що*

$$|f(z) - h_n(z)| \leq C\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)), \quad z \in L,$$

де $\omega(t) := \omega(f, t)$ — модуль неперервності функції f на L.

Ця теорема узагальнює результат В. В. Андрієвського [1], отриманий для випадку $\omega(t) \leq \leq t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Ми будемо дотримуватись схеми доведення В. В. Андрієвського [1], дещо спростивши її в пункті 3.

Далі через $c, c_1, c_2, \ldots$ будемо позначати сталі, які можуть залежати лише від Z і L. Будемо писати, що $a \preceq b$, якщо $a \leq cb$, а також $a \asymp b$, якщо одночасно $a \preceq b$ і $b \preceq a$.

2. Побудова функції f_δ. Позначимо $Z^* := Z \cup \{z_0, z^0\} = \{z_j\}_{j=0}^{s+1}$. Оскільки L — гладка крива, то існує таке число

$$\delta_0 < \frac{1}{2} \min_{i \neq j} |z_i - z_j|,$$

що для всіх $j = 0, 1, \ldots, s+1$ і точок $z \in L$ таких, що $|z - z_j| \leq \delta_0$, маємо

$$|\beta(z) - \beta(z_j)| \leq \frac{\pi}{16}. \tag{2}$$

Для кожних $j = 1, 2, \ldots, s$ і $\delta \in (0, \delta_0)$ позначимо через $z'_j := z'_j(\delta)$ таку точку $z'_j \in \in L(z_{j-1}, z_j)$, що $|z_j - z'_j| = \delta$; через $z''_j := z''_j(\delta)$ таку точку $z''_j \in L(z_j, z_{j+1})$, що $|z_j - z''_j| = \delta$, $J_j = J_j(\delta) = L(z'_j, z''_j)$, і

$$l_j(z) := l_j(z, \delta) = \frac{z - z_j}{z'_j - z''_j} \left(\frac{z - z'_j}{z''_j - z_j} + \frac{z - z''_j}{z'_j - z_j} \right).$$

Для $\delta \in (0, \delta_0)$ позначимо

$$f_\delta(z) = \begin{cases} (-1)^{j+1}\omega(\delta) l_j(z), & \text{якщо} \quad z \in J_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s; \\ (-1)^j \max(|f(z)|, \omega(\delta)), & \text{якщо} \quad z \in L(z''_j, z'_{j+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, s-1; \\ \max\left(f(z), \omega\left(\dfrac{\delta \rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z'_1)} \right) \right), & \text{якщо} \quad z \in L(z_0, z'_1); \\ (-1)^s \max\left(f(z), \omega\left(\dfrac{\delta \rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z''_s)} \right) \right), & \text{якщо} \quad z \in L(z''_s, z_{s+1}). \end{cases}$$

Лема 1. *Виконуються нерівності*

$$|f(z) - f_\delta(z)| \preceq \omega(\rho_\delta(z)), \quad z \in L, \tag{3}$$

$$(-1)^{j+1} \Re f_\delta(z) \succeq \frac{\omega(\delta)}{\delta} |z - z_j|, \quad z \in (z'_j, z_j), \tag{4}$$

$$(-1)^j \Re f_\delta(z) \succeq \frac{\omega(\delta)}{\delta} |z - z_j|, \quad z \in (z_j, z''_j), \tag{5}$$

$$|f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)| \preceq \omega(|\zeta - z|), \quad \zeta, z \in L. \tag{6}$$

Доведення. Зауважимо, що $\rho_\delta(z) \asymp \delta$, якщо $|z - z_0| > \delta_0$ і $|z - z^0| > \delta_0$.

Спочатку перевіримо нерівність (3). Для $z \in J_j$ маємо

$$|f(z) - f_\delta(z)| \le |f(z)| + |f_\delta(z)| = |f(z) - f(z_j)| + \omega(\delta)|l_j(z)| \preceq \omega(\delta) \asymp \omega(\rho_\delta(z)).$$

Для інших точок кривої єдиним нетривіальним випадком є той, коли $|f(z)| < |f_\delta(z)|$. Однак у цьому випадку $|f_\delta(z)| \preceq \omega(\rho_\delta(z))$, отже, $|f(z) - f_\delta(z)| \le 2|f_\delta(z)| \preceq \omega(\rho_\delta(z))$.

Нерівності (4), (5) випливають з умови (2), яка обумовлює нерівності

$$\Re l_j(z) \succeq \frac{|z - z_j|}{\delta}, \text{ якщо } z \in L(z'_j, z_j), \text{ і } -\Re l_j(z) \succeq \frac{|z - z_j|}{\delta}, \text{ якщо } z \in L(z_j, z''_j).$$

Залишилось перевірити нерівність (6). З огляду на адитивність модуля неперервності зрозуміло, що нерівність (6) достатньо довести у випадку, коли обидві точки z, ζ належать одному з проміжків: $J_j, L(z''_j, z_{j+1}), L(z_0, z'_1)$ або $L(z''_s, z_{s+1})$.

Отже, нехай $z, \zeta \in J_j$, тоді $|l_j(\zeta) - l_j(z)| \preceq \dfrac{|\zeta - z|}{\delta}$, звідки

$$|f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)| \preceq \omega(\delta)\frac{|\zeta - z|}{\delta} \preceq \omega(|\zeta - z|).$$

Розглянемо тепер випадок, коли $z, \zeta \in L(z''_j, z'_{j+1})$ для деякого $j = 1, 2, \ldots, s-1$. Єдиним нетривіальним випадком є той, коли $(|f(z)| - \omega(\delta))(|f(\zeta)| - \omega(\delta)) < 0$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $|f(z)| < \omega(\delta) < |f(\zeta)|$. Тоді

$$|f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)| = |f_\delta(\zeta)| - \omega(\delta) < |f(\zeta) - f(z)| \le \omega(|\zeta - z|).$$

Нехай тепер $z, \zeta \in L(z_0, z'_1)$. У цьому випадку єдиним нетривіальним є той, коли $f - f_\delta$ — від'ємне число хоча б в одній із точок z чи ζ. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $f(z) < f_\delta(z) = \omega\left(\dfrac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z'_1)}\right)$.

Тоді для $f_\delta(\zeta)$ є дві можливості. Якщо $f(\zeta) < f_\delta(\zeta) = \omega\left(\dfrac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z'_1)}\right)$, то

$$|f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)| = \left|\omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z'_1)}\right) - \omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z'_1)}\right)\right| \le$$

$$\le \omega\left(\frac{\delta|\rho_\delta(\zeta) - \rho_\delta(z)|}{\rho_\delta(z'_1)}\right) \preceq \omega\left(\frac{\delta|\zeta - z|}{\rho_\delta(z'_1)}\right) \preceq \omega(|\zeta - z|),$$

де ми використали нерівність

$$|\rho_\delta(\zeta) - \rho_\delta(z)| \le \frac{1}{2}||\zeta - z_0||\zeta - z^0| - |z - z_0||z - z^0|| \le$$

$$\le \frac{1}{2}|\zeta - z||\zeta + z - (z^0 + z_0)| \preceq |\zeta - z|.$$

У випадку, коли $f_\delta(\zeta) = f(\zeta) > \omega\left(\dfrac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z'_1)}\right)$, маємо

$$f_\delta(\zeta) - f_\delta(z) \le f(\zeta) - f(z) \le \omega(|\zeta - z|)$$

і

$$f_\delta(z) - f_\delta(\zeta) \le \omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(z)}{\rho_\delta(z_1')}\right) - \omega\left(\frac{\delta\rho_\delta(\zeta)}{\rho_\delta(z_1')}\right) \preceq \omega(|\zeta - z|),$$

тобто $|f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)| \preceq \omega(|\zeta - z|)$.

Доведення випадку $z, \zeta \in L(z_s'', z_{s+1})$ є аналогічним.

Лему 1 доведено.

3. Наближення функції f_δ. Умова $\int_0^1 x^{-1}h(x)dx < +\infty$ означає, що крива L належить класу множин B_k, який означено у [2, с. 392] (див. також [3, с. 178]). А отже, для кривої L справджується теорема 9.7.1 із [2] (див. також теорему 21.1 із [3]), частковим випадком якої є така лема.

Лема 2. *Нехай $r = 6$, $l = 5$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують многочленні ядра Дзядика вигляду*

$$D_n^+(\zeta, z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^+(\zeta) z^j, \; D_n^-(\zeta, z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^-(\zeta) z^j, \quad D_n := D_n^+ - D_n^-,$$

де $\alpha_j^\pm$ — неперервні на L функції, такі, що

$$\int\limits_L D_n(\zeta, z)d\zeta = 1; \tag{7}$$

для всіх $z \in L$

$$\left|\int\limits_L (\zeta - z)D_n(\zeta, z)d\zeta\right| \preceq \rho^l_{\frac{1}{n}}(z), \quad \left|\int\limits_L (\zeta - z)\frac{\partial D_n(\zeta, z)}{\partial z}d\zeta - 1\right| \preceq \rho^l_{\frac{1}{n}}(z), \tag{8}$$

$$\left|\int\limits_L (\zeta - z)^2 D_n(\zeta, z)d\zeta\right| \preceq \rho^l_{\frac{1}{n}}(z), \quad \left|\int\limits_L (\zeta - z)^2\frac{\partial D_n(\zeta, z)}{\partial z}d\zeta\right| \preceq \rho^l_{\frac{1}{n}}(z). \tag{9}$$

Для всіх $\zeta, z \in L$

$$|1 - (\zeta - z)D_n^\pm(\zeta, z)| \preceq \frac{\rho^{r-1}_{\frac{1}{n}}(z)}{|\zeta - z|^{r-1}}, \quad |D_n^\pm(\zeta, z)| \preceq \frac{1}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)}, \tag{10}$$

отже,

$$|D_n(\zeta, z)| \preceq \frac{\rho^{r-1}_{\frac{1}{n}}(z)}{(|\zeta - z| + \rho_{\frac{1}{n}}(z))^r}, \quad \zeta, z \in L, \tag{11}$$

а також

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}D_n(\zeta, z)\right| \preceq \frac{\rho^{r-2}_{\frac{1}{n}}(z)}{(|\zeta - z| + \rho_{\frac{1}{n}}(z))^r}, \quad \zeta, z \in L. \tag{12}$$

Позначимо

$$t_n(z) = \int\limits_L f_\delta(\zeta) D_n(\zeta, z) d\zeta.$$

Лема 3. *Нехай* δ *та* n *такі, що* $\max_{z\in L}\rho_{\frac{1}{n}}(z) < \delta < \delta_0$. *Тоді*

$$|f_\delta(z) - t_n(z)| \preceq \omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)), \quad z \in L, \tag{13}$$

$$|f_\delta(z) - t_n(z)| \preceq \frac{\omega(1/n)}{(n\delta)^2}, \quad z \in \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j, \tag{14}$$

$$|f'_\delta(z) - t'_n(z)| \preceq \frac{\omega(1/n)}{n^3\delta^4}, \quad z \in \bigcup_{j=1}^{s} \tilde{J}_j, \tag{15}$$

де $\tilde{J}_j := \tilde{J}_j(Z,\delta) = \left\{ z \in L \,||z - z_j| \le \dfrac{\delta}{10} \right\}$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Доведення. Для зручності будемо писати ρ замість $\rho_{\frac{1}{n}}(z)$. Зауважимо, що $\rho_{\frac{1}{n}}(z) \asymp \dfrac{1}{n}$ та, відповідно, $\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)) \asymp \omega\left(\dfrac{1}{n}\right)$, якщо $z \in L(z'_1, z''_s)$. Як відомо, нерівність (13) безпосередньо випливає з нерівності (6). Справді, використовуючи (7) і (11), отримуємо

$$|t_n(z) - f_\delta(z)| = \left| \int\limits_L (f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)) D_n(\zeta, z) d\zeta \right| \preceq \int\limits_L \omega(|\zeta - z|) \frac{\rho^{r-1}}{(|\zeta - z| + \rho)^r} |d\zeta| =$$

$$= \left(\int\limits_{\zeta\in L: |z-\zeta|\le\rho} + \int\limits_{\zeta\in L\,:\, |z-\zeta|\ge\rho} \right) \omega(|\zeta - z|) \frac{\rho^{r-1}}{(|\zeta - z| + \rho)^r} |d\zeta| \preceq$$

$$\preceq \omega(\rho) + \int\limits_{\zeta\in L\,:\, |z-\zeta|\ge\rho} \frac{\omega(\rho)|\zeta - z|}{\rho} \frac{\rho^{r-1}}{|\zeta - z|^r} |d\zeta| =$$

$$= \omega(\rho) + \omega(\rho)\rho^{r-2} \int\limits_{\zeta\in L\,:\, |z-\zeta|\ge\rho} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-1}} \preceq \omega(\rho).$$

Далі, нехай $z \in J_j$, позначимо $\mathcal{L}(\zeta) := (-1)^{j+1}\omega(\delta) l_j(\zeta)$, тоді $f_\delta(z) = \mathcal{L}(z)$.

Доведемо (14). Маємо

$$t_n(z) - f_\delta(z) = \int\limits_L f_\delta(\zeta) D_n(\zeta, z) d\zeta - f_\delta(z) =$$

$$= \int\limits_L (f_\delta(\zeta) - \mathcal{L}(\zeta)) D_n(\zeta, z) d\zeta + \left(\int\limits_L \mathcal{L}(\zeta) D_n(\zeta, z) d\zeta - f_\delta(z) \right) =:$$

$$=: \int\limits_{L\setminus J_j} (f_\delta(\zeta) - \mathcal{L}(\zeta)) D_n(\zeta, z) d\zeta + I_1(z) =$$

$$= \int\limits_{L\setminus J_j} (f_\delta(\zeta) - f_\delta(z)) D_n(\zeta, z) d\zeta + \int\limits_{L\setminus J_j} (\mathcal{L}(z) - \mathcal{L}(\zeta)) D_n(\zeta, z) d\zeta + I_1(z) =:$$

$$=: I_3(z) + I_2(z) + I_1(z).$$

Тепер інтеграл $I_3(z)$ оцінимо так само, як при доведенні нерівності (13), і отримаємо

$$|I_3| \preceq \int\limits_{L\setminus J_j} \omega(|\zeta - z|)\frac{\rho^{r-1}}{(|\zeta - z| + \rho)^r}|d\zeta| \preceq \omega(\rho)\rho^{r-2} \int\limits_{\zeta\in L\,:\,|\zeta-z|\geq\frac{9}{10}\delta} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-1}} \preceq \frac{\omega(\rho)\rho^{r-2}}{\delta^{r-2}}.$$

Далі, використовуючи нерівність

$$|l_j(\zeta) - l_j(z)| \preceq \frac{|\zeta - z|^2}{\delta^2}, \quad \zeta \in L \setminus J_j, \tag{16}$$

знаходимо

$$|I_2| \preceq \frac{\omega(\delta)\rho^{r-1}}{\delta^2} \int\limits_{L\setminus J_j} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-2}} \preceq \frac{\omega(\delta)\rho^{r-1}}{\delta^{r-1}} \preceq \frac{\omega(\rho)\rho^{r-2}}{\delta^{r-2}}.$$

З (8) і (9) випливає, що

$$\left|\int\limits_L l_j(\zeta)D_n(\zeta, z)d\zeta - l_j(z)\right| \preceq \frac{\rho^l}{\delta^2},$$

звідки

$$|I_1(z)| \preceq \frac{\omega(\delta)\rho^l}{\delta^2} \leq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta} \preceq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta^{l-1}}.$$

Додаючи оцінки для I_1, I_2 і I_3 та враховуючи, що $\rho \preceq \dfrac{1}{n}$, отримуємо (14).

Аналогічно доведемо (15). Позначимо $D'_n(\zeta, z) = \dfrac{\partial}{\partial z}D_n(\zeta, z)$. Маємо

$$t'_n(z) - f'_\delta(z) = \int\limits_L f_\delta(\zeta)D'_n(\zeta, z)d\zeta - f'_\delta(z) =$$

$$= \int\limits_L (f_\delta(\zeta) - \mathcal{L}(\zeta))D'_n(\zeta, z)d\zeta + \left(\int\limits_L \mathcal{L}(\zeta)D'_n(\zeta, z)d\zeta - f'_\delta(z)\right) =:$$

$$=: \int\limits_{L\setminus J_j} (f_\delta(\zeta) - \mathcal{L}(\zeta))D'_n(\zeta, z)d\zeta + I_1^*(z) =$$

$$= \int\limits_{L\setminus J_j} (f_\delta(\zeta) - f_\delta(z))D'_n(\zeta, z)d\zeta + \int\limits_{L\setminus J_j} (\mathcal{L}(z) - \mathcal{L}(\zeta))D'_n(\zeta, z)d\zeta + I_1^*(z) =:$$

$$=: I_3^*(z) + I_2^*(z) + I_1^*(z).$$

Використовуючи (12) замість (11), отримуємо

$$|I_3^*| \preceq \int\limits_{L\setminus J_j} \omega(|\zeta - z|)\frac{\rho^{r-2}}{(|\zeta - z| + \rho)^r}|d\zeta| \preceq \omega(\rho)\rho^{r-3} \int\limits_{\zeta\in L\,:\,|\zeta - z|\geq \frac{9}{10}\delta} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-1}} \preceq \frac{\omega(\rho)\rho^{r-3}}{\delta^{r-2}}.$$

Ще раз використовуючи (16), знаходимо

$$|I_2^*| \preceq \frac{\omega(\delta)\rho^{r-2}}{\delta^2} \int\limits_{L\setminus J_j} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{r-2}} \preceq \frac{\omega(\delta)\rho^{r-2}}{\delta^{r-1}} \preceq \frac{\omega(\rho)\rho^{r-3}}{\delta^{r-2}}.$$

Нарешті, з (8) і (9) знову випливає, що

$$\left|\int\limits_L l_j(\zeta)D_n'(\zeta, z)d\zeta - l_j'(z)\right| \preceq \frac{\rho^l}{\delta^2},$$

звідки

$$|I_1^*(z)| \preceq \frac{\omega(\delta)\rho^l}{\delta^2} \leq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta} \preceq \frac{\omega(\rho)\rho^{l-1}}{\delta^l}.$$

Аналогічно, додаючи отримані оцінки для I_1^*, I_2^* і I_3^*, отримуємо (15).

Лему 3 доведено.

4. Доведення основного результату. З [1] відомо, що існують поліноми V_j, $j = 1, 2, \ldots, s$, степеня $\leq \dfrac{1}{\delta}$ такі, що

$$V_j(z_j) = 1,$$

$$|V_j(z)| \preceq \left(\frac{\rho_\delta(z)}{|z - z_j| + \rho_\delta(z)}\right)^3, \quad z \in L,$$

$$|V_j'(z)| \preceq \frac{1}{\delta}, \quad z \in \tilde{J}_j, j = 1, 2, \ldots, s,$$

і шуканим поліномом є поліном h_n, означений нижче для відповідного вибору δ:

$$q_n(z) := (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_j),$$

$$u_n(z) := \sum_{j=1}^{s} \frac{q(z)}{(z - z_j)q'(z_j)}V_j(z)t_n(z_j),$$

$$p_n(z) := t_n(z) - u_n(z), \quad h_n(z) := \Re p_n(z).$$

Справді, з (14) випливає, що $|t_n(z_j)| \leq \dfrac{\omega(1/n)}{(n\delta)^2}$. Тому

$$|u_n(z)| \preceq \frac{1}{(n\delta)^2}\omega(\frac{1}{n}), \quad z \in L,$$

і

$$|u_n(z)| \preceq \frac{1}{(n\delta)^2}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\rho_\delta^3(z) \preceq \frac{\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z))}{n^3\delta^2\rho_{\frac{1}{n}}(z)}\rho_\delta^3(z) \preceq \frac{\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z))}{n}, \quad z \in L \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{s} \tilde{J}_j\right).$$

Тут використано нерівність

$$\frac{\rho_\delta(z)}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)} \preceq \frac{\delta^2}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2} = (n\delta)^2. \tag{17}$$

Тепер, якщо $z \in \tilde{J}_j$, то

$$\left| f'_\delta(z) - t'_n(z) + \left(\frac{q(z)}{(z-z_j)q'(z_j)} V_j(z) t_n(z_j) \right)' \right| \preceq \frac{\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^3\delta^4} + \frac{1}{\delta}|t_n(z_j)| \preceq$$

$$\preceq \frac{\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^3\delta^4} + \frac{\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3} \preceq \frac{\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3}$$

і при $k \neq j$

$$\left| \frac{q(z)}{(z-z_k)q'(z_k)} V_k(z) t_n(z_k) \right| \preceq |z-z_j||V_k(z)t_n(z_k)| \preceq |z-z_j|\delta^3|t_n(z_k)| \preceq \frac{|z-z_j|\delta\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2}.$$

Отже,

$$|f_\delta(z) - p_n(z)| \le \left| f_\delta(z) - t_n(z) + \frac{q(z)}{(z-z_j)q'(z_j)} V_j(z) t_n(z_j) \right| +$$

$$+ \sum_{k=1, k\neq j}^{s} \left| \frac{q(z)}{(z-z_k)q'(z_k)} V_k(z) t_n(z_k) \right| \preceq$$

$$\preceq \frac{|z-z_j|\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3} + \frac{|z-z_j|\delta\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2} \preceq \frac{|z-z_j|\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3}, \tag{18}$$

тобто $|f_\delta(z) - p_n(z)| \le c_1 \dfrac{|z-z_j|\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3}$ для $z \in \tilde{J}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Також з (4) і (5) одержуємо $|\Re f_\delta(z)| \ge c_2 \dfrac{\omega(\delta)}{\delta}|z - z_j|$. Тоді за умови $n\delta > \sqrt{\dfrac{c_1}{c_2}}$ отримуємо

$$|\Re f_\delta(z) - h_n(z)| \le |f_\delta(z) - p_n(z)| \le$$

$$\le c_1 \frac{|z-z_j|\omega\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\delta^3} < c_2 \frac{\omega(\delta)}{\delta}|z-z_j| \le |\Re f_\delta(z)| \quad \text{для} \quad z \in \tilde{J}_j,$$

звідки

$$\Re f_\delta(z) h_n(z) \ge 0, \quad z \in \tilde{J}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{19}$$

Далі, для інших $z \in L$ скористаємось (13) і (17):

$$|f_\delta(z)-p_n(z)|\le|f_\delta(z)-t_n(z)|+|u_n(z)|\preceq\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z))+\frac{\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z))}{n}\preceq\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)),$$

тобто

$$|f_\delta(z)-p_n(z)|\le c_3\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)),\quad z\in L\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{s}\tilde{J}_j\right). \tag{20}$$

Також маємо

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z)\le\frac{1}{n\delta}\rho_\delta(z). \tag{21}$$

Нагадаємо, що для $z\in L\setminus(\cup_{j=1}^{s}\tilde{J}_j)$ виконується нерівність

$$|\Re f_\delta(z)|\ge c_4\omega(\rho_\delta(z)).$$

Отже, тоді за умови $n\delta>2^k$, де $k\in\mathbb{N}$ таке, що $\gamma^k<\dfrac{c_4}{c_3}$, з (20), (21) і (1) отримуємо

$$|\Re f_\delta(z)-h_n(z)|\le|f_\delta(z)-p_n(z)|\le c_3\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z))\le$$

$$\le c_3\omega\left(\frac{1}{2^k}\rho_\delta(z)\right)<c_4\omega(\rho_\delta(z))\le|\Re f_\delta(z)|.$$

Таким чином, і для $z\in L\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{s}\tilde{J}_j\right)$

$$\Re f_\delta(z)h_n(z)\ge 0. \tag{22}$$

Нагадаємо, що для використання (13)–(15) необхідно, щоб $\max_{z\in L}\rho_{\frac{1}{n}}(z)<\delta<\delta_0$. Тому накладемо ще умову, щоб $n\delta>c_5$, де

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z)\le c_5\frac{1}{n}.$$

Зафіксуємо тепер $\varepsilon:=\dfrac{1}{n\delta}$ так, щоб для нього виконувались всі зазначені в цьому пункті умови. Тоді для довільного $n>N:=N(L,Z,\gamma)=\left[\dfrac{1}{\delta_0\varepsilon}\right]+1$ з (19) і (22) випливає, що $h_n\in\Delta^{(0)}(Z)$, а з (3), (17), (18), (20) — що

$$|f(z)-h_n(z)|\le|f(z)-\Re f_\delta(z)|+|\Re f_\delta(z)-h_n(z)|\preceq\omega(\rho_\delta(z))+\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z))\preceq\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)).$$

Звідси отримуємо основний результат статті.

Література

1. V. V. Andrievskii, *Pointwise copositive polynomial approximation on arcs in the complex plane*, Comput. Methods and Funct. Theory, **13**, 493 – 508 (2013).
2. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, Москва (1977).
3. И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наук. думка, Київ (1992).

Одержано 24.12.21