DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7124

УДК 517.5

Ю. П. Бабич, Т. Ф. Михайлова (Укр. держ. ун-т науки і технологій, Дніпро)

ТОЧНІ ОЦІНКИ НАЙКРАЩИХ НАБЛИЖЕНЬ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ В $C_{2\pi}$ У ТЕРМІНАХ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ ЇХНІХ ПОХІДНИХ

For the best approximations of $e_{n-1}(f)$ functions in $C^1_{2\pi}$ by trigonometric polynomials, Zhuk proved the exact Jackson inequality $e_{n-1}(f) \leq \dfrac{\pi}{4n}\omega\left(f', \dfrac{\pi}{n}\right)$. In this paper, we prove the following version of Jackson's exact inequality: $e_{n-1}(f) \leq \dfrac{\pi}{4n}\left(\dfrac{1}{2}\omega\left(f', \dfrac{\pi}{2n}\right) + \dfrac{1}{2}\omega\left(f', \dfrac{\pi}{n}\right)\right)$.

Для найкращих наближень $e_{n-1}(f)$ функцій із $C^1_{2\pi}$ тригонометричними поліномами В. В. Жук довів точну нерівність Джексона $e_{n-1}(f) \leq \dfrac{\pi}{4n}\omega\left(f', \dfrac{\pi}{n}\right)$. У даній роботі доведено такий варіант точної нерівності Джексона: $e_{n-1}(f) \leq \dfrac{\pi}{4n}\left(\dfrac{1}{2}\omega\left(f', \dfrac{\pi}{2n}\right) + \dfrac{1}{2}\omega\left(f', \dfrac{\pi}{n}\right)\right)$.

Нехай $C[-\pi,\pi]$ — простір дійснозначних неперервних 2π-періодичних функцій з нормою $\|f\| = \max\{|f(x)|; x \in R^1\}$,

$$e_{n-1}(f) = \inf_{\{c_k\}}\left\{\left\| f(x) - \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} c_k e^{ikx}\right\|; c_{-k} = \overline{c}_k\right\}$$

— найкраще наближення f підпростором тригонометричних поліномів $\{T_{n-1}\}$ степеня не вищого за $n-1$, $n \in \mathbb{N}$; $\omega(f,h) = \sup\{\|\Delta_t f\|; |t| \leq h\}$, $\Delta_t f(x) = f\left(x + \dfrac{t}{2}\right) - f\left(x - \dfrac{t}{2}\right)$ — модуль неперервності f.

Для оцінювання зверху величини $e_{n-1}(f)$ у термінах значень модуля неперервності f використовується нерівність Джексона – Корнєйчука [1, 2] (§ 9.2) $e_{n-1}(f) \leq \omega\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)$, яка для всіх $n \in \mathbb{N}$ є непокращуваною; точніше кажучи, для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \sup_{\substack{f \in C[-\pi,\pi] \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)} \leq 1.$$

У роботі [3] доведено такий варіант оцінок зверху $e_{n-1}(f)$ у термінах лінійної комбінації двох значень модуля неперервності:

$$1 - \frac{1}{2n} \leq \sup_{\substack{f \in C[-\pi,\pi] \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\dfrac{1}{2}\left(\omega\left(f, \dfrac{\pi}{2n}\right) + \omega\left(f, \dfrac{\pi}{n}\right)\right)} \leq 1.$$

Для неперервно диференційовних функцій f, $f \in C^1[-\pi,\pi]$, в [4] доведено, що для всіх n

$$\sup_{\substack{f \in C[-\pi,\pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f', \dfrac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi}{4n}. \tag{1}$$

Подальші результати для функцій f з $C^r[-\pi,\pi]$, $r \in \mathbb{N}$, див. у [4, 5].

Ми доведемо аналог рівності (1) для лінійної комбінації двох значень $\omega(f', h)$.

Теорема. *Для всіх $n \in \mathbb{N}$ справджується рівність*

$$\sup_{\substack{f \in C[-\pi,\pi] \\ f \neq \text{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\dfrac{1}{2}\left(\omega\left(f', \dfrac{\pi}{2n}\right) + \omega\left(f', \dfrac{\pi}{n}\right)\right)} = \frac{\pi}{4n}. \tag{2}$$

Спочатку доведемо таку лему.

Лема. *Нехай $\mathcal{L}$ — лінійний оператор згортки з парним ядром $K(t)$:*

$$\mathcal{L}(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t) f(x+t)dt, \ K(-t) = K(t), \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t)dt = 1.$$

Тоді для $f \in C^1[-\pi,\pi]$ виконується нерівність

$$e_{n-1}(f - \mathcal{L}(f)) \leq \int\limits_0^{\pi} \omega(f',t)|K(t)| \min\left(t; \frac{\pi}{n}\right) dt. \tag{3}$$

Доведення. Із властивостей ядра випливає, що

$$f(x) - \mathcal{L}(f,x) = \int\limits_0^{\pi} K(t)(-\Delta_t^2 f(x))dt.$$

Для оцінювання найкращого наближення використаємо співвідношення двоїстості [2] (§ 2.5)

$$e_{n-1}(f) = \sup\{\langle f,g\rangle; g \in H_L^n\},$$

$$\langle f,g\rangle := \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

$$H_L^n = \left\{ g \colon \|g\|_1 := \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x)|dx = 1; g \perp \{T_{n-1}\} \right\}.$$

Нехай g_1 — періодична первісна функції g з H_L^n. Тоді

$$e_{n-1}(f - \mathcal{L}(f)) = \sup_{g \in H_L^1} \int\limits_0^{\pi} K(t)\langle \Delta_t^2 f, g\rangle dt =$$

$$= \sup_{g \in H_L^1} \int\limits_0^{\pi} K(t)\langle \Delta_t f', \Delta_t g_1\rangle dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} |K(t)|\omega(f',t) \sup_{g\in H_L^n} \omega(g_1,t)_1 dt,$$

де $\omega(g_1,t)_1 := \sup\{\|\Delta_y g_1\|_1; |y| \leq t\}$. Оскільки $g_1 \perp \{T_{n-1}\}$, то з нерівності Фавара [2] (§ 5.3) випливає, що $\|\Delta_t g_1\|_1 \leq 2\|g_1\|_1 \leq 2\dfrac{\pi}{2n}\|g\|_1 = \dfrac{\pi}{n}$. Окрім того, g_1 задовольняє умову Ліпшиця в L_1: $\|\Delta_1 g_1\|_1 \leq \|g_1'\|_1|t| = |t|$. Звідси випливає (3).

Лему доведено.

Доведення теореми. За допомогою доведеної леми оцінимо величину $e_{n-1}(f - S_h(f))$, де $S_h(f,x) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x+t)dt$ — середнє Стєклова f із кроком $h > 0$. Якщо $h \leq \dfrac{2\pi}{n}$, то

$$e_{n-1}(f - S_h(f)) \leq \frac{1}{h}\int_0^{\frac{h}{2}} \omega(f',t)t dt \leq \frac{h}{8}\omega\left(f', \frac{h}{2}\right).$$

Далі, за теоремою Фавара [2] (§ 5.3)

$$e_{n-1}(S_h f) \leq \frac{\pi^2}{8n^2}\frac{\omega(f',h)}{h}.$$

Тому при $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right]$

$$e_{n-1}(f) \leq e_{n-1}(f - S_h f) + e_{n-1}(S_h f) \leq \frac{h}{8}\left(\omega\left(f', \frac{h}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \omega(f',h)\right). \tag{4}$$

У випадку $h = \dfrac{\pi}{n}$ отримуємо оцінку

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{8n}\left(\omega\left(f', \frac{\pi}{2n}\right) + \omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right)\right). \tag{5}$$

Із (1) випливає, що сталу $\dfrac{\pi}{8n}$ у (5) зменшити не можна.

Теорему доведено.

Наведемо кілька зауважень.

1. Співвідношення (1) справедливе і в просторі $L_1[-\pi,\pi]$ [4]. Доведені тут співвідношення (2), (3) також виконуються і в $L_1[-\pi,\pi]$.

2. Покладемо в (4) $h = \dfrac{\pi}{n(2k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тоді

$$e_{n-1}(f) \leq \frac{\pi}{8n(2k+1)}\left(\omega\left(f', \frac{\pi}{2n(2k+1)}\right) + (2k+1)^2\omega\left(f', \frac{\pi}{n(2k+1)}\right)\right).$$

Сталу $\dfrac{\pi}{8n(2k+1)}$ у правій частині зменшити не можна. Це випливає з відомого результату [6]

$$\sup_{\substack{f\in C[-\pi,\pi]\\ f\neq \mathrm{const}}} \frac{e_{n-1}(f)}{\omega\left(f', \dfrac{\pi}{n(2k+1)}\right)} = \frac{\pi}{8n(2k+1)}\left(1 + (2k+1)^2\right).$$

3. При доведенні теореми мы використали оператор S_h усереднення за Стєкловим. Розглянемо тепер для проміжного наближення оператор S_h^2 усереднення за Стєкловим другого порядку:

$$S_h^2(f,x) = \int\limits_{-h}^{h} \frac{h-|t|}{h^2} f(x+t)dt.$$

При $h \le \dfrac{\pi}{n}$ використаємо лему:

$$e_{n-1}(f - S_h^2 f) \le \int\limits_0^h \frac{h-t}{h^2}\omega(f',t)tdt \le \omega\left(f', \frac{h}{2}\right)\int\limits_0^{\frac{h}{2}} \frac{h-t}{h^2}tdt + \omega(f',h)\int\limits_{\frac{h}{2}}^{h} \frac{h-t}{h^2}tdt =$$

$$= \frac{h}{12}\omega\left(f', \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{12}\omega(f',h).$$

Далі, за теоремою Фавара

$$e_{n-1}(S_h^2 f) \le \frac{\pi^3}{24n^3}\frac{\|\Delta_h^2 f'\|}{h^2} \le \frac{\pi^3}{12n^3}\frac{\omega(f',h)}{h^2}.$$

В результаті для довільного $h \in \left(0, \dfrac{\pi}{n}\right]$ отримуємо аналогічну (4) оцінку

$$e_{n-1}(f) \le \frac{h}{12}\left(\omega\left(f', \frac{h}{2}\right) + \left(1 + \left(\frac{\pi}{nh}\right)^3\right)\omega(f',h)\right).$$

Зокрема, при $h = \dfrac{\pi}{n}$

$$e_{n-1}(f) \le \frac{\pi}{12n}\left(\omega\left(f', \frac{\pi}{2n}\right) + 2\omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right)\right). \tag{6}$$

Сталу $\dfrac{\pi}{12n}$ зменшити не можна, оскільки з (6) випливає точна нерівність

$$e_{n-1}(f) \le \frac{\pi}{4n}\omega\left(f', \frac{\pi}{n}\right).$$

Література

1. Н. П. Корнейчук, *Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций*, Докл. АН СССР, **145**, 514 – 515 (1962).
2. Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, Москва (1976).
3. С. А. Пичугов, *Вогнутые оболочки модулей непрерывности*, Укр. мат. журн., **71**, № 5, 716 – 720 (2019).
4. В. В. Жук, *Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций*, Докл. АН СССР, **201**, 263 – 266 (1967).
5. А. А. Лигун, *О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций*, Мат. заметки, **14**, № 1, 21 – 30 (1973).
6. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные неравенства, связанные с оценками приближений периодических функций посредством модулей непрерывности нечетных производных с различным шагом*, Проблемы мат. анализа, вып. **19**, 69 – 88 (1999).

Одержано 22.01.22