DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7083

УДК 517.555

А. І. Бандура* (Івано-Франк. нац. техн. ун-т нафти і газу),
О. Б. Скасків (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів)

ЛОКАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ ЗА ЗМІННИМ НАПРЯМКОМ (РЕПЕРОМ)

We extend the concept of entire functions of bounded index in a variable direction to the case where the variable direction is a continuous vector-valued function. The previous investigations of this class of functions assumed that the variable direction is an entire vector-valued function. An entire function $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ is called a function of bounded index in a frame $\mathbf{b}(z)$, if there exists $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that, for every $m \in \mathbb{Z}_+$, for all $z \in \mathbb{C}^n$, and for all $t \in \mathbb{C}$, one has $\dfrac{\left|\partial^m_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{m!} \le \max_{0\le k\le m_0} \dfrac{\left|\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{k!}$, where $\partial^0_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z)) = F(z+t\mathbf{b}(z))$, $\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z)) := \dfrac{k!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\tau|=r} \dfrac{F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))}{\tau^{k+1}}d\tau$ and $\mathbf{b}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ is a vector-valued continuous function. Here we investigate some properties of these functions. The obtained results are counterparts of the known statements obtained for entire functions of bounded index in a fixed direction. These results describe the local behavior of the modulus $\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}+\tau\mathbf{b}(z))$ in the disc $|\tau| = \eta$. We give some estimates for this expression by means of the values $\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b})$.

Розширено поняття цілої функції обмеженого індексу за змінним напрямком на випадок, коли змінний напрямок — неперервна векторнозначна функція. Попередні дослідження цього класу функцій містили обмеження, що змінний напрямок — ціла векторнозначна функція. Ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого індексу за змінним напрямком (репером) $\mathbf{b}(z)$, якщо існує таке $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$, всіх $z \in \mathbb{C}^n$ і всіх $t \in \mathbb{C}$ виконується $\dfrac{\left|\partial^m_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{m!} \le \max_{0\le k\le m_0} \dfrac{\left|\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{k!}$, де $\partial^0_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z)) = F(z+t\mathbf{b}(z))$, $\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}(z)) := \dfrac{k!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|\tau|=r} \dfrac{F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))}{\tau^{k+1}}d\tau$ і $\mathbf{b} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — векторнозначна неперервна функція. У статті досліджено деякі властивості цих функцій. Отримані результати є аналогами тверджень, відомих для цілих функцій обмеженого індексу за фіксованим напрямком. Вони описують локальне поводження модуля $\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b}+ \tau\mathbf{b}(z))$ на колі $|\tau| = \eta$. Знайдено деякі оцінки цього виразу за допомогою значень $\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z+t\mathbf{b})$.

1. Вступ. Нехай $L\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція, $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ — заданий напрямок, а $n \in \mathbb{N}$. Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком є об'єктом дослідження більше 10 років. Наведемо означення цього поняття.

Означення 1 [3, 4]. *Ціла функція $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого L-індексу за напрямком $\mathbf{b}$, якщо існує таке $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ і для всіх $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ виконується*

$$\frac{|\partial^m_{\mathbf{b}} F(z)|}{m! L^m(z)} \le \max_{0\le k\le m_0} \frac{|\partial^k_{\mathbf{b}} F(z)|}{k! L^k(z)}, \tag{1}$$

де

$$\partial^0_{\mathbf{b}} F(z) = F(z), \qquad \partial^1_{\mathbf{b}} F(z) = \partial_{\mathbf{b}} F(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j,$$

$$\partial^k_{\mathbf{b}} F(z) := \partial_{\mathbf{b}}\big(\partial^{k-1}_{\mathbf{b}} F(z)\big), \quad k \ge 2.$$

* Дослідження підтримано Національним фондом досліджень України (проєкти 2020.02/0025, 0120U103996).

Цей клас функцій є доволі широким [2], оскільки для кожної цілої функції F, нулі якої мають обмежену в сукупності кратність на довільній комплексній прямій $\{z + t\mathbf{b} : t \in \mathbb{C}\}$ для кожного $z \in \mathbb{C}^n$, існує додатна неперервна функція L така, що функція F має обмежений L-індекс за напрямком $\mathbf{b}$. Це твердження є аналогом відповідного одновимірного твердження [10, 11] для цілих функцій обмеженого l-індексу, де $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція.

Нещодавно в [1] автори ввели поняття обмеженості індексу за змінними напрямками. Зазначимо, що за інтегральною формулою Коші похідну p-го порядку за напрямком $\partial_{\mathbf{b}}$ цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ можна записати у вигляді

$$\partial_{\mathbf{b}}^p F(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{F(z+\tau\mathbf{b})}{\tau^{p+1}} d\tau, \tag{2}$$

де $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\tau \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$. Тому, якщо в нерівності (1) ми приймемо

$$\partial_{\mathbf{b}(z)}^p F(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{F(z+\tau\mathbf{b}(z))}{\tau^{p+1}} d\tau,$$

де $\mathbf{b}(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — деяка функція, прийдемо до поняття цілої функції обмеженого індексу за змінним напрямком $b(z)$.

У статті [1] доведення вимагали доволі жорсткого припущення, що функція $\mathbf{b}(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ є цілою векторнозначною функцією.

У даній статті ми цю умову замінимо лише умовою неперервності векторнозначної функції $\mathbf{b}(z)$, що, очевидно, є істотно слабшою умовою.

Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$, $L : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція, $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція.

Далі вважатимемо, що $\mathbf{b}(z) = (b_1(z), \ldots, b_n(z)) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — деяка неперервна векторнозначна функція.

З огляду на рівність (2) означимо

$$\partial_{\mathbf{b}(z_1)}^k F(z_2) := \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{F(z_2+\tau\mathbf{b}(z_1))}{\tau^{k+1}} d\tau \quad \text{для будь-яких} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n. \tag{3}$$

Розглянемо тепер таке узагальнення поняття обмеженості індексу за напрямком.

Означення 2 [1]. *Ціла функція $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого індексу за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$, якщо існує таке $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, що для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ і для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ виконується нерівність*

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^m F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{m!} \le \max_{0 \le k \le m_0} \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^k F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{k!}, \tag{4}$$

де $\partial_{\mathbf{b}(z)}^0 F(z+t\mathbf{b}(z)) = F(z+t\mathbf{b}(z))$, а $\partial_{\mathbf{b}(z)}^m F(z+t\mathbf{b}(z))$ означено рівністю (3) *при $z_1 = z$ і $z_2 = z + t\mathbf{b}(z)$.*

Найменше з тих m_0, для яких виконується нерівність (4), називатимемо індексом функції $F(z)$ за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$ і позначатимемо через $N_{\mathbf{b}}(F)$. Якщо такого m_0 не існує, то вважаємо, що $N_{\mathbf{b}}(F) = +\infty$, а функцію F у цьому випадку називаємо функцією необмеженого індексу за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$. Якщо $\mathbf{b}(z) \equiv (b_1, \ldots, b_n) = \mathbf{b}$ є сталим вектором, то звідси отримуємо звичайне означення обмеженого індексу за напрямком $\mathbf{b}$. Зрозуміло, що клас усіх цілих функцій обмеженого індексу за напрямком є підкласом класу всіх цілих функцій обмеженого індексу за змінним напрямком.

Нехай $N_{\mathbf{b}}(F, z^0)$ позначає індекс функції F у точці z^0 за напрямком $\mathbf{b}(z_0)$, тобто найменше ціле значення m_0, для якого нерівність (4) виконується в точці $z = z^0$.

При $n = 1$ і $\mathbf{b}(z) \equiv 1$ означення переходить в означення функції обмеженого індексу, введене Б. Лепсоном [15] (див. також [16]). У цьому випадку $N(f) := N_1(f)$. Через $N(f, z^0)$ у випадку $n = 1$, $\mathbf{b}(z) = 1$ позначаємо індекс цілої функції $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в точці $z^0 \in \mathbb{C}$.

2. Зв'язок обмеженого індексу за змінним напрямком із одновимірним випадком. Доведемо кілька елементарних тверджень, які описують зв'язок цілих функцій обмеженого індексу за змінним напрямком і цілих функцій обмеженого індексу однієї змінної. Подібні твердження для цілих функцій багатьох змінних отримано в [3], а для голоморфних на зрізках функцій — у [6]. Для фіксованого $z \in \mathbb{C}^n$ позначимо $g_z(t) = F(z + t\mathbf{b}(z))$.

***Зауваження* 1.** Розглядаючи $F(z + t\mathbf{b}(z))$ при фіксованому $z \in \mathbb{C}^n$ як цілу функцію від змінної $t \in \mathbb{C}$ і застосовуючи інтегральну формулу Коші, для кожного $r > 0$ отримуємо

$$g_z^{(k)}(t) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{g_z(\tau + t)}{\tau^{k+1}} d\tau = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=r} \frac{F(z + (\tau + t)\mathbf{b}(z))}{\tau^{k+1}} d\tau = \partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z)). \quad (5)$$

З огляду на рівність (5) ми можемо замість $\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z)$ розглянути $g_z^{(k)}(0)$ і скористатися одновимірними міркуваннями. Доведемо спочатку таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\mathbf{b}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *— неперервна векторнозначна функція. Якщо ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *має обмежений індекс за змінним напрямком* $\mathbf{b}(z)$, *то для кожного* $z \in \mathbb{C}^n$ *ціла функція* $g_z(t)$ *має обмежений індекс і* $N(g_z) \le N_{\mathbf{b}}(F)$.

Доведення. Нехай $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$. З рівності (5) за означенням обмеженості індексу за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$ для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ отримуємо

$$\frac{|g_z^{(p)}(t)|}{p!} = \frac{|\partial^p_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))|}{p!} \le$$

$$\le \max\left\{ \frac{|\partial^k_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))|}{k!} : 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F) \right\} = \max\left\{ \frac{|g_z^{(k)}(t)|}{k!} : 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F) \right\}.$$

Звідси випливає, що $g_z(t)$ має обмежений індекс і $N(g_z) \le N_{\mathbf{b}}(F)$.

Твердження 1 доведено.

З рівності (5) випливає таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $\mathbf{b}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *— неперервна вектор-функція. Якщо ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *має обмежений індекс у змінному напрямку* $\mathbf{b}(z)$, *то*

$$N_{\mathbf{b}}(F) = \max\{N(g_z) : z \in \mathbb{C}^n\}.$$

Твердження 3. *Нехай* $\mathbf{b}\colon\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *— неперервна вектор-функція. Для того щоб ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *мала обмежений індекс за змінним напрямком* $\mathbf{b}(z)$, *необхідно й достатньо, щоб існувало таке* $M > 0$, *що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *функція* $g_z(t)$ *як функція змінної* $t \in \mathbb{C}$ *має обмежений індекс* $N(g_z) \le M < +\infty$. *Тому* $N_{\mathbf{b}}(F) = \max\{N(g_z, 0)\colon z \in \mathbb{C}^n\}$.

Доведення. *Необхідність* отримуємо з твердження 1.

Достатність. Оскільки $N(g_z) \le M$, то існує $\max\{N(g_z)\colon z \in \mathbb{C}^n\}$. Позначимо $N_{\mathbf{b}} = \max\{N(g_z)\colon z \in \mathbb{C}^n\} < +\infty$. Припустимо, що $N_{\mathbf{b}}$ не дорівнює індексу функції $F(z)$ за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$. Останнє означає, що існують $n^* > N_{\mathbf{b}}$, $z^* \in \mathbb{C}^n$ і $t^* \in \mathbb{C}$, для яких виконується нерівність

$$\frac{\left|\partial^{n^*}_{\mathbf{b}(z^*)} F(z^* + t^*\mathbf{b})\right|}{n^*!} > \max\left\{\frac{\left|\partial^{k}_{\mathbf{b}(z^*)} F(z^* + t^*\mathbf{b}(z))\right|}{k!}\colon 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F)\right\}. \tag{6}$$

З огляду на рівність (5) нерівність (6) можемо записати у вигляді

$$\frac{\left|g^{(n^*)}_{z^*}(t^*)\right|}{n^*!} > \max\left\{\frac{\left|g^{(k)}_{z^*}(t^*)\right|}{k!}\colon 0 \le k \le N_{\mathbf{b}}(F)\right\}.$$

Але це неможливо (суперечить тому, що всі індекси $N(g_z)$ не перевищують $N_{\mathbf{b}}$). Тому $N_{\mathbf{b}} = N_{\mathbf{b}}(F)$, тобто є індексом функції $F(z)$ за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$.

Твердження 3 доведено.

3. Локальне поводження функцій обмеженого індексу за змінним напрямком. Наступне твердження відіграє важливу роль в теорії функцій обмеженого індексу. Воно лежить в основі доведень низки інших тверджень, які є необхідними для доведення логарифмічного критерію і аналога теореми Хеймана. Ці дві теореми посідають центральне місце у застосуваннях теорії обмеженого індексу до аналітичної теорії диференціальних рівнянь. Вони надають методи для отримання оцінок зростання та опису локального поводження аналітичних розв'язків як звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними, так і систем таких рівнянь [17, 18, 20]. Ми припускаємо, що методи з цих робіт можна застосувати до задач, що містять похідну за змінним напрямком, наприклад за напрямком нормалі (тобто за ортогональним напрямком) до деякої поверхні.

Теорему, аналогом якої є наступна теорема, вперше для цілих функцій обмеженого індексу однієї змінної отримав G. H. Fricke [13], а для різних класів аналітичних функцій її аналоги доведено в [3, 5, 7, 8, 14, 19]. Тут ми доведемо аналог цієї теореми для випадку обмеженого індексу за змінним напрямком.

Теорема 1. *Нехай* $\mathbf{b}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *— неперервна вектор-функція. Якщо ціла функція* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *має обмежений індекс за змінним напрямком* $\mathbf{b}(z)$, *то для кожного* $\eta > 0$ *існують такі* $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ *і* $P_1 = P_1(\eta) \ge 1$, *що для кожних* $z \in \mathbb{C}^n$ *і* $t \in \mathbb{C}$ *існує* $k_0 = k_0(z,t) \in \mathbb{Z}_+$ *таке, що* $0 \le k_0 \le n_0$ *і*

$$\max\left\{\left|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z))\right|\colon\ |\tau| \le \eta\right\} \le P_1 \left|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\right|. \tag{7}$$

Доведення в цілому повторює схему доведення відповідних тверджень для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком [3; 4, с. 20] та за змінним напрямком $\mathbf{b}$ [1], яке там проведене у випадку, коли $\mathbf{b}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ є цілою вектор-функцією.

Нехай $N_{\mathbf{b}}(F) \equiv N < +\infty$, а для $a \in \mathbb{R}$ позначення $[a]$ у даному доведенні означає цілу частину числа a. Позначимо

$$q(\eta) = [2\eta(N+1)] + 1.$$

Для $z \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{C}$ і $p \in \{0, 1, \ldots, q(\eta)\}$ приймемо

$$R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) := \max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}(z)}^k F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z))|}{k!} : |\tau| \le \frac{p\eta}{q(\eta)},\ \ 0 \le k \le N\right\}.$$

Зауважимо, що $|\tau| \le \dfrac{p\eta}{q(\eta)} \le \eta$. Зрозуміло, що $R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)$ означено коректно.

Нехай $k_p = k_p(z,t) \in \mathbb{Z}$, $0 \le k_p \le N$, $\tau_p = \tau_p(z,t) \in \mathbb{C}$, $|\tau_p| \le \dfrac{p\eta}{q(\eta)}$, такі, що

$$R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) = \frac{|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau_p\mathbf{b}(z))|}{k_p!}. \tag{8}$$

Для фіксованих $z \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ функції $F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))$ і $\partial_{\mathbf{b}(z)}^k F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))$ є цілими функціями змінної $\tau \in \mathbb{C}$, тому, за принципом максимуму модуля, рівність (8) виконується для такого τ_p, що $|\tau_p| = \dfrac{p\eta}{q(\eta)}$. Позначимо $\widetilde{\tau}_p = \widetilde{\tau}_p(z,t) = \dfrac{p-1}{p}\tau_p(z,t)$. Тоді

$$|\widetilde{\tau}_p| = \frac{(p-1)\eta}{q(\eta)}, \tag{9}$$

$$|\widetilde{\tau}_p - \tau_p| = \frac{|\tau_p|}{p} = \frac{\eta}{q(\eta)}. \tag{10}$$

З (9) і означення $R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)$ випливає, що

$$R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) \ge \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F(z + t\mathbf{b}(z) + \widetilde{\tau}_p\mathbf{b}(z))\right|}{k_p!}.$$

Тому

$$\begin{gathered} 0 \le R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) - R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) \le \\ \le \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau_p\mathbf{b}(z))\right| - \left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F(z + t\mathbf{b}(z) + \widetilde{\tau}_p\mathbf{b}(z))\right|}{k_p!} = \\ = \frac{1}{k_p!}\int_0^1 \frac{d}{ds}\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big)\right| ds. \end{gathered} \tag{11}$$

Для кожної диференційовної комплекснозначної функції дійсної змінної $\varphi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, нерівність $\dfrac{d}{ds}|\varphi(s)| \le \left|\dfrac{d}{ds}\varphi(s)\right|$ виконується для всіх $s \in \mathbb{R}$ таких, що $\varphi(s) \ne 0$. Застосовуючи останню нерівність до (11), отримуємо

$$R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) - R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) \le$$
$$\le \frac{1}{k_p!}\int\limits_0^1 \left|\frac{d}{ds}\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big)\right| ds. \tag{12}$$

Нагадаємо, що $g_z(t) = F(z + t\mathbf{b})$. З рівності (3) одержуємо

$$\frac{d}{ds}\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big) =$$
$$= \frac{d}{ds}\int\limits_{|w|=r} \frac{k_p!}{2\pi i}\frac{F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z) + w\mathbf{b}(z)\big)}{w^{k_p+1}} dw =$$
$$= \frac{d}{ds}\int\limits_{|w|=r} \frac{k_p!}{2\pi i}\frac{g_{z+t\mathbf{b}(z)+\widetilde{\tau}_p\mathbf{b}(z)}\big(s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p) + w\big)}{w^{k_p+1}} dw. \tag{13}$$

Але $g_z(t)$ — ціла функція і останнє зображення (13) є інтегральною формулою Коші для функції g_z, тобто

$$\frac{d}{ds}\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big) = \frac{d}{ds}\left(g^{(k_p)}_{z+t\mathbf{b}(z)+\widetilde{\tau}_p\mathbf{b}(z)}\big(s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\right) =$$
$$= (\tau_p - \widetilde{\tau}_p) g^{(k_p+1)}_{z+t\mathbf{b}(z)+\widetilde{\tau}_p\mathbf{b}(z)}\big(s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big).$$

Підставляючи останню рівність у (12) і застосовуючи (5), отримуємо

$$R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) - R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) \le \frac{|\tau_p - \widetilde{\tau}_p|}{k_p!}\int\limits_0^1 \left|g^{(k_p+1)}_{z+t\mathbf{b}(z)+\widetilde{\tau}_p\mathbf{b}(z)}\big(s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\right| ds =$$
$$= \frac{|\tau_p - \widetilde{\tau}_p|}{k_p!}\int\limits_0^1 \left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p+1} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big)\right| ds. \tag{14}$$

За теоремою про середнє, застосованою до (14), маємо

$$R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) - R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta) \le \frac{|\tau_p - \widetilde{\tau}_p|}{k_p!}\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p+1} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s^*(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big)\right| =$$
$$= (k_p+1)|\tau_p - \widetilde{\tau}_p|\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p+1} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \big(\widetilde{\tau}_p + s^*(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big)\right|}{(k_p+1)!}, \tag{15}$$

де $s^* \in [0,1]$. Точка $\widetilde{\tau}_p + s^*(\tau_p - \widetilde{\tau}_p)$ є точкою з множини

$$\left\{\tau \in \mathbb{C} \colon |\tau| \le \frac{p\eta}{q(\eta)} \le \eta\right\}.$$

За означенням обмеженості індексу за змінним напрямком, використовуючи позначення $q(\eta)$ і застосовуючи нерівності (10) і (15), для $k_p \le N$ одержуємо

$$R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)-R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)\le$$

$$\le\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_p+1}F\big(z+t\mathbf{b}(z)+\big(\widetilde{\tau}_p+s^*(\tau_p-\widetilde{\tau}_p)\big)\mathbf{b}(z)\big)\right|}{(k_p+1)!}(k_p+1)|\tau_p-\widetilde{\tau}_p|\le$$

$$\le\eta\frac{N+1}{q(\eta)}\max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k}F(z+t\mathbf{b}(z)+(\widetilde{\tau}_p+s^*(\tau_p-\widetilde{\tau}_p))\mathbf{b}(z))\right|}{k!}:0\le k\le N\right\}\le$$

$$\le\eta\frac{N+1}{q(\eta)}R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)\le\frac{\eta(N+1)}{[2\eta(N+1)]+1}R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)\le\frac{1}{2}R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta).$$

Звідси випливає, що $R_p^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)\le 2R_{p-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)$ для довільного $p\in\mathbb{N}$.

Отже,

$$\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k}F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))|}{k!}:|\tau|\le\eta, 0\le k\le N\right\}=R_{q(\eta)}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)\le$$

$$\le 2R_{q(\eta)-1}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)\le 2^2R_{q(\eta)-2}^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)\le 2^{q(\eta)}R_0^{\mathbf{b}}(z,t,\eta)=$$

$$=2^{q(\eta)}\max\left\{\frac{|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k}F(z+t\mathbf{b}(z))|}{k!}:0\le k\le N\right\}. \tag{16}$$

Нехай $k_{z,t}\in\mathbb{Z},\ 0\le k_{z,t}\le N,\ \widetilde{\tau_{z,t}}\in\mathbb{C},\ |\widetilde{\tau_{z,t}}|=\eta$ такі, що

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{k_{z,t}!}=\max_{0\le k\le N}\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k}F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{k!},$$

а також

$$\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z)+\widetilde{\tau_{z,t}}\mathbf{b}(z))\right|=\max\left\{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))\right|:\tau\le\eta\right\}.$$

З нерівності (16) випливає, що

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z)+\widetilde{\tau_{z,t}}\mathbf{b}(z))\right|}{k_{z,t}!}=\max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))\right|}{k_{z,t}!}:|t|\le\eta\right\}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k}F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))\right|}{k!}:|t|\le\eta,\ \ 0\le k\le N\right\}\le$$

$$\le(2)^{q(\eta)}\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z))\right|}{k_{z,t}!},$$

звідки

$$\max\left\{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z)+\tau\mathbf{b}(z))\right|:|\tau|\le\eta\right\}\le 2^{q(\eta)}\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_{z,t}}F(z+t\mathbf{b}(z))\right|.$$

Тому (7) отримуємо з $n_0=N_{\mathbf{b}}(F),\ k_0=k_z$ і

$$P_1(\eta)=2^{q(\eta)}.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай $F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — ціла функція, $\mathbf{b}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — неперервна вектор-функція. Якщо для кожного $\eta > 0$ існують такі $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ і $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$, що для кожних $z \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ існує $k_0 = k_0(z,t) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого виконується нерівність* (7), *то функція F має обмежений індекс за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$.*

Доведення. Припустимо, що для кожного $\eta > 0$ існують такі $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ і $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$, що для кожних $z \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ існує $k_0 = k_0(z,t) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого виконується нерівність (7). Виберемо такі $\eta > 1$ і $j_0 \in \mathbb{N}$, що $P_1 \leq \eta^{j_0}$. Для заданих $z \in \mathbb{C}^n$, $k_0 = k_0(z,t)$ і $j \geq j_0$ за формулою Коші для $F(z + t\mathbf{b}(z))$ як функції від змінної t отримуємо

$$\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0+j} F(z + t\mathbf{b}(z)) = \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\eta} \frac{\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z))}{\tau^{j+1}} d\tau.$$

Тому за нерівністю (7) маємо

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0+j} F(z + t\mathbf{b}(z))\right|}{j!} \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=\eta} \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z))\right|}{|\tau|^{j+1}} |d\tau| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\eta^j} \max\left\{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z))\right| : |\tau| = \eta\right\} \leq$$

$$\leq \frac{P_1}{\eta^j} \left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0} F(z + t\mathbf{b}(z))\right|.$$

Звідси для всіх $j \geq j_0$, $z \in \mathbb{C}^n$ одержуємо

$$\frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0+j} F(z + t\mathbf{b}(z))\right|}{(k_0 + j)!} \leq \frac{j!k_0!}{(j + k_0)!} \frac{P_1}{\eta^j} \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0} F(z + t\mathbf{b}(z))\right|}{k_0!} \leq$$

$$\leq \eta^{j_0 - j} \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0} F(z + t\mathbf{b}(z))\right|}{k_0!} \leq \frac{\left|\partial_{\mathbf{b}(z)}^{k_0} F(z + t\mathbf{b}(z))\right|}{k_0!}.$$

Тут ми скористалися тим, що $\dfrac{j!k_0!}{(j + k_0)!} \leq 1$. Оскільки $k_0 \leq n_0$, а числа $n_0 = n_0(\eta)$ і $j_0 = j_0(\eta)$ є незалежними від z і t_0, то ця нерівність означає, що функція F є функцією обмеженого індексу за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$ і $N_{\mathbf{b}}(F) \leq n_0 + j_0$.

Теорему 2 доведено.

З теорем 1 і 2 отримуємо такий критерій.

Наслідок 1. *Нехай $\mathbf{b}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — неперервна вектор-функція. Для того щоб ціла функція $F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ була функцією обмеженого індексу за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\eta > 0$ існували такі $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ і $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$, що для кожних $z \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ існує $k_0 = k_0(z,t) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого виконується нерівність* (7).

Наступна теорема є аналогом тверджень, встановлених для цілих і аналітичних в одиничній кулі функцій обмеженого L-індексу за напрямком [3, 5].

Теорема 3. *Нехай $\mathbf{b}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — неперервна вектор-функція. Ціла функція $F: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ має обмежений індекс за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$ тоді і тільки тоді, коли F має обмежений індекс за змінним напрямком $\alpha\mathbf{b}(z)$, де $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Доведення. Нехай F — ціла функція обмеженого індексу за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$. За теоремою 1 $(\forall\eta > 0)$ $(\exists n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+)$ $(\exists P_1(\eta) \geq 1)$ $(\forall z \in \mathbb{C}^n)$ $(\forall t \in \mathbb{C})$ $(\exists k_0 = k_0(z,t) \in \mathbb{Z}_+,$ $0 \leq k_0 \leq n_0)$ і виконується нерівність (7).

Для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ і довільного $t \in \mathbb{C}$ маємо

$$\partial^k_{\alpha\mathbf{b}(z)} F(z + t\alpha\mathbf{b}(z)) = \int\limits_{|\tau|=r} \frac{\big|F(z + t\alpha\mathbf{b}(z) + \tau\alpha\mathbf{b}(z))\big|}{\tau^{k+1}} d\tau =$$

$$= \alpha^k \int\limits_{|\tau|=r} \frac{\big|F(z + t\alpha\mathbf{b}(z) + \tau\alpha\mathbf{b}(z))\big|}{(\alpha\tau)^{k+1}} d(\alpha\tau) =$$

$$= \alpha^k \int\limits_{|\tau|=r} \frac{\big|F(z + t\alpha\mathbf{b}(z) + \tau\alpha\mathbf{b}(z))\big|}{(\alpha\tau)^{k+1}} d(\alpha\tau) =$$

$$= \alpha^k \int\limits_{|w|=r|\alpha|} \frac{|F(z + t\alpha\mathbf{b}(z) + w\mathbf{b}(z))|}{w^{k+1}} d(w) = \alpha^k \partial_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\alpha\mathbf{b}(z)). \qquad (17)$$

Застосовуючи (17), записуємо нерівність (7) у вигляді

$$\max\left\{|\alpha|^{k_0}\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z))\big| : |\tau| \leq \eta\right\} \leq P_1 |\alpha|^{k_0}\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|,$$

або

$$\max\left\{\left|\partial^{k_0}_{\alpha\mathbf{b}(z)} F\left(z + \frac{t}{\alpha}\alpha\mathbf{b}(z) + \frac{\tau}{\alpha}\alpha\mathbf{b}(z)\right)\right| : |\tau/\alpha| \leq \eta/|\alpha|\right\} \leq P_1\left|\partial^{k_0}_{\alpha\mathbf{b}(z)} F\left(z + \frac{t}{\alpha}\alpha\mathbf{b}(z)\right)\right|.$$

Позначаючи $t^* = \dfrac{t}{\alpha}$, $\tau^* = \dfrac{\tau}{\alpha}$, $\eta^* = \dfrac{\eta}{|\alpha|}$, отримуємо

$$\max\left\{\big|\partial^{k_0}_{\alpha\mathbf{b}(z)} F(z + t^*\alpha\mathbf{b}(z) + \tau^*\alpha\mathbf{b}(z))\big| : |\tau^*| \leq \eta^*\right\} \leq P_1\big|\partial^{k_0}_{\alpha\mathbf{b}(z)} F(z + t^*\alpha\mathbf{b}(z))\big|.$$

За теоремою 2 функція $F(z)$ має обмежений індекс за змінним напрямком $\alpha\mathbf{b}(z)$. Обернене твердження доводиться аналогічно.

Теорему 3 доведено.

Скориставшись ідеєю Фріке [12], отримаємо таку модифікацію теореми 2.

Теорема 4. *Нехай* $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *— ціла функція,* $\mathbf{b} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *— неперервна вектор-функція. Якщо існують такі* $\eta > 0$, $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ *і* $P_1 = P_1(\eta) \geq 1$, *що для всіх* $z \in \mathbb{C}^n$ *і для кожного* $t \in \mathbb{C}$ *існує* $k_0 = k_0(z,t) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, *для якого виконується нерівність* (7), *то функція* F *має обмежений індекс за змінним напрямком* $\mathbf{b}(z)$.

Доведення повторює схему доведення відповідної теореми для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком [9].

Припустимо, що існують такі $\eta > 0$, $n_0 = n_0(\eta) \in \mathbb{Z}_+$ і $P_1 \geq 1$, що для кожних $z \in \mathbb{C}^n$ і $t \in \mathbb{C}$ існує $k_0 = k_0(z,t) \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_0 \leq n_0$, для якого виконується нерівність (7).

Якщо $\eta > 1$, то виберемо $j_0 \in \mathbb{N}$ так, щоб $P_1 \leq \eta^{j_0}$. У випадку $\eta \in (0;1]$ виберемо $j_0 \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{j_0!k_0!}{(j_0+k_0)!}P_1 \leq 1$. Такий вибір j_0 є можливим, оскільки

$$\frac{j_0!k_0!}{(j_0+k_0)!}P_1 = \frac{k_0!}{(j_0+1)(j_0+2)\ldots(j_0+k_0)}P_1 \to 0, \quad j_0 \to +\infty.$$

Запишемо інтегральну формулу Коші для функції $\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))$ комплексної змінної t:

$$\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}(z)} F\big(z + t\mathbf{b}(z)\big) = \frac{j!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\eta} \frac{\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F\big(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z)\big)}{\tau^{j+1}} d\tau.$$

Застосовуючи нерівність (7), отримуємо

$$\frac{\big|\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{j!} \le \frac{1}{\eta^j} \max\Big\{\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z) + \tau\mathbf{b}(z))\big| : |\tau| = \eta\Big\} \le$$
$$\le \frac{P_1}{\eta^j}\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|. \tag{18}$$

За вибором j_0 для $\eta > 1$ і для всіх $j \ge j_0$ виводимо

$$\frac{\big|\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{(k_0+j)!} \le \frac{j!k_0!}{(j+k_0)!}\frac{P_1}{\eta^j}\frac{\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{k_0!} \le$$
$$\le \eta^{j_0-j}\frac{\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{k_0!} \le \frac{\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{k_0!}.$$

Оскільки $k_0 \le n_0$, числа $n_0 = n_0(\eta)$ і $j_0 = j_0(\eta)$ не залежать від z, а $z \in \mathbb{C}^n$ є довільним, то остання нерівність означає, що функція F має обмежений індекс за змінним напрямком $\mathbf{b}(z)$, а $N_{\mathbf{b}}(F) \le n_0 + j_0$.

Якщо $\eta \in (0,1)$, то з нерівності (18) випливає, що для всіх $j \ge j_0$

$$\frac{\big|\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{(k_0+j)!} \le \frac{j!k_0!P_1}{(j+k_0)!}\frac{\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{\eta^j k_0!} \le \frac{\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{\eta^j k_0!}$$

і за вибором j_0

$$\frac{\big|\partial^{k_0+j}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{(k_0+j)!}\eta^{k_0+j} \le \frac{\big|\partial^{k_0}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{k_0!}\eta^{k_0}.$$

За рівністю (17) маємо $\partial^{p}_{\eta\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z)) = \eta^p \partial^{p}_{\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))$. Тому для всіх $j \ge j_0$

$$\frac{\big|\partial^{k_0+j}_{\eta\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{(k_0+j)!} \le \frac{\big|\partial^{k_0}_{\eta\mathbf{b}(z)} F(z + t\mathbf{b}(z))\big|}{k_0!}.$$

Отже, функція F має обмежений індекс за змінним напрямком $\eta\mathbf{b}$. Тоді за теоремою 3 функція F має обмежений індекс за змінним напрямком $\mathbf{b}$.

Теорему 4 доведено.

Література

1. A. I. Bandura, *Entire functions of bounded index in frame*, Mat. Stud., **54**, № 2, 193 – 202 (2020); DOI: 10.30970/ms.54.2.193-202.
2. A. I. Bandura, O. B. Skaskiv, *Boundedness of L-index in direction of functions of the form $f(\langle z, m\rangle)$ and existence theorems*, Mat. Stud., **41**, № 1, 45 – 52 (2014).
3. A. I. Bandura, O. B. Skaskiv, *Entire functions of bounded L-index in direction* (in Ukrainian), Mat. Stud., **27**, № 1, 30 – 52 (2007).
4. A. Bandura, O. Skaskiv, *Entire functions of several variables of bounded index*, Publ. I. E. Chyzhykov, Lviv (2016).
5. A. Bandura, O. Skaskiv, *Functions analytic in the Unit ball having bounded L-index in a direction*, Rocky Mountain J. Math., **49**, № 4, 1063 – 1092 (2019); DOI: 10.1216/RMJ-2019-49-4-1063.
6. A. Bandura, O. Skaskiv, *Slice holomorphic functions in several variables with bounded L-index in direction*, Axioms, **8**, № 3, Article ID 88 (2019); DOI: 10.3390/axioms8030088.
7. A. Bandura, N. Petrechko, O. Skaskiv, *Maximum modulus in a bidisc of analytic functions of bounded $\mathbf{L}$-index and an analogue of Hayman's theorem*, Mat. Bohemica, **143**, № 4, 339 – 354 (2018); DOI: 10.21136/MB.2017.0110-16.
8. A. Bandura, O. Skaskiv, *Sufficient conditions of boundedness of $\mathbf{L}$-index and analog of Hayman's theorem for analytic functions in a ball*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **63**, № 4, 483 – 501 (2018); DOI:10.24193/subbmath.2018.4.06.
9. A. I. Bandura, *A modified criterion of boundedness of L-index in direction*, Mat. Stud., **39**, № 1, 99 – 102 (2013).
10. M. T. Bordulyak, M. M. Sheremeta, *On the existence of entire functions of bounded l-index and l-regular growth*, Ukr. Math. J., **48**, № 9, 1322 – 1340 (1996); DOI: 10.1007/BF02595355.
11. A. A. Goldberg, M. N. Sheremeta, *Existence of an entire transcendental function of bounded l-index*, Math. Notes, **57**, № 1, 88 – 90 (1995); DOI: 10.1007/BF02309399.
12. G. H. Fricke, *Entire functions of locally slow growth*, J. Anal. Math., **28**, 101 – 122 (1975); DOI: 10.1007/BF02786809.
13. G. H. Fricke, *Functions of bounded index and their logarithmic derivatives*, Math. Ann., **206**, 215 – 223 (1973); DOI: 10.1007/BF01429209.
14. A. D. Kuzyk, M. N. Sheremeta, *Entire functions of bounded l-distribution of values*, Math. Notes, **39**, № 1, 3 – 8 (1986); DOI: 10.1007/BF01647624.
15. B. Lepson, *Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index*, Proc. Sympos. Pure Math., **11**, 298 – 307 (1968).
16. J. J. Macdonnell, *Some convergence theorems for Dirichlet-type series whose coefficients are entire functions of bounded index*, Doctoral dissertation, Catholic Univ. America, Washington, USA (1957).
17. F. Nuray, R. F. Patterson, *Vector-valued bivariate entire functions of bounded index satisfying a system of differential equations*, Mat. Stud., **49**, № 1, 67 – 74 (2018); DOI: 10.15330/ms.49.1.67-74.
18. A. Bandura, O. Skaskiv, *Analog of Hayman's theorem and its application to some system of linear partial differential equations*, J. Math. Phys., Anal., Geom., **15**, № 2, 170 – 191 (2019); DOI: 10.15407/mag15.02.170.
19. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publ., Lviv (1999).
20. M. M. Sheremeta, Y. S. Trukhan, *Properties of analytic solutions of a differential equation*, Mat. Stud., **52**, № 2, 138 – 143 (2019); DOI: 10.30970/ms.52.2.138-143.

Одержано 02.01.22