DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7031

УДК 517.524

Т. М. Антонова (Нац. ун-т „Львів. політехніка”),
О. М. Сусь (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
С. М. Возна (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ТА ОЦІНКУ ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ВІДПОВІДНИХ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

For the corresponding two-dimensional continued fractions with complex partial numerators belonging to some subsets of the Cartesian product of two angular sets in the right half-plane and partial denominators equal to one, we establish sufficient conditions of uniform convergence and an estimation of the truncation error using an analogue of the method of fundamental inequalities, formulas for real and imagine parts of tails of figured approximants and a multidimensional analogue of the Stieltjes – Vitali theorem.

Для відповідних двовимірних неперервних дробів з комплексними частинними чисельниками, які належать деяким підмножинам декартового добутку двох кутових множин правої півплощини, та частинними знаменниками, рівними одиниці, встановлено достатні умови рівномірної збіжності та оцінку похибки наближення їхніх значень фігурними підхідними дробами за допомогою одного з аналогів методу фундаментальних нерівностей, формул для дійсних і уявних частин залишків фігурних підхідних дробів та багатовимірного аналога теореми Стільтьєса – Віталі.

1. Вступ. Одним із найпоширеніших методів розвинення аналітичних функцій багатьох змінних у гіллясті ланцюгові дроби (дискретні багатовимірні узагальнення неперервних дробів) є побудова дробів, відповідних до заданих формальних кратних степеневих рядів [9, 12, 15 – 19, 23, 24, 29, 30]. Питання відповідності між формальним степеневим рядом і послідовністю голоморфних функцій однієї змінної, зокрема послідовністю наближень неперервного функціонального дробу, розглянуто у [27], а відповідності між формальним кратним степеневим рядом і послідовністю наближень деяких узагальнень неперервних дробів — у [19, 24, 26]. Зауважимо, що відповідні гіллясті ланцюгові дроби будуються неоднозначно. Зокрема, існують різні конструкції гіллястих ланцюгових дробів, відповідних до заданого формального подвійного степеневого ряду [18, 29, 30]. Гіллясті ланцюгові дроби, запропоновані у [18, 29], пізніше стали називати двовимірними неперервними дробами (ДНД).

Для застосувань неперервних дробів та їхніх багатовимірних узагальнень важливе значення має їх збіжність [2, 9 – 11, 25]. Питання поточкової збіжності ДНД (1) зводиться до дослідження збіжності числового ДНД, у який перетворюється функціональний ДНД при фіксованих значеннях змінних. Методику дослідження збіжності числових ДНД (1), елементи яких належать круговим, кутовим, параболічним, спарованим областям комплексної площини, а також криволінійним трапеціям, описано у [6 – 9, 19]. Питання збіжності одного класу функціональних ДНД, а саме двовимірних неперервних g-дробів, у деяких областях простору $\mathbb{C}^2$, розглянуто у [13, 14, 19, 28]. Дослідження збіжності функціональних ДНД у інших областях є актуальною задачею.

Розглянемо ДНД

$$a_{0,0} + \Phi_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,k}(z)}{1+\Phi_k(z)}, \quad \Phi_l(z) = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{l+j,l}(z)}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{l,l+j}(z)}{1}, \quad l = 0,1,\ldots, \qquad (1)$$

де $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$a_{j,j}(z) = c_{j,j} z_1 z_2, \qquad a_{k+j,k}(z) = c_{k+j,k} z_1, \qquad a_{k,k+j}(z) = c_{k,k+j} z_2, \tag{2}$$
$$k = 0, 1, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

а $a_{0,0}$, $c_{j,k}$, j, $k = 0, 1, \ldots$, $j + k \geq 1$, — комплексні сталі.

Наближення, одержане із задачі відповідності (n-те фігурне наближення або n-й фігурний підхідний дріб), має вигляд

$$f_1(z) = a_{0,0} + \Phi_0^{(1)}(z), \qquad f_n(z) = a_{0,0} + \Phi_0^{(n)}(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{[n/2]} \frac{a_{k,k}(z)}{1 + \Phi_k^{(n-2k)}(z)}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

$$\Phi_l^{(0)}(z) = 0, \qquad \Phi_l^{(p)}(z) = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{l+j,l}(z)}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{p} \frac{a_{l,l+j}(z)}{1}, \quad l = 0, 1, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

де $[\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α.

Означення 1. *ДНД* (1) *називається збіжним, якщо, починаючи з деякого номера* n_0, *всі його наближення мають сенс і існує скінченна границя* $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. *Значення цієї границі вважається значенням ДНД. Різниця* $f(z) - f_n(z)$ *називається похибкою наближення значення ДНД* n*-м фігурним підхідним дробом,* $n \geq 1$.

Означення 2. *Говорять, що функціональний ДНД* (1) *рівномірно збігається на компактній підмножині* K *з області* $D \subset \mathbb{C}^2$, *якщо, починаючи з деякого номера* $n(K)$, *його наближення* $f_k(z)$, $k \geq n(K)$, *для всіх* z *з деякої області, яка містить* K, *мають сенс і скінченні, а для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує такий номер* $n_\varepsilon > n(K)$, *що для всіх* $n, m \geq n_\varepsilon$ *і* $z \in K$ *виконується нерівність* $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$.

Одним із методів дослідження збіжності, який дозволяє оцінювати похибки наближень багатовимірних аналогів неперервних дробів, є метод фундаментальних нерівностей [1, 3, 9]. Приклади його застосування описано в роботах [1, 4, 5, 22].

Аналоги методу фундаментальних нерівностей також встановлені і для ДНД (1) [19–21]. Важливою складовою цього методу є оцінки так званих залишків.

Вирази вигляду

$$Q_j^{(0)}(z) = 1, \qquad Q_j^{(1)}(z) = 1 + \Phi_j^{(1)}(z), \qquad Q_j^{(p+2)}(z) = 1 + \Phi_j^{(p+2)}(z) + \frac{a_{j+1,j+1}(z)}{Q_{j+1}^{(p)}(z)}, \tag{5}$$
$$j = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

$$Q_{k+j,k}^{(0)}(z) = Q_{k,k+j}^{(0)}(z) = 1, \quad Q_{k+j,k}^{(p+1)}(z) = 1 + \frac{a_{k+j+1,k}(z)}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}(z)}, \quad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{k,k+j+1}(z)}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}(z)}, \tag{6}$$
$$j = 1, 2, \ldots, \quad k, \ p = 0, 1, \ldots,$$

називають залишками ДНД (1).

Враховуючи формули (3)–(6), маємо

$$\Phi_k^{(p)}(z) = \frac{a_{k+1,k}(z)}{Q_{k+1,k}^{(p-1)}(z)} + \frac{a_{k,k+1}(z)}{Q_{k,k+1}^{(p-1)}(z)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$f_1(z)=a_{0,0}+\Phi_0^{(1)}(z),\qquad f_n(z)=a_{0,0}+\Phi_0^{(n)}(z)+\frac{a_{1,1}(z)}{Q_1^{(n-2)}(z)},\quad n=2,3,\ldots. \tag{8}$$

Для доведення збіжності та знаходження оцінки швидкості збіжності ДНД, що розглядаються у даній роботі, застосовано один з аналогів методу фундаментальних нерівностей для фігурних наближень вигляду (3), (4) та встановлені у роботі [20] формули для дійсних та уявних частин залишків фігурних наближень ДНД. Така методика застосована при дослідженні збіжності відповідних гіллястих ланцюгових дробів інших конструкцій [2, 4].

2. Один аналог методу фундаментальних нерівностей. Доведемо допоміжну теорему (один з аналогів методу фундаментальних нерівностей), яку використовуватимемо для обґрунтування основних результатів. З метою скорочення запису не будемо наголошувати на залежності елементів ДНД (1) від z.

Теорема 1. *Нехай для залишків ДНД* (1) *виконуються нерівності*

$$Q_{i+k,i}^{(p)}\neq 0,\quad Q_{i,i+k}^{(p)}\neq 0,\quad Q_k^{(p)}\neq 0,\quad i=0,1,\ldots,\quad k,p=1,2,\ldots, \tag{9}$$

та існують такі додатні сталі $M,\ M_{1,0},\ M_{0,1},\ H_1,\ H_2,\ \rho,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \rho<1,\ \rho_1<1,\ \rho_2<1,$ *що*

$$\frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(p)}\right|}\le M_{1,0},\qquad \frac{|a_{0,1}|}{\left|Q_{0,1}^{(p)}\right|}\le M_{0,1},\qquad \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(p)}\right|}\le M,\quad p=0,1,\ldots, \tag{10}$$

$$\frac{|a_{k+1,k}|}{|Q_k^{(p+1)}Q_{k+1,k}^{(p)}|}\le H_1,\qquad \frac{|a_{k,k+1}|}{|Q_k^{(p+1)}Q_{k,k+1}^{(p)}|}\le H_2,\quad p=0,1,\ldots,\quad k=1,2,\ldots, \tag{11}$$

$$\frac{|a_{k+j+1,k}|}{|Q_{k+j,k}^{(m+1)}Q_{k+j+1,k}^{(m)}|}\le \rho_1,\qquad \frac{|a_{k,k+j+1}|}{|Q_{k,k+j}^{(m+1)}Q_{k,k+j+1}^{(m)}|}\le \rho_2,\quad k,m=0,1,\ldots,\quad j=1,2,\ldots, \tag{12}$$

$$\frac{|a_{j+1,j+1}|}{|Q_j^{(p+2)}Q_{j+1}^{(p)}|}\le \rho,\quad j=1,2,\ldots,\quad p=0,1,\ldots. \tag{13}$$

Тоді ДНД (1) *збігається до значення* f *і для похибки наближення його* m*-м фігурним підхідним дробом* $f_m,\ m\ge 2,$ *справджується оцінка*

$$|f-f_m|\le M_{1,0}(\rho_1)^m+M_{0,1}(\rho_2)^m+M\rho^{[m/2]}+MH_1S_{1,m}+MH_2S_{2,m}, \tag{14}$$

де

$$S_{i,m}=\begin{cases}(\rho_i)^{m-2[m/2]}[m/2](\delta_i)^{[m/2-1]}, & \text{якщо}\quad \delta_i=\tilde{\delta}_i,\\ (\rho_i)^{m-2[m/2]}\dfrac{(\delta_i)^{[m/2]}-(\tilde{\delta}_i)^{[m/2]}}{\delta_i-\tilde{\delta}_i}, & \text{якщо}\quad \delta_i>\tilde{\delta}_i,\end{cases}\quad i=1,2,\quad m=2,3,\ldots, \tag{15}$$

$$\delta_i=\max\left((\rho_i)^2,\rho\right),\qquad \tilde{\delta}_i=\min\left((\rho_i)^2,\rho\right),\quad i=1,2. \tag{16}$$

Доведення. Щоб довести збіжність послідовності підхідних дробів $\{f_n\},\ n=1,2,\ldots,$ і правильність нерівності (14), використаємо формулу різниці між фігурними підхідними дробами вигляду (3) ДНД (1) [9]:

$$f_n - f_m = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(m-2k)}) \prod_{j=1}^{k} (-a_{j,j})}{\prod_{j=1}^{k} Q_j^{(n-2j)} Q_j^{(m-2j)}} - \frac{\prod_{j=1}^{[m/2]+1} (-a_{j,j})}{\prod_{j=1}^{[m/2]+1} Q_j^{(n-2j)} \prod_{j=1}^{[m/2]} Q_j^{(m-2j)}}, \quad (17)$$

$$n > m+1, \quad m = 2, 3, \ldots .$$

Покажемо, що

$$|f_n - f_m| \leq M_{1,0}(\rho_1)^m + M_{0,1}(\rho_2)^m + M\rho^{[m/2]} + MH_1 S_{1,m} + MH_2 S_{2,m}, \quad (18)$$

$$m \geq 2, \quad n > m+1,$$

де $S_{1,m},\ S_{2,m}$ визначаємо згідно з формулами (15), (16).

Для $m = 2p,\ p = 1, 2, \ldots,$ з формули (17) отримуємо

$$|f_n - f_{2p}| \leq \left|\Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(2p)}\right| + \sum_{k=1}^{p} \frac{|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}| \prod_{j=1}^{k} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{k} |Q_j^{(n-2j)} Q_j^{(2p-2j)}|} +$$

$$+ \frac{\prod_{j=1}^{p+1} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{p+1} |Q_j^{(n-2j)}| \prod_{j=1}^{p} |Q_j^{(2p-2j)}|}. \quad (19)$$

З формул (4) випливає, що

$$\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right| \leq$$

$$\leq \left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| + \left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right|, \quad 0 \leq k \leq p.$$

Використовуючи формули (7) та умови (9) – (12), одержуємо

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| = \frac{\prod_{j=1}^{2p-2k+1} |a_{k+j,k}|}{\prod_{j=1}^{2p-2k+1} |Q_{k+j,k}^{(n-2k-j)}| \prod_{j=1}^{2p-2k} |Q_{k+j,k}^{(2p-2k-j)}|} =$$

$$= \frac{|a_{k+1,k}|}{|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}|} \prod_{j=1}^{p-k} \frac{|a_{k+2j,k}|}{|Q_{k+2j-1,k}^{(2p-2k-2j+1)} Q_{k+2j,k}^{(2p-2k-2j)}|} \prod_{j=1}^{p-k} \frac{|a_{k+2j+1,k}|}{|Q_{k+2j,k}^{(n-2k-2j)} Q_{k+2j+1,k}^{(n-2k-2j-1)}|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_{k+1,k}|}{|Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}|} (\rho_1)^{2p-2k}.$$

Аналогічно

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right| \leq \frac{|a_{k,k+1}|}{|Q_{k,k+1}^{(n-2k-1)}|} (\rho_2)^{2p-2k}.$$

Оцінимо тепер добуток $\prod_{j=1}^{k} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|}$ з урахуванням умов (10), (13).

При $k = 2l,\ l \geq 1:$

$$\prod_{j=1}^{2l} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} =$$

$$= \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)} Q_{2l}^{(n-4l)}\right|} \prod_{j=1}^{l} \frac{|a_{2j,2j}|}{\left|Q_{2j-1}^{(2p-4j+2)} Q_{2j}^{(2p-4j)}\right|} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{2j+1,2j+1}|}{\left|Q_{2j}^{(n-4j)} Q_{2j+1}^{(n-4j-2)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)} Q_{2l}^{(n-4l)}\right|} \rho^{2l-1} = \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)} Q_k^{(n-2k)}\right|} \rho^{k-1}.$$

Тому

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| \prod_{j=1}^{k} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(n-2j)} Q_j^{(2p-2j)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)}\right|} \frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_k^{(n-2k)} Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} (\rho_1)^{2p-2k} \rho^{k-1} \leq M H_1 (\rho_1)^{2p-2k} \rho^{k-1}.$$

При $k = 2l-1,\ l \geq 1:$

$$\prod_{j=1}^{2l-1} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} =$$

$$= \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(2p-2)} Q_{2l-1}^{(n-4l+2)}\right|} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{2j,2j}|}{\left|Q_{2j-1}^{(n-4j+2)} Q_{2j}^{(n-4j)}\right|} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{|a_{2j+1,2j+1}|}{\left|Q_{2j}^{(2p-4j)} Q_{2j+1}^{(2p-4j-2)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(2p-2)} Q_{2l-1}^{(n-4l+2)}\right|} \rho^{2l-2} = \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(2p-2)} Q_k^{(n-2k)}\right|} \rho^{k-1}$$

і

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| \prod_{j=1}^{k} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(2p-2)}\right|} \frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_k^{(n-2k)} Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)}\right|} (\rho_1)^{2p-2k} \rho^{k-1} \leq M H_1 (\rho_1)^{2p-2k} \rho^{k-1}.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{p} \left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| \prod_{j=1}^{k} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} \leq$$

$$\leq MH_1 \sum_{k=1}^{p} (\rho_1)^{2p-2k} \rho^{k-1} = MH_1 S_{1,2p}.$$

Аналогічно отримуємо

$$\sum_{k=1}^{p} \left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right| \prod_{j=1}^{k} \frac{|a_{j,j}|}{\left|Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} \leq$$

$$\leq MH_2 \sum_{k=1}^{p} (\rho_2)^{2p-2k} \rho^{k-1} = MH_2 S_{2,2p}.$$

Крім того,

$$\left|\Phi_0^{(n)} - \Phi_0^{(2p)}\right| \leq M_{1,0}(\rho_1)^{2p} + M_{0,1}(\rho_2)^{2p},$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{p+1} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{p+1} \left|Q_j^{(n-2j)}\right| \prod_{j=1}^{p} \left|Q_j^{(2p-2j)}\right|} \leq \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)}\right|} \rho^p \leq M\rho^p.$$

Враховуючи встановлені вище оцінки і нерівність (19), одержуємо

$$|f_n - f_{2p}| \leq M_{1,0}(\rho_1)^{2p} + M_{0,1}(\rho_2)^{2p} + M\rho^p + MH_1 S_{1,2p} + MH_2 S_{2,2p}.$$

Оцінку виразу $|f_n - f_m|$ у випадку $m = 2p+1,\ p = 1, 2, \ldots,\ n > 2p+2$, знаходимо за тією ж схемою. Маємо

$$|f_n - f_{2p+1}| \leq \sum_{k=0}^{p} \frac{\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k+1)}\right| \prod_{j=1}^{k} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{k} \left|Q_j^{(n-2j)} Q_j^{(2p-2j+1)}\right|} + \frac{\prod_{j=1}^{p+1} |a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{p+1} \left|Q_j^{(n-2j)}\right| \prod_{j=1}^{p} \left|Q_j^{(2p-2j+1)}\right|}. \tag{20}$$

Знову використовуючи формули (7) та умови (9) – (12), отримуємо

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k+1} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| =$$

$$= \frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{(2p-2k)}\right|} \prod_{j=1}^{p-k+1} \frac{|a_{k+2j,k}|}{\left|Q_{k+2j-1,k}^{(n-2k-2j)} Q_{k+2j,k}^{(n-2k-2j-1)}\right|} \prod_{j=1}^{p-k} \frac{|a_{k+2j+1,k}|}{\left|Q_{k+2j,k}^{(2p+1-2k-2j)} Q_{k+2j+1,k}^{(2p-2k-2j)}\right|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{(2p-2k)}\right|} (\rho_1)^{2p-2k+1},$$

$$\left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{2p-2k+1} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right| \leq \frac{|a_{k,k+1}|}{\left|Q_{k,k+1}^{(2p-2k)}\right|} (\rho_2)^{2p-2k+1},$$

а з урахуванням умов (10), (13) —

$$\sum_{k=1}^{p}\left|\underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k+j,k}}{1}-\underset{j=1}{\overset{2p-2k+1}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k+j,k}}{1}\right|\prod_{j=1}^{k}\frac{|a_{j,j}|}{|Q_j^{(2p+1-2j)}Q_j^{(n-2j)}|}\leq$$

$$\leq MH_1\sum_{k=1}^{p}(\rho_1)^{2p-2k+1}\rho^{k-1}=MH_1\rho_1\sum_{k=1}^{p}(\rho_1)^{2p-2k}\rho^{k-1}=MH_1S_{1,2p+1}. \tag{21}$$

Аналогічно знаходимо

$$\sum_{k=1}^{p}\left|\underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k,k+j}}{1}-\underset{j=1}{\overset{2p-2k+1}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k,k+j}}{1}\right|\prod_{j=1}^{k}\frac{|a_{j,j}|}{|Q_j^{(2p+1-2j)}Q_j^{(n-2j)}|}\leq MH_2S_{2,2p+1}. \tag{22}$$

Беручи до уваги (20) – (22), а також нерівності

$$|\Phi_0^{(n)}-\Phi_0^{(2p+1)}|\leq M_{1,0}(\rho_1)^{2p+1}+M_{0,1}(\rho_2)^{2p+1},$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{p+1}|a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{p+1}|Q_j^{(n-2j)}|\prod_{j=1}^{p}|Q_j^{(2p+1-2j)}|}\leq\frac{|a_{1,1}|}{|Q_1^{(n-2)}|}\rho^p\leq M\rho^p,$$

приходимо до висновку про виконання нерівності (18) для $m=2p+1$.

Спрямовуючи у нерівності (18) m до нескінченності та враховуючи умови теореми 1, робимо висновок про збіжність ДНД (1), а при $n\to\infty$ — про правильність оцінки (14) – (16) наближення значення ДНД (1) його m-м підхідним дробом.

3. Деякі достатні умови рівномірної збіжності відповідних двовимірних неперервних дробів. Розглянемо питання про збіжність функціонального ДНД (1), елементи якого визначаються згідно з (2).

Теорема 2. *Нехай для елементів ДНД* (1), (2) *виконуються умови*

$$0<c_{j,j}\leq L,\quad 0<c_{k+j,k}\leq L_1,\quad 0<c_{k,k+j}\leq L_2,\quad k=0,1,\ldots,\quad j=1,2,\ldots, \tag{23}$$

де L, L_1, L_2 *— додатні сталі. Тоді*:

1) *у кожній точці* z *із множини*

$$G_K=\left\{z\in\mathbb{C}^2\colon|z_j|\leq K_j,\ 0\leq\arg(z_j)\leq\frac{\pi}{2},\ j=1,2;\ \arg(z_1)+\arg(z_2)\leq\frac{\pi}{2}\right\} \tag{24}$$

ДНД (1), (2) *збігається до функції* $f(z)$, *причому*

$$|f(z)-f_m(z)|\leq c_{1,0}K_1(\rho_1)^m+c_{0,1}K_2(\rho_2)^m+c_{1,1}K_1K_2\left(\rho^{[m/2]}+\rho_1S_{1,m}+\rho_2S_{2,m}\right), \tag{25}$$

де $f_m(z)$ *— значення* m*-го наближення ДНД* (1), (2) *у точці* $z=(z_1,z_2)$,

$$\rho_1=\frac{L_1K_1}{\sqrt{1+(L_1)^2(K_1)^2}},\qquad\rho_2=\frac{L_2K_2}{\sqrt{1+(L_2)^2(K_2)^2}},\qquad\rho=\frac{LK_1K_2}{\sqrt{1+L^2(K_1)^2(K_2)^2}}, \tag{26}$$

а $S_{1,m},\ S_{2,m}$ *обчислюються згідно з* (15), (16);

2) *збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині з* $\operatorname{Int} G_K$.

Доведення. Покажемо, що за умов (23) для всіх $z \in G_K$ справджуються нерівності (9)–(13). Для цього розглянемо залишки (5), (6) ДНД (1), (2), і для оцінювання їхніх значень скористаємось формулами для їх дійсних і уявних частин [20].

Нехай

$$\varphi_{k,l} = \arg a_{k,l}, \qquad u_{k,l}^{(p)} = \operatorname{Re} Q_{k,l}^{(p)}, \qquad v_{k,l}^{(p)} = \operatorname{Im} Q_{k,l}^{(p)}, \quad k,l,p = 0,1,\ldots, \quad k \neq l,$$

$$\varphi_{k,k} = \arg a_{k,k}, \qquad u_{k}^{(p)} = \operatorname{Re} Q_{k}^{(p)}, \qquad v_{k}^{(p)} = \operatorname{Im} Q_{k}^{(p)}, \quad k = 1,2,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots.$$

Тоді для залишків (6) маємо

$$u_{k+j,k}^{(p)} = 1 + \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+j+r,k}|}{\left|Q_{k+j+r,k}^{(p-r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{l=1}^{m} (-1)^{l-1} \varphi_{k+j+l,k}\right), \quad k = 0,1,\ldots, \quad j,p = 1,2,\ldots, \tag{27}$$

$$v_{k+j,k}^{(p)} = \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+j+r,k}|}{\left|Q_{k+j+r,k}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{l=1}^{m} (-1)^{l-1} \varphi_{k+j+l,k}\right), \quad k = 0,1,\ldots, \quad j,p = 1,2,\ldots, \tag{28}$$

$$u_{k,k+j}^{(p)} = 1 + \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k,k+j+r}|}{\left|Q_{k,k+j+r}^{(p-r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{l=1}^{m} (-1)^{l-1} \varphi_{k,k+j+l}\right), \quad k = 0,1,\ldots, \quad j,p = 1,2,\ldots, \tag{29}$$

$$v_{k,k+j}^{(p)} = \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k,k+j+r}|}{\left|Q_{k,k+j+r}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{l=1}^{m} (-1)^{l-1} \varphi_{k,k+j+l}\right), \quad k = 0,1,\ldots, \quad j,p = 1,2,\ldots. \tag{30}$$

З формул (27)–(30) та формули (7) випливає, що

$$\operatorname{Re} \Phi_k^{(p)} = \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+r,k}|}{\left|Q_{k+r,k}^{(p-r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,k}\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k,k+r}|}{\left|Q_{k,k+r}^{(p-r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k,k+j}\right), \quad k,p = 1,2,\ldots, \tag{31}$$

$$\operatorname{Im} \Phi_k^{(p)} = \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+r,k}|}{\left|Q_{k+r,k}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,k}\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{p} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k,k+r}|}{\left|Q_{k,k+r}^{(p-r)}\right|^2} \sin\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k,k+j}\right), \quad k,p = 1,2,\ldots. \tag{32}$$

Формули для дійсної й уявної частин залишків (5) мають вигляд

$$u_k^{(p)} = 1 + \operatorname{Re} \Phi_k^{(p)} + \sum_{m=1}^{[p/2]} \prod_{r=1}^{m} \frac{|a_{k+r,k+r}|}{\left|Q_{k+r}^{(p-2r)}\right|^2} \cos\left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \varphi_{k+j,k+j}\right) +$$

$$+\sum_{l=1}^{[(p-1)/2]}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,k+q}|}{\left|Q_{k+q}^{(p-2q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{p-2l}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+l+r,k+l}|}{\left|Q_{k+l+r,k+l}^{(p-2l-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,k+l}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{[(p-1)/2]}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,k+q}|}{\left|Q_{k+q}^{(p-2q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{p-2l}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+l,k+l+r}|}{\left|Q_{k+l,k+l+r}^{(p-2l-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\cos\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+l,k+j+l}\right),\quad k,p=1,2,\ldots, \tag{33}$$

$$v_k^{(p)}=\operatorname{Im}\Phi_k^{(p)}+\sum_{m=1}^{[p/2]}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+r,k+r}|}{\left|Q_{k+r}^{(p-2r)}\right|^2}\sin\left(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{[(p-1)/2]}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,k+q}|}{\left|Q_{k+q}^{(p-2q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{p-2l}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+l+r,k+l}|}{\left|Q_{k+l+r,k+l}^{(p-2l-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\sin\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j+l,k+l}\right)+$$

$$+\sum_{l=1}^{[(p-1)/2]}\prod_{q=1}^{l}\frac{|a_{k+q,k+q}|}{\left|Q_{k+q}^{(p-2q)}\right|^2}\sum_{m=1}^{p-2l}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+l,k+l+r}|}{\left|Q_{k+l,k+l+r}^{(p-2l-r)}\right|^2}\times$$

$$\times\sin\left(\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+l,k+j+l}\right),\quad k,p=1,2,\ldots. \tag{34}$$

Зрозуміло, що формули (27) – (34) виведено за припущення, що всі залишки у знаменниках виразів із правих частин цих формул не дорівнюють нулю. Покажемо, що це припущення справджується за умов (23) і $z\in G_K$. У цьому випадку

$$\varphi_{j,j}=\arg z_1+\arg z_2,\quad \varphi_{k+j,k}=\arg z_1,\quad \varphi_{k,k+j}=\arg z_2,\quad k=0,1,\ldots,\quad j=1,2,\ldots, \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k}=\begin{cases}\arg z_1, & \text{якщо}\quad m=2r+1,\quad r=0,1,\ldots,\\ 0 & \text{в іншому випадку},\end{cases} \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k,k+j}=\begin{cases}\arg z_2, & \text{якщо}\quad m=2r+1,\quad r=0,1,\ldots,\\ 0 & \text{в іншому випадку},\end{cases} \tag{37}$$

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}=\begin{cases}\arg z_1+\arg z_2, & \text{якщо}\quad m=2r+1,\quad r=0,1,\ldots,\\ 0 & \text{в іншому випадку},\end{cases} \tag{38}$$

$$\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k+j,k}=$$

$$=\begin{cases}\arg z_1+\arg z_2, & \text{якщо} \quad m=2r, \quad l=2q-1, \quad r,q=1,2,\ldots,\\ 0, & \text{якщо} \quad m=2r, \quad l=2q, \quad r,q=1,2,\ldots,\\ \arg z_2, & \text{якщо} \quad m=2r-1, \quad l=2q-1, \quad r,q=1,2,\ldots,\\ \arg z_1, & \text{якщо} \quad m=2r-1, \quad l=2q, \quad r,q=1,2,\ldots,\end{cases} \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{l}(-1)^{j-1}\varphi_{k+j,k+j}+\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+l-1}\varphi_{k,k+j}=$$

$$=\begin{cases}\arg z_1+\arg z_2, & \text{якщо} \quad m=2r, \quad l=2q-1, \quad r,q=1,2,\ldots,\\ 0, & \text{якщо} \quad m=2r, \quad l=2q, \quad r,q=1,2,\ldots,\\ \arg z_1, & \text{якщо} \quad m=2r-1, \quad l=2q-1, \quad r,q=1,2,\ldots,\\ \arg z_2, & \text{якщо} \quad m=2r-1, \quad l=2q, \quad r,q=1,2,\ldots.\end{cases} \tag{40}$$

Враховуючи формули (6), для довільних $j=1,2,\ldots,$ $k=0,1,\ldots$ маємо $Q^{(0)}_{k+j,k}=1,$

$$u^{(1)}_{k+j,k}=1+\operatorname{Re}a_{k+j+1,k}=1+|a_{k+j+1,k}|\cos(\arg z_1)\geq 1,$$

тому $\left|Q^{(p)}_{k+j,k}\right|\geq 1,$ $p=0,1,$ а формула (27) правильна для $p=2.$ Отже,

$$u^{(2)}_{k+j,k}=1+\sum_{m=1}^{2}\prod_{r=1}^{m}\frac{|a_{k+j+r,k}|}{\left|Q^{(2-r)}_{k+j+r,k}\right|^2}\cos\left(\sum_{l=1}^{m}(-1)^{l-1}\varphi_{k+j+l,k}\right)\geq 1,$$

$$k=0,1,\ldots, \quad j=1,2,\ldots, \quad j=1,2,\ldots.$$

Звідси випливає, що $\left|Q^{(2)}_{k+j,k}\right|\geq 1,$ а це означає, що формулу (27) можна застосувати і для $p=3.$ Припускаючи, що $\left|Q^{(p)}_{k+j,k}\right|\geq 1,$ $0\leq p\leq s,$ і беручи до уваги формулу (27) для $p=s+1$ і умови теореми, приходимо до висновку, що $\left|Q^{(s+1)}_{k+j,k}\right|\geq 1.$ Отже, за індукцією

$$\left|Q^{(p)}_{k+j,k}\right|\geq 1, \quad j=1,2,\ldots, \quad k,p=0,1,\ldots.$$

Аналогічно можна переконатись у виконанні нерівностей

$$|Q^{(p)}_{k,k+j}|\geq 1, \quad j=1,2,\ldots, \quad k,p=0,1,\ldots.$$

Розглянемо тепер залишки $Q^{(p)}_k,$ $k=1,2,\ldots,$ $p=0,1,\ldots.$ За формулами (5) $Q^{(0)}_k=1,$

$$u^{(1)}_k=1+\operatorname{Re}\Phi^{(1)}_k=1+|a_{k+1,k}|\cos(\arg z_1)+|a_{k,k+1}|\cos(\arg z_2)\geq 1, \quad \left|Q^{(1)}_k\right|\geq 1,$$

тому наведені вище формули для дійсних частин залишків $Q_k^{(2)}$, $Q_k^{(3)}$ є коректними. Використовуючи формули (31) – (40), отримуємо

$$u_k^{(2)} = 1 + \operatorname{Re}\Phi_k^{(2)} + \operatorname{Re} a_{k+1,k+1} = 1 + \operatorname{Re}\Phi_k^{(2)} + |a_{k+1,k+1}|\cos(\arg z_1 + \arg z_2) \geq 1,$$

$$u_k^{(3)} = 1 + \operatorname{Re}\Phi_k^{(3)} + \frac{|a_{k+1,k+1}|}{\left|Q_{k+1}^{(1)}\right|^2}\cos(\arg z_1 + \arg z_2) +$$

$$+\frac{|a_{k+1,k+1}|}{\left|Q_{k+1}^{(1)}\right|^2}\left(\frac{|a_{k+2,k+1}|}{\left|Q_{k+2,k+1}^{(0)}\right|^2}\cos(\arg z_2) + \frac{|a_{k+1,k+2}|}{\left|Q_{k+1,k+2}^{(0)}\right|^2}\cos(\arg z_1)\right) \geq 1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

звідки $\left|Q_k^{(p)}\right| \geq 1,\ k = 1, 2, \ldots,\ p = 2, 3$. Продовжуючи подібні міркування, за індукцією переконуємося, що $\left|Q_k^{(p)}\right| \geq 1,\ k = 1, 2, \ldots,\ p = 0, 1, \ldots$.

Отже, за умов (23) для всіх z із множини (24) справджується умова (9), тобто всі залишки ДНД (1), (2) не дорівнюють нулю. Крім того,

$$\frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(p)}\right|} \leq c_{1,0}K_1, \qquad \frac{|a_{0,1}|}{\left|Q_{0,1}^{(p)}\right|} \leq c_{0,1}K_2, \qquad \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(p)}\right|} \leq c_{1,1}K_1K_2, \quad p = 0, 1, \ldots,$$

тобто виконується умова (10). З формул (27) – (40) випливає, що

$$u_{i,j}^{(p)} \geq 1, \qquad v_{i,j}^{(p)} \geq 0, \quad i, j, p = 0, 1, \ldots, \quad i \neq j,$$

$$u_k^{(p)} \geq 1, \qquad v_k^{(p)} \geq 0, \qquad \operatorname{Re}\Phi_k^{(p)} \geq 0, \qquad \operatorname{Im}\Phi_k^{(p)} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots.$$

Враховуючи ці нерівності, одержуємо

$$u_k^{(p+2)} \geq 1 + \frac{|a_{k+1,k+1}|}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\left(u_{k+1}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k+1} + v_{k+1}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k+1}\right), \tag{41}$$

$$v_k^{(p+2)} \geq \frac{|a_{k+1,k+1}|}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\left(u_{k+1}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k+1} - v_{k+1}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k+1}\right). \tag{42}$$

З нерівностей (41), (42) випливає, що

$$\left|Q_k^{(p+2)}\right|^2 = \left(u_k^{(p+2)}\right)^2 + \left(v_k^{(p+2)}\right)^2 \geq$$

$$\geq 1 + 2\frac{|a_{k+1,k+1}|}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}\left(u_{k+1}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k+1} + v_{k+1}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k+1}\right) +$$

$$+\frac{|a_{k+1,k+1}|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^4}\left(u_{k+1}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k+1} + v_{k+1}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k+1}\right)^2 +$$

$$+\frac{|a_{k+1,k+1}|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^4}\left(u_{k+1}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k+1} - v_{k+1}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k+1}\right)^2 \geq 1 + \frac{|a_{k+1,k+1}|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2}.$$

Отже,

$$\frac{|a_{k+1,k+1}|^2}{\left|Q_k^{(p+2)}\right|^2|Q_{k+1}^{(p)}|^2} \le \frac{|a_{k+1,k+1}|^2}{\left|Q_{k+1}^{(p)}\right|^2+|a_{k+1,k+1}|^2} \le \frac{|a_{k+1,k+1}|^2}{1+|a_{k+1,k+1}|^2} \le \frac{L^2(K_1)^2(K_2)^2}{1+L^2(K_1)^2(K_2)^2}=\rho^2,$$

тобто умови (13) виконуються.

Для перевірки виконання нерівностей (11) оцінимо вирази

$$\frac{|a_{k+1,k}|}{|Q_k^{(p+1)}||Q_{k+1,k}^{(p)}|}, \qquad \frac{|a_{k,k+1}|}{|Q_k^{(p+1)}||Q_{k,k+1}^{(p)}|}, \quad p=0,1,\ldots, \quad k=1,2,\ldots.$$

Оскільки

$$u_k^{(1)}=1+\operatorname{Re}\Phi_k^{(1)}, \qquad v_k^{(1)}=\operatorname{Im}\Phi_k^{(1)}, \qquad u_k^{(p)}\ge 1+\operatorname{Re}\Phi_k^{(p)}, \qquad v_k^{(p)}\ge \operatorname{Im}\Phi_k^{(p)},$$
$$k=1,2,\ldots, \quad p=2,3,\ldots,$$

то для $k=1,2,\ldots,\ \ p=0,1,\ldots$ маємо

$$u_k^{(p+1)}\ge 1+\operatorname{Re}\frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p)}}+\operatorname{Re}\frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p)}}\ge$$
$$\ge 1+\frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^2}\left(u_{k+1,k}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k}+v_{k+1,k}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k}\right)\ge 1,$$
$$v_k^{(p+1)}\ge \operatorname{Im}\frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p)}}+\operatorname{Im}\frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p)}}\ge$$
$$\ge \frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^2}\left(u_{k+1,k}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k}-v_{k+1,k}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k}\right)\ge 0.$$

Таким чином,

$$\left|Q_k^{(p+1)}\right|^2=\left(u_k^{(p+1)}\right)^2+\left(v_k^{(p+1)}\right)^2\ge$$
$$\ge 1+2\frac{|a_{k+1,k}|}{\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^2}\left(u_{k+1,k}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k}+v_{k+1,k}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k}\right)+$$
$$+\frac{|a_{k+1,k}|^2}{\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^4}\left(u_{k+1,k}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k}+v_{k+1,k}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k}\right)^2+$$
$$+\frac{|a_{k+1,k}|^2}{\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^4}\left(u_{k+1,k}^{(p)}\sin\varphi_{k+1,k}-v_{k+1,k}^{(p)}\cos\varphi_{k+1,k}\right)^2\ge 1+\frac{\left|a_{k+1,k}\right|^2}{\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^2},$$

тому

$$\frac{|a_{k+1,k}|^2}{\left|Q_k^{(p+1)}\right|^2\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^2}\le \frac{|a_{k+1,k}|^2}{\left|Q_{k+1,k}^{(p)}\right|^2+\left|a_{k+1,k}\right|^2}\le \frac{|a_{k+1,k}|^2}{1+|a_{k+1,k}|^2}\le \frac{(L_1)^2(K_1)^2}{1+(L_1)^2(K_1)^2}=(\rho_1)^2.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{|a_{k,k+1}|^2}{\left|Q_k^{(p+1)}\right|^2\left|Q_{k,k+1}^{(p)}\right|^2}\le \frac{(L_2)^2(K_2)^2}{1+(L_2)^2(K_2)^2}=(\rho_2)^2.$$

Отже, для ДНД (1), (2), елементи якого задовольняють умови теореми 2, виконуються нерівності (11), де $H_1=\rho_1,\ H_2=\rho_2$. Нарешті, оцінимо вирази

$$\frac{|a_{k+j+1,k}|}{\left|Q^{(m+1)}_{k+j,k}Q^{(m)}_{k+j+1,k}\right|}, \qquad \frac{|a_{k,k+j+1}|}{\left|Q^{(m+1)}_{k,k+j}Q^{(m)}_{k,k+j+1}\right|}, \qquad k,m=0,1,\ldots, \quad j=1,2,\ldots.$$

Враховуючи, що

$$u^{(m+1)}_{k+j,k}=1+\operatorname{Re}\frac{a_{k+j+1,k}}{Q^{(m)}_{k+j+1,k}}=$$

$$=1+\frac{|a_{k+j+1,k}|}{\left|Q^{m}_{k+j+1,k}\right|^2}\left(u^{(m)}_{k+j+1,k}\cos\varphi_{k+j+1,k}+v^{(m)}_{k+j+1,k}\sin\varphi_{k+j+1,k}\right),$$

$$v^{(m+1)}_{k+j,k}=\operatorname{Im}\frac{a_{k+j+1,k}}{Q^{(m)}_{k+j+1,k}}=$$

$$=\frac{|a_{k+j+1,k}|}{\left|Q^{m}_{k+j+1,k}\right|^2}\left(u^{(m)}_{k+j+1,k}\sin\varphi_{k+j+1,k}-v^{(m)}_{k+j+1,k}\cos\varphi_{k+j+1,k}\right),$$

за умов теореми для $k,m=0,1,\ldots,\ \ j=1,2,\ldots$ отримуємо

$$|Q^{(m+1)}_{k+j,k}|^2=\left(u^{(m+1)}_{k+j,k}\right)^2+\left(v^{(m+1)}_{k+j,k}\right)^2\geq 1+\frac{|a_{k+j+1,k}|^2}{\left|Q^{(m)}_{k+j+1,k}\right|^2}.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{|a_{k+j+1,k}|^2}{\left|Q^{(m+1)}_{k+j,k}\right|^2\left|Q^{(m)}_{k+j+1,k}\right|^2}\leq\frac{(L_1)^2(K_1)^2}{1+(L_1)^2(K_1)^2}=(\rho_1)^2, \quad k,m=0,1,\ldots, \quad j=1,2,\ldots.$$

Так само

$$\frac{|a_{k,k+j+1}|^2}{\left|Q^{(m+1)}_{k,k+j}\right|^2\left|Q^{(m)}_{k,k+j+1}\right|^2}\leq\frac{(L_2)^2(K_2)^2}{1+(L_2)^2(K_2)^2}=(\rho_2)^2, \quad k,m=0,1,\ldots, \quad j=1,2,\ldots.$$

Застосовуючи теорему 1, завершуємо доведення теореми 2.

Теорема 3. *Нехай для елементів ДНД* (1), (2) *виконуються умови* (23), *де* $L,\ L_1,\ L_2$ — *додатні сталі. Тоді*:

1) *у кожній точці* $z=(z_1,z_2)$ *із множини*

$$G_K=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_j|\leq K_j,\ -\frac{\pi}{2}\leq\arg(z_j)\leq 0,\ \ j=1,2;\ \ -\frac{\pi}{2}\leq\arg(z_1)+\arg(z_2)\right\}$$

ДНД (1), (2) *збігається до функції* $f(z)$ *і справджується оцінка* (25), *де* $\rho,\ \rho_1,\ \rho_2$ *визначаються за формулами* (26), *а* $S_{1,m},\ S_{2,m}$ — *за формулами* (15), (16);

2) *збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині з* $\operatorname{Int}G_K$.

Зауважимо, що у цьому випадку з формул (27) – (40) і умов теореми випливає, що

$$u^{(p)}_{i,j}\geq 1, \quad v^{(p)}_{i,j}\leq 0, \quad i,j,p=0,1,\ldots, \quad i\neq j,$$

$$u^{(p)}_{k}\geq 1, \qquad v^{(p)}_{k}\leq 0, \qquad \operatorname{Re}\Phi^{(p)}_{k}\geq 0, \qquad \operatorname{Im}\Phi^{(p)}_{k}\leq 0, \quad k=1,2,\ldots, \quad p=0,1,\ldots.$$

Далі доведення теореми 3 проводимо за тією ж схемою, що й доведення теореми 2.

Теорема 4. *Нехай для елементів ДНД* (1), (2) *виконуються умови* (23), *де* $L,\ L_1,\ L_2$ — *додатні сталі. Тоді ДНД* (1), (2) *збігається до функції, голоморфної в області*

$$G = \left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |\arg(z_j)| < \frac{\pi}{2},\ \ j = 1, 2;\ \ |\arg(z_1) + \arg(z_2)| < \frac{\pi}{2} \right\},$$

причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області G.

Доведення. Всі оцінки дійсних частин залишків, отримані при доведенні теореми 2, справджуються і за умов теореми 4, тому

$$u_1^{(p)} \geq 1, \qquad u_{1,0}^{(p)} \geq 1, \qquad u_{0,1}^{(p)} \geq 1, \quad p = 0, 1, \ldots, \tag{43}$$

а отже, всі фігурні підхідні дроби ДНД (1), (2) голоморфні в області G функції.

Нехай K — довільна компактна множина області G. Тоді існує відкрита куля $B \subset \mathbb{C}^2$ з центром у точці $(0; 0)$ і радіусом r така, що $K \subset B$.

Використовуючи формули (5), (7), (8) і оцінки (43), отримуємо

$$|f_1(z)| \leq |a_{0,0}| + \frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(0)}\right|} + \frac{|a_{0,1}|}{\left|Q_{0,1}^{(0)}\right|} \leq |a_{0,0}| + c_{1,0}|z_1| + c_{0,1}|z_2| < |a_{0,0}| + (c_{1,0} + c_{0,1})r,$$

$$|f_n(z)| \leq |a_{0,0}| + \frac{|a_{1,0}|}{\left|Q_{1,0}^{(n-1)}\right|} + \frac{|a_{0,1}|}{\left|Q_{0,1}^{(n-1)}\right|} + \frac{|a_{1,1}|}{\left|Q_1^{(n-2)}\right|} < |a_{0,0}| + (c_{1,0} + c_{0,1})r + c_{1,1}r^2,$$

$$n = 2, 3, \ldots,$$

тобто $\{f_n(z)\}$ — це послідовність рівномірно обмежених на K функцій. Отже, ця послідовність рівномірно обмежена на кожній компактній підмножині області G.

Згідно з теоремою 2, послідовність $\{f_m(z)\}$ збігається у кожній точці множини

$$\Delta = \{0 < \operatorname{Re} z_j < \delta,\ \ \operatorname{Im} z_j = 0,\ \ j = 1, 2\} \subset G,$$

яка є двовимірним дійсним околом точки $z^{(0)} = (\delta/2, \delta/2)$. Таким чином, послідовність $\{f_n(z)\}$ задовольняє умови багатовимірного аналога теореми Стільтьєса – Віталі [9] (теорема 2.17), тому збігається рівномірно на довільній компактній підмножині області G до голоморфної функції в G.

Література

1. Т. М. Антонова, *Швидкість збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Волин. мат. вісн., **6**, 5 – 11 (1999).
2. Т. М. Антонова, Д. І. Боднар, *Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Теорія наближення функцій та її застосування, Праці Ін-ту математики НАН України, **31**, 5 – 18 (2000).
3. Т. М. Антонова, С. М. Возна, *Про один аналог методу фундаментальних нерівностей для дослідження збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка”, Сер. фіз.-мат. науки, **871**, 5 – 12 (2017).
4. Т. М. Антонова, С. М. Возна, *Про збіжність одного класу двовимірних відповідних гіллястих ланцюгових дробів*, Прикл. пробл. механіки і математики, вип. 18, 25 – 33 (2020).
5. Т. М. Антонова, Р. І. Дмитришин, *Оцінки похибки наближення для гіллястого ланцюгового дробу* $\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{1} + \ldots$, Укр. мат. журн., **72**, № 7, 877 – 885 (2020).
6. Т. М. Антонова, О. М. Сусь, *Про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **50**, № 3, 94 – 101 (2007).

7. Т. М. Антонова, О. М. Сусь, *Про одну ознаку фігурної збіжності двовимірних неперервних дробів з комплексними елементами*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **52**, № 2, 28 – 35 (2009).
8. Т. М. Антонова, О. М. Сусь, *Про деякі послідовності множин рівномірної збіжності двовимірних неперервних дробів*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **58**, № 1, 47 – 56 (2015).
9. Д. И. Боднар, *Ветвящиеся цепные дроби*, Наук. думка, Київ (1986).
10. Д. І. Боднар, І. Б. Біланик, *Про збіжність гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду у кутових областях*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **60**, № 3, 60 – 69 (2017).
11. Д. І. Боднар, І. Б. Біланик, *Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності ГЛД з нерівнозначними змінними*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **62**, № 4, 72 – 82 (2019).
12. Д. І. Боднар, Р. І. Дмитришин, *Багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди*, Укр. мат. журн., **71**, № 3, 325 – 339 (2019).
13. С. М. Возна, *Про збіжність двовимірного неперервного g-дробу*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **47**, № 3, 28 – 32 (2004).
14. С. М. Возна, Х. Й. Кучмінська, *Відповідність між формальним подвійним степеневим рядом і двовимірним неперервним g-дробом*, Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **1**, № 4, 130 – 142 (2004).
15. Р. І. Дмитришин, *Про розвинення деяких функцій у двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **53**, № 4, 28 – 34 (2010).
16. Р. І. Дмитришин, *Двовимірне узагальнення qd-алгоритму Рутисхаузера*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **56**, № 4, 6 – 11 (2013).
17. Р. І. Дмитришин, *Приєднані гіллясті ланцюгові дроби з двома нерівнозначними змінними*, Укр. мат. журн., **66**, № 9, 1175 – 1184 (2014).
18. Х. Й. Кучмінська, *Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду*, Доп. АН УРСР. Сер. А, № 7, 614 – 618 (1978).
19. Х. Й. Кучмінська, *Двовимірні неперервні дроби*, Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів (2010).
20. Х. Й. Кучмінська, О. М. Сусь, С. М. Возна, *Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів*, Укр. мат. журн., **55**, № 1, 30 – 44 (2003).
21. О. М. Сусь, *Про один із аналогів методу фундаментальних нерівностей для двовимірних неперервних дробів*, Прикл. пробл. механіки і математики, вип. 5, 71 – 76 (2007).
22. T. M. Antonova, R. I. Dmytryshyn, *Truncation error bounds for branched continued fraction whose partial denominators are equal to unity*, Mat. Stud., **54**, № 1, 3 – 14 (2020).
23. R. I. Dmytryshyn, *The two-dimensional g-fraction with independent variables for double power series*, J. Approx. Theory, **164**, № 12, 1520 – 1539 (2012).
24. R. I. Dmytryshyn, *Multidimensional regular C-fraction with independent variables corresponding to formal multiple power series*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1 – 18 (2019); DOI:10.1017/prm.2019.2.
25. R. I. Dmytryshyn, *On some of convergence domains of multidimensional S-fractions with independent variables*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 1, 54 – 58 (2019).
26. R. I. Dmytryshyn, S. V. Sharyn, *Approximation of functions of several variables by multidimensional S-fractions with independent variables*, Carpathian Math. Publ., **13**, № 3, 592 – 607 (2021).
27. W. B. Jones, W. J. Thron, *Continued fractions: analytic theory and applications*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mas. (1980).
28. Kh. Yo. Kuchmins'ka, S. M. Vozna, *Truncation error bounds for a two-dimensional continued g-fraction*, Mat. Stud., **24**, № 2, 120 – 126 (2005).
29. J. Murphy, M. R. O'Donohoe, *A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions*, J. Comput. and Appl. Math., **4**, № 3, 181 – 190 (1978).
30. W. Siemaszko, *Branched continued fraction for double power series*, J. Comput. and Appl. Math., **6**, № 2, 121 – 125 (1980).

Одержано 07.12.21