DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7111

УДК 517.5

О. В. Моторна, В. І. Шевчук (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ОДНУ АСИМПТОТИЧНУ РІВНІСТЬ РЕВЕРСА

We clarify an asymptotic equality proved by Revers for an interpolation analog of the classic Bernstein – Varga – Carpenter result.

Уточнено асимптотичну рівність, доведену Реверсом для інтерполяційного аналога класичного результату Bernstein – Varga – Carpenter.

1. Вступ і основний результат. Нехай P_{2n} — поліном Лагранжа, який інтерполює функцію $|x|^\alpha$, $\alpha > 0$, в нулях полінома Чебишова T_{2n+1}. Реверс [1] отримав інтерполяційний аналог класичного результату Bernstein – Varga – Carpenter. Він довів, що

$$\lim_{n\to\infty}(2n)^\alpha \||x|^\alpha - P_{2n}\|_{C[-1,1]} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right| \sup_{x\in[0,\infty)} H(\alpha,x), \tag{1}$$

де

$$H(\alpha,x) := \int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha}{\sinh(t)}\frac{x|\sin x|}{x^2+t^2}\,dt, \qquad \alpha>0, \quad x>0.$$

Крім того, Реверс [2] знайшов асимптотично точний вираз для правої частини (1). А саме, довів таку теорему.

Теорема 1 ([2], теорема 1.3)**.** *Справджується асимптотична рівність*

$$\|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} = \frac{1}{1+2\alpha}C(\alpha)(1+o(1)), \quad \alpha\to\infty,$$

де

$$C(\alpha) := \int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha}{\sinh(t)}\,dt, \quad \alpha>0.$$

З цією метою він, зокрема, довів таке твердження.

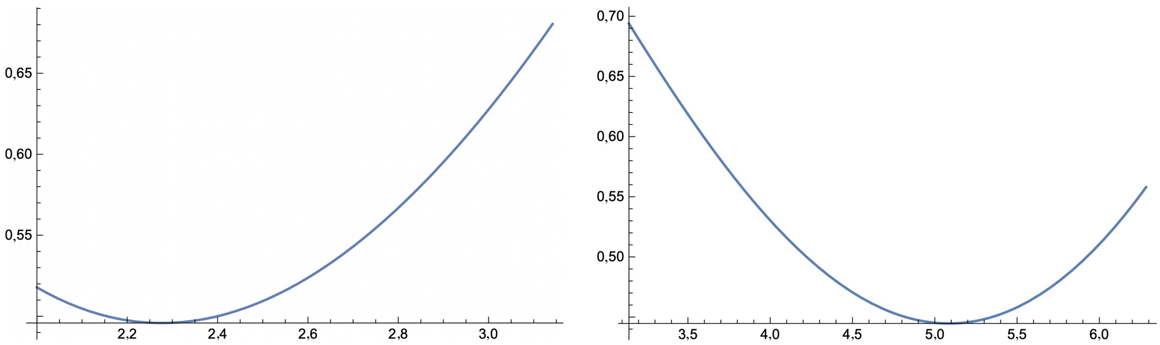
Теорема 2 ([2], теорема 3.1)**.** *Нехай* $\alpha \geq 2$. *Тоді має місце*

$$\frac{C(\alpha)}{1+2\alpha}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \leq H_1(\alpha,\alpha) \leq \|H_1(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} = \frac{C(\alpha)}{1+2\alpha}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

де

$$H_1(\alpha,x) := \int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha}{\sinh(t)}\frac{x}{x^2+t^2}\,dt, \quad \alpha>0, \quad x>0.$$

Спрощуючи доведення з [2], встановимо точніші оцінки. Основним результатом цієї роботи є така теорема.



а *б*

Графіки $\alpha\left(1-\dfrac{2H(\alpha,\pi/2)}{C(\alpha-1)}\right)$ (*а*) та $\alpha\left(1-\dfrac{2H(\alpha,3\pi/2)}{C(\alpha-1)}\right)$ (*б*) на відповідних проміжках.

Теорема 3. *Нехай* $\alpha \geq 2$. *Тоді має місце*

$$(1-1/\alpha)\,C(\alpha-1) \leq 2\|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} \leq 2\|H_1(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} \leq C(\alpha-1). \tag{2}$$

Зауважимо, що нерівність $\|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} \leq \|H_1(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)}$ є очевидною, а оцінка $2\|H_1(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} \leq C(\alpha-1)$ легко випливає з нерівності $x^2+t^2 \geq 2xt$ (детальніше див. [2], лема 3.7). Отже, щоб отримати (2), нам потрібно довести лише його ліву частину.

Безпосередніми обчисленнями отримуємо

$$\alpha\left(1-\frac{2H(\alpha,\pi/2)}{C(\alpha-1)}\right) < 0{,}7 < 1, \quad 2 \leq \alpha \leq \pi,$$

і

$$\alpha\left(1-\frac{2H(\alpha,3\pi/2)}{C(\alpha-1)}\right) < 0{,}7 < 1, \quad \pi < \alpha \leq 2\pi,$$

що зумовлює справедливість лівої частини (2) для $2 \leq \alpha \leq 2\pi$ (див. рисунок).

Таким чином, залишилося довести лему 1.

Лема 1. *Нехай* $\alpha > 2\pi$. *Тоді*

$$C(\alpha-1) - 2\|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} \leq \frac{1}{\alpha}C(\alpha-1). \tag{3}$$

2. Доведення леми 1. Нехай

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t}\,dt$$

— гамма-функція Ейлера.

Лема 2. *Нехай* $\alpha > 1$. *Тоді*

$$\Gamma(\alpha) - H_1(\alpha,x) \leq \frac{x}{2\alpha(\alpha-1)}\Gamma(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2x\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Доведення. Маємо

$$\Gamma(\alpha) - H_1(\alpha, x) \le \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t}\,dt - 2\int\limits_0^\infty \frac{t^\alpha}{e^t}\frac{x}{x^2+t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t}\frac{(x-t)^2}{x^2+t^2}\,dt \le \int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t}\frac{(x-t)^2}{2xt}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2x}(x^2\Gamma(\alpha-1) - 2x\Gamma(\alpha) + \Gamma(\alpha+1)) =$$

$$= \frac{1}{2x}\left(\frac{x^2}{\alpha-1}\Gamma(\alpha) - 2x\Gamma(\alpha) + \alpha\Gamma(\alpha)\right) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{2x\alpha}\left(\frac{x^2}{\alpha-1} + x^2 - 2x\alpha + \alpha^2\right) =$$

$$= \frac{x}{2\alpha(\alpha-1)}\Gamma(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2x\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Лема 3. *Нехай* $\alpha > 2\pi$. *Тоді*

$$\Gamma(\alpha) - \|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} < \frac{0{,}91}{\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Доведення. Нехай $x(\alpha)$ — така точка, що $|\alpha - x(\alpha)| \le \pi/2$ і $|\sin x(\alpha)| = 1$. Тоді

$$H_1(\alpha, x(\alpha)) = H(\alpha, x(\alpha)) \le \|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)}.$$

Звідси за лемою 2

$$\Gamma(\alpha) - \|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)} \le \Gamma(\alpha) - H_1(\alpha, x(\alpha)) \le$$

$$\le \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha}\left(\frac{x(\alpha)}{2(\alpha-1)} + \frac{(x(\alpha)-\alpha)^2}{2x(\alpha)}\right) \le \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha}\left(\frac{x(\alpha)}{2(\alpha-1)} + \frac{\pi^2}{8x(\alpha)}\right) \le$$

$$\le \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha}\left(\frac{5\pi}{4(2\pi-1)} + \frac{\pi^2}{20\pi}\right) < \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha}\left(\frac{3}{4} + \frac{\pi}{20}\right) < 0{,}91\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha}.$$

Лема 4. *Нехай* $\alpha > 1$. *Тоді*

$$\frac{1}{2}C(\alpha-1) = \Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^\alpha}.$$

Доведення. Оскільки

$$\frac{1}{u - 1/u} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{u^{2k+1}}, \quad u > 1,$$

і

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^{mt}}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{m^\alpha}, \quad m > 0,$$

то отримуємо

$$\frac{1}{2}C(\alpha-1)=\int\limits_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{e^t-e^{-t}}\,dt=\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{e^{(2k+1)t}}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^\infty \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\frac{1}{e^{(2k+1)t}}\,dt=\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(2k+1)^\alpha}.$$

Наслідок. *Нехай* $\alpha\geq 2$. *Тоді*

$$\frac{1}{2}C(\alpha-1)=\Gamma(\alpha)\left(1+\frac{\theta(\alpha)}{3^\alpha}\right),$$

де

$$1<\theta(\alpha)<2{,}11.$$

Справді, за лемою 4

$$1<\theta(\alpha)=3^\alpha\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2k+1)^\alpha}=\sum_{k=1}^\infty\frac{3^\alpha}{(2k+1)^\alpha}\leq\theta(2)=$$

$$=9\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{(2k+1)^2}=9\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)=2{,}103\ldots.$$

***Доведення нерівності* (3).** Використовуючи лему 3 і наслідок, отримуємо

$$\frac{1}{2}C(\alpha-1)-\|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)}=\frac{1}{2}C(\alpha-1)-\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha)-\|H(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)}\leq$$

$$\leq\frac{\theta(\alpha)}{3^\alpha}\Gamma(\alpha)+\frac{0{,}91}{\alpha}\Gamma(\alpha)\leq\frac{1}{\alpha}\frac{2\pi\cdot 2{,}11}{3^{2\pi}}\Gamma(\alpha)+\frac{0{,}91}{\alpha}\Gamma(\alpha)$$

$$<\frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha}<\frac{1}{2}\frac{C(\alpha-1)}{\alpha}.$$

Зауваження. З леми 2, теореми 3 і наслідку випливає, що

$$\Gamma(\alpha)\left(1-\frac{1}{2(\alpha-1)}\right)\leq H_1(\alpha,\alpha)\leq\|H_1(\alpha,\cdot)\|_{L_\infty[0,\infty)}\leq\Gamma(\alpha)\left(1+\frac{2{,}1}{3^\alpha}\right),\quad \alpha\geq 2.$$

Література

1. M. Revers, *Extremal polynomials and entire functions of exponential type*, Res. Math., **2018**, № 73, Article 73:109 (2018).
2. M. Revers, *Asymptotics of polynomial interpolation and the Bernstein constants*, Res. Math., **2021**, № 76, Article 76:100 (2021).

Одержано 16.01.22