DOI: 10.37863/umzh.v74i4.6980

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Університет ім. А. Нобеля, Дніпро),
М. Б. Вакарчук (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

K-ФУНКЦІОНАЛИ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ АПРОКСИМАЦІЇ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ У КРУЗІ ФУНКЦІЙ. I

Based on the Hadamard composition in the Hardy, Bergman and Gvaradze Banach spaces of functions analytic in the unit circle, we consider a generalization of the K-functional. In solving some extreme problems of the theory of approximation in the complex plane, we obtain certain exact results in the case where the indicated K-functional is used as a characteristic of smoothness.

У банахових просторах Гарді, Бергмана та Гварадзе аналітичних в одиничному крузі функцій розглянуто узагальнення K-функціонала, яке базується на використанні композиції Адамара. При розв'язанні деяких екстремальних задач теорії апроксимації у комплексній площині отримано точні результати, коли зазначений K-функціонал використовується як характеристика гладкості функції.

1. Вступ. В теорії апроксимації функцій дійсної змінної часто використовується ідея заміни довільної функції f достатньо гладкою функцією g. Одна з найбільш ефективних її реалізацій заснована на методі K-функціонала Петре в теорії інтерполяційних просторів [1]. Зазначимо також, що K-функціонали знайшли застосування при розв'язанні низки задач, в тому числі й екстремальних, теорії наближення функцій як дійсної, так і комплексної змінних (див., наприклад, [2 – 14]).

Щодо остаточних результатів, пов'язаних з обчисленням точних значень різних n-поперечників класів аналітичних у колі функцій (див., наприклад, [15 – 31]), слід зазначити, що найбільший, на нашу думку, інтерес мають задачі, пов'язані з дослідженням класів, які визначаються за допомогою різних характеристик гладкості (модулів неперервності, модулів гладкості або їх усереднень) та мажорант (див., наприклад, [16 – 18, 22 – 25, 28 – 31]). Для успішного розв'язання вказаних задач необхідно на класи мажорант накладати певні обмеження та доводити, що такі класи не є порожніми, а це потребує певних зусиль і в переважній більшості випадків удається визначити не більш як одну таку мажоранту (див., наприклад, [17, 18, 29]).

Однак для класів, означених за допомогою K-функціоналів та мажорант, отримання остаточних результатів при розв'язанні екстремальних задач оптимізаційного змісту приводить до найбільш простого обмеження на мажоранти, яке задовольняють відразу кілька множин функцій [7]. У зв'язку з викладеним метою даної статті є поширення результатів роботи [7] на банахові простори Бергмана та Гварадзе, а також на класи аналітичних в одиничному крузі функцій, які визначаються за допомогою композицій (добутків) Адамара.

1.1. Нехай $U = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — одиничний круг і $A(U)$ — клас аналітичних в U функцій. Символом H_q, $1 \le q \le \infty$, позначимо банахів простір Гарді, що складається з функцій $f \in A(U)$, для яких норма є скінченною, тобто

$$\|f\|_q := \|f\|_{H_q} = \lim\{M_q(f;\rho)\colon \rho \to 1-0\} < \infty, \quad 1 \le q < \infty, \tag{1.1}$$

де

$$M_q(f;\rho) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(\rho \exp(i\tau))|^q d\tau \right\}^{1/q}.$$

У випадку $q = \infty$ маємо $\|f\|_\infty := \|f\|_{H_\infty} = \sup\{|f(z)|: z \in U\} < \infty$.

Через H'_q, $1 \le q \le \infty$, позначимо банахів простір Бергмана, який містить функції $f \in A(U)$, що мають скінченну норму

$$\|f\|_{H'_q} := \left\{ \frac{1}{\pi} \iint\limits_U |f(z)|^q dxdy \right\}^{1/q} = \left\{ 2 \int\limits_0^1 \rho M_q^q(f;\rho) d\rho \right\}^{1/q} < \infty, \quad z = x + iy, \tag{1.2}$$

де $1 \le q < \infty$. Якщо $q = \infty$, то $\|f\|_{H'_\infty} = \|f\|_\infty < \infty$.

Ромберг, Дюрен та Шилдс [32] ввели простори $\mathcal{B}_p$, $0 < p < 1$, функцій $f \in A(U)$, для яких

$$\|f\|_{\mathcal{B}_p} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} (1-\rho)^{1/p-2} |f(\rho \exp(i\tau))| d\tau d\rho < \infty,$$

та вивчали основні властивості їхніх елементів.

Природним узагальненням просторів $\mathcal{B}_p$, $0 < p < 1$, стали введені М. І. Гварадзе [33] банахові простори $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$, де $0 < p < q \le \infty$, $1 \le \lambda \le \infty$, $\min(\lambda, q) \ge 1$, для елементів f яких норма визначається формулами

$$\|f\|_{p,q,\lambda} := \|f\|_{\mathfrak{B}_{(p,q,\lambda)}} = \left\{ \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f;\rho) d\rho \right\}^{1/\lambda} < \infty, \quad 1 \le \lambda < \infty, \tag{1.3}$$

$$\|f\|_{p,q,\infty} := \|f\|_{\mathfrak{B}_{(p,q,\infty)}} = \sup\left\{ (1-\rho)^{1/p-1/q} M_q(f;\rho) \colon 0 < \rho < 1 \right\} < \infty, \quad \lambda = \infty.$$

У порівнянні з простором Гарді H_q простори Бергмана H'_q та Гварадзе $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$ дозволяють вивчати аналітичні функції з менш жорсткими обмеженнями на їхню поведінку поблизу межі круга U. Для підтвердження зазначеного скористаємось лемою, отриманою М. І. Гварадзе, сформулювавши її у зручному для нас вигляді.

Лема А (див. [34], гл. 1, § 1, лема 1.3, [10])**.** *Якщо*

$$f_\tau(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} n_k^\tau z^{n_k},$$

де $\tau > 0$, $n_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$, *і*

$$1 < d \le \frac{n_{k+1}}{n_k} < \widetilde{d} < \infty,$$

d *і* $\widetilde{d}$ *— сталі, які не залежать від* k, *то при будь-якому* $1 \le q \le \infty$ *має місце оцінка*

$$c_1(1-\rho)^{-\tau} \le M_q(f_\tau;\rho) \le c_2(1-\rho)^{-\tau}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{1.4}$$

Тут c_1 *і* c_2 *— сталі, що залежать від* τ, d, $\widetilde{d}$ *і не залежать від* ρ.

Формулу (1.4) можна записати у вигляді

$$M_q(f_\tau;\rho) \asymp (1-\rho)^{-\tau}, \tag{1.5}$$

де символом $\asymp$ позначено співвідношення слабкої еквівалентності. Очевидно, що функція f_τ є аналітичною у крузі U.

Нехай $1 \leq q < \infty$ і виконано умови леми А. Тоді, виходячи з формул (1.1) і (1.5), очевидно, що функція f_τ не належить простору Гарді H_q, $1 \leq q \leq \infty$, ні при якому $\tau > 0$.

Використовуючи формули (1.2) і (1.5), при $1 \leq q < \infty$ маємо

$$\|f\|_{H'_q}^q \asymp \int\limits_0^1 \rho(1-\rho)^{-\tau q} d\rho = B(2, 1-\tau q),$$

де

$$B(a;b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \quad a>0, \quad b>0,$$

— інтеграл Ейлера першого роду. При $0 < \tau < 1/q$ інтеграл $B(2,1-\tau q)$ існує, але при $1/q \leq \tau < \infty$ він є розбіжним. Це означає, що функція f_τ належить простору Бергмана лише при $\tau \in (0, 1/q)$ і не належить йому, якщо $\tau \in [1/q, \infty)$.

Вважаючи, що $0 < p < q < \infty$, $q \geq 1$, $1 \leq \lambda < \infty$, з формул (1.3), (1.5) отримуємо для функції f_τ таке співвідношення:

$$\|f_\tau\|_{p,q,\lambda}^\lambda = \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\lambda(1/p-1/q)-1} M_q^\lambda(f_\tau;\rho)d\rho \asymp \int\limits_0^1 (1-\rho)^{\lambda(1/p-1/q-\tau)-1}d\rho. \tag{1.6}$$

Інтеграл у правій частині (1.6) існує, якщо $0 < \tau < 1/p - 1/q$, а це означає, що $f_\tau \in \mathfrak{B}_{(p,q,\lambda)}$. Якщо, зокрема, $p = q/2$, то для τ отримаємо той же інтервал $(0, 1/q)$, що й у випадку простору Бергмана H'_q. При $0 < p < q/2$ зазначений вище інтервал $(0, 1/p - 1/q)$ зміни τ вже містить у собі інтервал $(0, 1/q)$. Якщо ж $1/p - 1/q \leq \tau < \infty$, то у правій частині (1.6) отримаємо розбіжний невласний інтеграл, тобто в цьому випадку функція f_τ не належить простору $\mathfrak{B}_{(p,q,\lambda)}$.

Далі під символом $X(U)$ будемо розуміти будь-який із вказаних вище банахових просторів — Гарді H_q, Бергмана H'_q або Гварадзе $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$. Через $X_\rho := X(U_\rho)$, $0 < \rho \leq 1, U_1 \equiv U$, позначатимемо банахів простір аналітичних у крузі $U_\rho := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < \rho\}$ функцій f, для яких $\|f(z)\|_{X_\rho} := \|f(\rho z)\|_X < \infty$.

1.2. Нехай $m \in \mathbb{Z}_+$ і функція

$$B_m(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+ (j \geq m)} \beta_j z^j, \tag{1.7}$$

де $\beta_j \neq 0$ для всіх $j = m, m+1, \ldots$, є аналітичною в одиничному крузі U і такою, що

$$\lim\{\sqrt[j]{|\beta_j|} : j \to \infty\} = 1. \tag{1.8}$$

Кожній функції

$$f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} c_j(f) z^j, \tag{1.9}$$

яка належить множині $A(U)$, де числа $c_j(f) = f^{(j)}(0)/j!$, $j \in \mathbb{Z}_+$, є її коефіцієнтами Тейлора, поставимо у відповідність функцію

$$D(B_m, f; z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geq m)} \beta_j c_j(f) z^j, \tag{1.10}$$

яку називають *композицією* (*або добутком*) *Адамара* функцій (1.7) і (1.9) (див., наприклад, [35], гл. IV, § 22, пункт 3, [36]). Зазначимо, що композиція Адамара є широким узагальненням поняття інтегродиференціювання. Зокрема, якщо

$$\lim\{\beta_j : j \to \infty\} = \infty, \tag{1.11}$$

то маємо узагальнення операції диференціювання. З огляду на формули (1.8) зазначимо, що радіуси збіжності степеневих рядів (1.9) і (1.10) збігаються.

***Зауваження* 1.** Скрізь далі числова послідовність $\{\beta_j\}_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+\\(j\geq m)}}$ окрім властивостей (1.8) і (1.11) повинна задовольняти таку умову: послідовність $\{1/|\beta_j|\}_{\substack{j\in\mathbb{Z}_+\\(j\geq m)}}$ є монотонно спадною. Тоді з (1.11) випливає, що при $j \to \infty$ нуль є її граничною точкою.

Наведемо кілька прикладів композицій Адамара. Нехай α — додатне не ціле число і $[\alpha]$ — його ціла частина. У формулі (1.7), де $m = [\alpha]$, вважаємо, що

$$\left\{\widehat{\beta}_j = \Gamma(j+1)/\Gamma(j-\alpha+1)\right\}_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geq[\alpha])},$$

де $\Gamma(x)$, $x > 0$, є інтегралом Ейлера другого роду. Тоді композицією Адамара функції

$$\widehat{B}_{[\alpha]}(z) := \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geq[\alpha])} \widehat{\beta}_j z^j \tag{1.12}$$

і функції (1.9), що належить множині $A(U)$, буде дробова похідна в сенсі Рімана – Ліувілля $f^{(\alpha)}(z)$ [19], тобто

$$D(\widehat{B}_{[\alpha]}, f; z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geq[\alpha])} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)}\, c_j(f) z^j = f^{(\alpha)}(z). \tag{1.13}$$

У випадку, коли $\alpha = r$, де $r \in \mathbb{N}$, з (1.13) отримуємо

$$D(\widehat{B}_r, f; z) = \sum_{j\in\mathbb{N}(j\geq r)} \frac{j!}{(j-r)!}\, c_j(f) z^j = z^r f^{(r)}(z). \tag{1.14}$$

Нехай в (1.7) $m = 1$, $\{\widetilde{\beta}_j = (ij)^\alpha\}_{j\in\mathbb{N}}$, де $\alpha > 0$. Тоді композицією Адамара функції

$$\widetilde{B}_1^{\alpha,\arg}(z) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\beta}_j z^j \tag{1.15}$$

і функції (1.9) буде похідна Вейля порядку α від f по аргументу t комплексної змінної $z = \rho\exp(it)$, тобто [35] (гл. IV, § 19, пункт 1)

$$D(\widetilde{B}_1^{\alpha,\arg}, f; z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (ij)^\alpha c_j(f) z^j.$$

Якщо $\alpha = r$, де $r \in \mathbb{N}$, то звідси маємо

$$D(\widetilde{B}_1^{r,\arg}, f; z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (ij)^r c_j(f) z^j = \frac{\partial^r f(\rho \exp(it))}{\partial t^r}. \tag{1.16}$$

1.3. Нехай f — довільний елемент простору Гарді H_q, $1 \le q \le \infty$, і $l \in \mathbb{N}$. Нагадаємо, що функція

$$\omega_l(f,t)_q := \sup\left\{ \left\| \sum_{j=0}^{l} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} f(\exp(i(t+jh))) \right\|_q : 0 \le h \le t \right\} \tag{1.17}$$

є модулем неперервності l-го порядку для $f \in H_q$. При розв'язанні проблеми Гарді – Літтлвуда для аналітичних функцій $f \in H_q$ Е. О. Стороженко ввела спеціальний модуль неперервності l-го порядку

$$\widetilde{\omega}_l(f,t)_q := \sup\Bigg\{ \Bigg\| [\exp(it), \exp(i(t+h)), \ldots, \exp(i(t+lh))]_f \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{l} (\exp(i(t+jh)) - \exp(it)) \Bigg\|_q : 0 \le h \le t \Bigg\}, \tag{1.18}$$

де $[\exp(it), \exp(i(t+h)), \ldots, \exp(i(t+lh))]_f$ — розподілена різниця функції f, яка побудована по точках $\exp(i(t+jh))$, $j = \overline{0,l}$. Зазначимо, що характеристику гладкості (1.18) використовував також Ю. В. Крякін [3] для отримання аналогів теорем Джексона у просторі Гарді H_q.

Нехай функція φ є елементом множини $A(U)$, $l \in \mathbb{N}$ і $\varphi_{\arg}^{(l)}(z) := \dfrac{\partial^l \varphi(\rho \exp(it))}{\partial t^l}$. У просторах Гарді H_q, $1 \le q \le \infty$, окрім модулів неперервності l-го порядку (1.17), (1.18) розглядались і K-функціонали таких видів [3]:

$$K_{l,\arg}(f,t)_q := \inf\left\{ \|f - \varphi\|_q + t\|\varphi_{\arg}^{(l)}\|_q : \varphi_{\arg}^{(l)} \in H_q \right\}, \tag{1.19}$$

$$\widetilde{K}_l(f,t)_q := \inf\left\{ \|f - \varphi\|_q + t\|\varphi^{(l)}\|_q : \varphi^{(l)} \in H_q \right\}, \tag{1.20}$$

де $t \ge 0$. При цьому, як зазначено в [7], для будь-яких значень $l \in \mathbb{N}$ і $0 \le t \le \pi$ у сенсі слабкої еквівалентності мають місце такі співвідношення:

$$K_{l,\arg}(f,t)_q \asymp \omega_l(f,t)_q, \quad \widetilde{K}_l(f,t)_q \asymp \widetilde{\omega}_l(f,t)_q, \tag{1.21}$$

де $f \in H_q$ — довільна функція. Ці співвідношення стали певним підґрунтям для використання K-функціоналів (1.19), (1.20) для визначення нових класів функцій і розв'язання на них низки екстремальних задач теорії апроксимації у комплексній площині [7].

2. Узагальнення K-функціонала в комплексній площині. Перш ніж перейти до узагальнення K-функціоналів (1.19), (1.20), сформулюємо необхідне для подальшого викладу означення та доведемо одне твердження.

Означення (див., наприклад, [19, 20]). *Функція* $B_m(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geq m)} \beta_j z^j$, *де* $m \in \mathbb{Z}_+$, $\beta_j \neq 0$ *для всіх* $j = m, m+1, \ldots$, *називається припустимою у крузі* U_ρ, $0 < \rho \leq 1$, *якщо для будь-яких* $r \in (0, \rho)$, $0 \leq t < 2\pi$, $n > m$, $n \in \mathbb{N}$, *виконується нерівність*

$$\Xi_n(B_m; r, t) := \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\beta_n \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{r^j}{\beta_{n+j}}\, e^{ijt}\right) \geq 0. \tag{2.1}$$

Наприклад, функції (1.12) *і* (1.15) *є припустимими у крузі* U [19].

Твердження 1. *Нехай* $X(U)$ — *один із розглянутих раніше банахових просторів аналітичних у колі* U *функцій, функція* $B_m(z)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, *задовольняє вимоги зауваження* 1 *і є припустимою в* U. *Тоді якщо для довільної функції* $f \in A(U)$ *її композиція Адамара* $D(B_m, f)$ *належить простору* $X(U)$, *то і сама функція* f *є його елементом.*

Доведення. Нехай $f(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} c_j(f) z^j$ — довільна функція з множини $A(U)$. Розглянемо для неї при $n > m$, $n \in \mathbb{N}$, алгебраїчний многочлен

$$V_{\Lambda(B_m),n-1}(f, z) := \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j,n-1}(B_m) c_j(f) z^j, \tag{2.2}$$

де у випадку $m \in \mathbb{N}$ його коефіцієнти

$$\lambda_{j,n-1}(B_m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = 0, \ldots, m-1, \\ 1 - \dfrac{\beta_j \overline{\beta}_n}{\beta_n \overline{\beta}_{2n-j}}, & \text{якщо } j = m, \ldots, n-1, \end{cases}$$

а у випадку $m = 0$

$$\lambda_{j,n-1}(B_0) = 1 - \frac{\beta_j \overline{\beta}_n}{\beta_n \overline{\beta}_{2n-j}}, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Скористаємось співвідношенням, наведеним у роботі [20], яке з урахуванням введених нами позначень набирає вигляду

$$f(rz) = V_{\Lambda(B_m),n-1}(f, rz) + \frac{1}{\pi\beta_n i} \int\limits_{|\xi|=r} D\left(B_m, f; \frac{rz}{\xi}\right) \xi^n \Xi_n(B_m; r, t) \frac{d\xi}{\xi}, \tag{2.3}$$

де $0 < r < 1$, $z \in U$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $n > m$. Зазначимо, що рівність (2.3) перевіряється безпосередньо шляхом почленного інтегрування з використанням формул (1.10), (2.2). Вважаючи в (2.3) $z = Re^{i\theta}$, де $0 < R < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ і $n = m+1$, записуємо

$$f(rRe^{i\theta}) = V_{\Lambda(B_m),m}(f, rRe^{i\theta}) + \frac{r^{m+1}}{\pi\beta_{m+1}} \int\limits_0^{2\pi} D(B_m, f; Re^{i(\theta-t)}) e^{i(m+1)t} \Xi_{m+1}(B_m; r, t) dt. \tag{2.4}$$

Оскільки функція B_m є припустимою, то з (2.4) маємо

$$|f(rRe^{i\theta})| \leq |V_{\Lambda(B_m),m}(f, rRe^{i\theta})| +$$

$$+ \frac{r^{m+1}}{\pi|\beta_{m+1}|} \int\limits_0^{2\pi} |D(B_m, f; Re^{i(\theta-t)})| \Xi_{m+1}(B_m; r, t) dt. \tag{2.5}$$

Над обома частинами співвідношення (2.5) послідовно виконаємо такі операції: піднесемо їх до степеня q, $1 \leq q < \infty$, і в правій частині використаємо нерівність $(a+b)^q \leq 2^{q-1}(a^q+b^q)$, $a, b > 0$; зінтегруємо по змінній θ в межах від 0 до 2π; помножимо на $1/(2\pi)$; піднесемо до степеня $1/q$ і в правій частині використаємо нерівність $(a+b)^{1/q} \leq a^{1/q} + b^{1/q}$, $a, b > 0$. Застосуємо до другого доданка у правій частині одержаної таким чином нерівності узагальнену нерівність Мінковського. В результаті одержимо співвідношення

$$M_q(f; rR) \leq 2^{1-1/q} \left\{ M_q(V_{\Lambda(B_m),m}(f); rR) + \frac{r^{(m+1)}}{|\beta_{m+1}|} M_q(D(B_m, f); R) \right\}.$$

Переходячи в обох частинах цієї нерівності до границі при $r \to 1-0$, одержуємо

$$M_q(f; R) \leq 2^{1-1/q} \left\{ M_q(V_{\Lambda(B_m),m}(f); R) + \frac{1}{|\beta_{m+1}|} M_q(D(B_m, f); R) \right\}.$$

У випадку, коли $q = \infty$, з (2.5) отримуємо

$$M_\infty(f; R) \leq \left\{ M_\infty(V_{\Lambda(B_m),m}(f); R) + \frac{1}{|\beta_{m+1}|} M_\infty(D(B_m, f); R) \right\}.$$

Поєднуючи дві останні нерівності, для будь-якого $1 \leq q \leq \infty$ записуємо

$$M_q(f; R) \leq 2 \left\{ M_q(V_{\Lambda(B_m),m}(f); R) + \frac{1}{|\beta_{m+1}|} M_q(D(B_m, f); R) \right\}. \tag{2.6}$$

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $X(U)$ є банаховим простором Гварадзе $\mathfrak{B}(p, q, \lambda)$. Нехай $1 \leq \lambda < \infty$. Використовуючи означення норми (1.3) у просторі $\mathfrak{B}(p, q, \lambda)$, над обома частинами співвідношення (2.6) послідовно виконаємо такі операції: піднесемо їх до степеня λ, помножимо на величину $(1-R)^{\lambda(1/p-1/q)-1}$, зінтегруємо по змінній R в межах від 0 до 1 і піднесемо до степеня $1/\lambda$. В результаті отримаємо нерівність

$$\|f\|_{p,q,\lambda} \leq 2^{2-1/\lambda} \left\{ \|V_{\Lambda(B_m),m}(f)\|_{p,q,\lambda} + \frac{1}{|\beta_{m+1}|} \|D(B_m, f)\|_{p,q,\lambda} \right\}. \tag{2.7}$$

Враховуючи, що норма полінома (2.2) у просторі Гварадзе є скінченним числом і функція $D(B_m, f)$ належить $\mathfrak{B}(p, q, \lambda)$, з (2.7) маємо $\|f\|_{p,q,\lambda} < \infty$, тобто $f \in \mathfrak{B}(p, q, \lambda)$.

Нехай $\lambda = \infty$. Помноживши обидві частини (2.6) на величину $(1-R)^{1/p-1/q}$, обчисливши точну верхню межу по $0 < R < 1$ та використавши означення норми у просторі $\mathfrak{B}(p, q, \infty)$, одержимо нерівність (2.7), де $\lambda = \infty$. З цього випливає, що $f \in \mathfrak{B}(p, q, \infty)$.

Твердження 1 доведено.

Спираючись на інформацію, викладену у пунктах 1.1 і 1.2, розглянемо певне узагальнення K-функціонала. Вважаючи, що $X(U)$ є одним із розглянутих вище банахових просторів аналітичних у крузі U функцій, покладаємо $X(U, D(B_m)) := \{g \in A(U) : D(B_m, g) \in X(U)\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тоді для $f \in X(U)$ величину

$$\mathcal{K}_{B_m}(f,t)_X := \inf\{\|f-g\|_X + t\|D(B_m,g)\|_X : g \in X(U, D(B_m))\}, \quad t \geq 0, \tag{2.8}$$

будемо називати узагальненим K-функціоналом.

Нехай $X(U) \equiv H_q,\ 1 \leq q \leq \infty$. Виходячи з формули (1.15), де $\alpha = l,\ l \in \mathbb{N}$, і вважаючи, що $m = 1$ і $B_1(z) \equiv \widetilde{B}_1^{l,\arg}(z)$, з (2.8) отримуємо K-функціонал (1.19). Якщо ж використаємо формулу (1.14), де $r = l,\ l \in \mathbb{N}$, і вважатимемо, що $m = l$ і $B_l(z) \equiv \widehat{B}_l(z)$, то з (2.8) одержимо K-функціонал (1.20).

3. Деякі допоміжні твердження. Наведемо кілька означень та фактів, необхідних для доведення наступних тверджень.

Теорема A (див. [37], гл. V, пункт 1). *Якщо $\alpha_j \to 0$ при $j \to \infty$ і послідовність $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_j, \ldots$ опукла, то ряд $\alpha_0/2 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \cos jt$ є збіжним скрізь, за винятком, можливо, точки $t = 0$, до деякої невід'ємної інтегровної функції $\varphi(t)$ і є її рядом Фур'є.*

Нагадаємо, що послідовність $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ є опуклою, якщо $\Delta^2\alpha_j \geq 0$ для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$, де $\Delta\alpha_j := \alpha_j - \alpha_{j+1},\ \Delta^2\alpha_j := \Delta\alpha_j - \Delta\alpha_{j+1}$. З геометричної точки зору це рівносильно тому, що ламана з вершинами в точках $(j, \alpha_j),\ j \in \mathbb{Z}_+$, є опуклою.

Зазначимо [37] (гл. III, пункт 4), що коли функція $\alpha(t),\ 0 \leq t < \infty$, є опуклою, то числова послідовність $\{\alpha_j = \alpha(j)\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ також буде опуклою.

Позначимо символом $\mathcal{P}_n,\ n \in \mathbb{Z}_+$, підпростір алгебраїчних поліномів степеня n, тобто $\mathcal{P}_n := \left\{p_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j : a_j \in \mathbb{C}, j = \overline{0,n}\right\}$.

3.1. **Твердження 2.** *Нехай $X(U)$ — будь-який банахів простір аналітичних у крузі U функцій: Гарді, Бергмана або Гварадзе і $0 < \rho \leq 1$. Тоді для довільного полінома $p_n \in \mathcal{P}_n$ виконується нерівність*

$$\|p_n\|_X \leq \frac{1}{\rho^n}\|p_n\|_{X_\rho}. \tag{3.1}$$

Доведення. У випадку $\rho = 1$ співвідношення (3.1) є очевидним. Тому нехай $0 < \rho < 1$. Для довільного полінома $p_n \in \mathcal{P}_n$ запишемо рівність, яка перевіряється безпосередньо:

$$p_n(z) = \frac{1}{\pi\rho^n}\int\limits_0^{2\pi} p_n(ze^{-it}\rho)e^{int}\eta_\rho(t)dt, \tag{3.2}$$

де $z = Re^{i\theta},\ 0 \leq R \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ \eta_\rho(t) := 1/2 + \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho^j \cos jt$. Оскільки функція ρ^t, де $\rho = \mathrm{const},\ 0 < \rho < 1,\ 0 \leq t < \infty$, є опуклою, то числова послідовність $\{\rho^j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ також буде опуклою. Тоді, згідно з теоремою **A**, функція $\eta_\rho(t)$ буде невід'ємною й інтегровною на відрізку $[0, 2\pi]$.

Нехай $1 \leq q < \infty$. Вважаючи $z = Re^{i\theta}$, де $0 \leq R \leq 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi$, і використовуючи (3.2) та узагальнену нерівність Мінковського, записуємо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |p_n(Re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{1/q} \leq \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi\rho^n}\int\limits_0^{2\pi}|p_n(R\rho e^{i(\theta-t)})|\eta_\rho(t)dt\right)^q d\theta\right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi\rho^n}\int\limits_0^{2\pi}\eta_\rho(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|p_n(R\rho e^{i(\theta-t)})|^q d\theta\right)^{1/q} dt = \frac{1}{\rho^n}M_q(p_n; R\rho),$$

тобто

$$M_q(p_n; R) \le \frac{1}{\rho^n} M_q(p_n; R\rho). \tag{3.3}$$

Якщо $q = \infty$, то нерівність (3.3) отримаємо, використавши формули (3.2) і

$$M_\infty(p_n; R) = \max\{|p_n(Re^{i\theta})| : 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Не зменшуючи загальності, розглянемо випадок, коли $X(U) = H'_q$, $1 \le q \le \infty$. При $q = \infty$ нерівність (3.1) випливає з (3.3) при $R \to 1 - 0$, оскільки $H'_\infty = H_\infty$. Якщо $1 \le q < \infty$, то послідовно виконуємо над обома частинами співвідношення (3.3) такі операції: підносимо їх до степеня q, множимо на $2R$, інтегруємо по змінній R в межах від 0 до 1 і підносимо до степеня $1/q$. Після виконання зазначених дій одержимо нерівність

$$\|p_n\|_{H'_q} \le \frac{1}{\rho^n} \|p_n\|_{H'_{q,\rho}}.$$

Твердження 2 доведено.

3.2. Наступний результат можна розглядати як певне узагальнення нерівності С. М. Нікольського для алгебраїчних поліномів у комплексній площині.

Твердження 3. *Нехай $X(U)$ — будь-який банахів простір, зазначений у попередньому твердженні; $p_n \in \mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — довільний поліном; коефіцієнти Тейлора припустимої функції $B_m(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\ge m)} \beta_j z^j$, $m \in \mathbb{Z}_+$, для будь-яких натуральних чисел $n > m$ і значень $0 \le t < 2\pi$ задовольняють умову*

$$\frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\beta_n}\sum_{j=m}^{n-1} \beta_j e^{i(n-j)t}\right) \ge 0. \tag{3.4}$$

Тоді

$$\|D(B_m, p_n)\|_X \le |\beta_n|\ \|p_n\|_X. \tag{3.5}$$

Доведення. Нехай $p_n = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ — довільним поліном із підпростору $\mathcal{P}_n$ і $n > m$. Тоді його композицією Адамара є функція $D(B_m, p_n; z) = \sum_{j=m}^{n} \beta_j a_j z^j$. Нехай $z = Re^{i\theta}$, де $0 \le R \le 1$, $0 \le \theta < 2\pi$. Шляхом безпосередньої перевірки можна переконатись у правильності рівності

$$D(B_m, p_n; Re^{i\theta}) = \frac{\beta_n}{\pi}\int_0^{2\pi} p_n(Re^{i(\theta-t)}) e^{-int}\left[\frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\beta_n}\sum_{j=m}^{n-1}\beta_j e^{i(n-j)t}\right)\right] dt,$$

з якої маємо

$$|D(B_m, p_n; Re^{i\theta})| \le \frac{|\beta_n|}{\pi}\int_0^{2\pi} |p_n(Re^{i(\theta-t)})| \left[\frac{1}{2} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\beta_n}\sum_{j=m}^{n-1}\beta_j e^{i(n-j)t}\right)\right] dt. \tag{3.6}$$

Як і в попередніх твердженнях, над обома частинами співвідношення (3.6) послідовно виконаємо такі дії: піднесемо до степеня q, $1 \le q < \infty$; зінтегруємо по змінній θ в межах від 0 до 2π; помножимо на $1/(2\pi)$; піднесемо до степеня $1/q$; застосуємо, з урахуванням (3.4), до інтеграла у правій частині одержаної таким чином нерівності узагальнену нерівність Мінковського. В результаті отримаємо співвідношення

$$M_q(D(B_m, p_n); R) \le |\beta_n| M_q(p_n; R). \tag{3.7}$$

У випадку $q = \infty$ співвідношення (3.7) одержуємо завдяки формулам (3.4) і (3.6), спрямовуючи R до 1 зліва.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $X(U) = H_q$, $1 \le q \le \infty$. Використовуючи нерівність (3.7) і означення норми у просторі Гарді, отримуємо нерівність (3.5) у вигляді

$$\|D(B_m, p_n)\|_q \le |\beta_n| \, \|p_n\|_q,$$

що і завершує доведення твердження 3.

3.3. Наведемо кілька прикладів конкретизації останнього твердження.

3.3.1. Нехай маємо функцію вигляду (1.12), де $\alpha = r$, $r \in \mathbb{N}$, тобто

$$\widehat{B}_r(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}(j \ge r)} \frac{j! z^j}{(j-r)!}.$$

У даному випадку коефіцієнти Тейлора функції $\widehat{B}_r$ мають вигляд $\widehat{\beta}_j = \prod_{\nu=0}^{r-1}(j-\nu)$, де $j \in \mathbb{N}$, $j \ge r$. Неважко переконатися в тому, що функція $\widehat{f}_{r-1}(t) := \Big\{ \prod_{\nu=0}^{r-1}(t-\nu)$, якщо $t \ge r-1$; 0, якщо $t < r-1 \Big\}$ буде опуклою. Звідси випливає, що числова послідовність $\{\widehat{\beta}_j = \widehat{f}_{r-1}(j)\}_{j \in \mathbb{N}(j \ge r)}$ теж буде опуклою, причому $\widehat{\beta}_j \to \infty$ при $j \to \infty$.

Розглянемо, виходячи з (3.4), при $n > r$, $n \in \mathbb{N}$, функцію

$$\widehat{\xi}_n(t) := \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\widehat{\beta}_n} \sum_{j=r}^{n-1} \widehat{\beta}_j e^{i(n-j)t} \right) = \frac{1}{\widehat{\beta}_n} \left(\frac{\widehat{\beta}_n}{2} + \sum_{j=1}^{n-r} \widehat{\beta}_{n-j} \cos jt \right). \tag{3.8}$$

Вираз у дужках у правій частині формули (3.8) запишемо у вигляді

$$\frac{\widehat{b}_0}{2} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \widehat{b}_j \cos jt,$$

де $\widehat{b}_j := \{\widehat{\beta}_{n-j}$, якщо $j = \overline{0, n-r}$; 0, якщо $j = n-r+1,\ n-r+2, \ldots\}$. З вищенаведеного випливає, що числова послідовність $\{\widehat{b}_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ є опуклою. Оскільки вона є незростаючою і такою, що $\lim\{\widehat{b}_j : j \to \infty\} = 0$, то, згідно з теоремою A, функція $\widehat{\xi}_n(t)$ буде невід'ємною на відрізку $[0, 2\pi]$ для будь-якого натурального числа $n > r$. Тоді з формул (1.14), (3.5) одержуємо [38]

$$\|z^r p_n^{(r)}(z)\|_X \le \alpha_{n,r} \|p_n\|_X,$$

де

$$\alpha_{j,r} := \prod_{\nu=0}^{r-1}(j-\nu), \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \geq r. \tag{3.9}$$

Якщо, зокрема, $X(U) = H_q$, $1 \leq q \leq \infty$, то звідси отримуємо

$$\|p_n^{(r)}\|_q \leq \alpha_{n,r}\|p_n\|_q.$$

3.3.2. Розглянемо далі, виходячи з (1.15), функцію $\widetilde{B}_1^{r,\arg}(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{\beta}_j z^j$, для якої $\{\widetilde{\beta}_j = (ij)^r\}_{j\in\mathbb{N}}$, $r \in \mathbb{N}$. Оскільки функція $\widetilde{f}_0(t) := \{t^r$, якщо $t \geq 0$; 0, якщо $t < 0\}$ є опуклою, то це означає, що числова послідовність $\{|\widetilde{\beta}_j| = \widetilde{f}_0(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ теж буде опуклою і такою, що $\lim\{|\widetilde{\beta}_j| : j \to \infty\} = \infty$. Розглянемо у відповідності з (3.4) функцію

$$\widetilde{\xi}_n(t) := \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\widetilde{\beta}_n}\sum_{j=1}^{n-1}\widetilde{\beta}_j e^{i(n-j)t}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\cos jt\right), \tag{3.10}$$

де $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Вираз у дужках у правій частині (3.10) запишемо у вигляді

$$\frac{\widetilde{b}_0}{2} + \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{b}_j \cos jt,$$

де $\widetilde{b}_j := \{n - j$, якщо $j = \overline{0, n-1}$; 0, якщо $j = n, n+1, \ldots\}$. З наведеного раніше випливає, що числова послідовність $\{\widetilde{b}_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ є опуклою і такою, що $\lim\{\widetilde{b}_j : j \to \infty\} = 0$. Тоді, згідно з теоремою А, функція $\widetilde{\xi}_n(t) \geq 0$ на відрізку $0 \leq t \leq 2\pi$ для довільного натурального числа $n > 1$. Використовуючи твердження 3 і співвідношення (1.16), записуємо [38]

$$\|(p_n)_{\arg}^{(r)}\|_X \leq n^r \ \|p_n\|_X,$$

де

$$(p_n(z))_{\arg}^{(r)} := \frac{\partial^r p_n(\rho\exp(it))}{\partial t^r}.$$

4. Найкращі поліноміальні наближення аналітичних функцій у банахових просторах $X(U_\rho)$, $0 < \rho \leq 1$.

4.1. Нехай $X(U)$ — один із розглянутих раніше банахових просторів, а L_n — підпростір вимірності n, $n \in \mathbb{N}$, який належить $X(U)$. Через $E(f, L_n, X)$ позначимо найкраще наближення функції $f \in X(U)$ елементами підпростору L_n у метриці простору $X(U)$, тобто

$$E(f, L_n, X) := \inf\{\|f - g\|_X : g \in L_n\}. \tag{4.1}$$

Нагадаємо, зокрема, що функціонал (4.1) є однорідним, тобто

$$E(\lambda f, L_n, X) = |\lambda| E(f, L_n, X), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Відомо [2] (гл. 6, § 1, твердження 1.1), що K-функціонал є, зокрема, неперервною зростаючою напівадитивною функцією. Перш ніж використовувати його в якості оцінки зверху величини найкращого поліноміального наближення (4.1), потрібно переконатись у тому, що при t, яке прямує до нуля справа, узагальнений K-функціонал (2.8) буде мати своєю граничною точкою нуль. Наприклад, у випадку $X(U) = H_q,\ 1 \leq q \leq \infty$, для конкретних K-функціоналів (1.19), (1.20), які є частковими випадками узагальненого K-функціонала (2.8), це випливає зі співвідношень (1.21).

Нехай у (2.8) функція $B_m(z),\ m \in \mathbb{Z}_+$, задовольняє вимоги зауваження 1 і умови твердження 3. Покладемо $\mathcal{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_{n-1}$. Оскільки довільний поліном $p \in \mathcal{P}$ є елементом множини $X(U, D(B_m))$, то для $f \in X(U)$ з (2.8) маємо

$$\mathcal{K}_{B_m}(f,t)_X \leq \inf\{\|f-p\|_X + t\|D(B_m,p)\|_X : p \in \mathcal{P}\}.$$

У випадку розгляду в банаховому просторі $X(U)$ модуля неперервності вигляду

$$\omega(f,t)_X := \sup\{\|f(\xi z_1) - f(\xi z_2)\|_X : |z_1 - z_2| \leq t,\ z_1, z_2 \in U\}$$

в роботі [20] було отримано нерівність

$$E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X) \leq \frac{e}{e-1}\, \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_X.$$

Використовуючи твердження 3, для узагальненого K-функціонала записуємо

$$\mathcal{K}_{B_m}(f,t)_X \leq \inf\{\|f-p\|_X + t|\beta|\|p\|_X : p \in \mathcal{P}\}.$$

Оскільки будь-який скінченновимірний підпростір лінійного нормованого простору є множиною існування елемента найкращого наближення $p_{n-1}(f)$ для $f \in X(U)$ [39] (гл. 1, § 1.3), маємо

$$E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X) = \|f - p_{n-1}(f)\|_X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне мале число. Для нього знайдеться таке натуральне число $n_0 = n_0(\varepsilon),\ n_0 > m$, для якого

$$\|f - p_{n_0-1}(f)\|_X \leq \frac{e}{e-1}\, \omega\left(f, \frac{1}{n_0}\right)_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді для всіх значень $0 < t < \delta$, де $\delta := \varepsilon/(2|\beta_{n_0-1}|\|p_{n_0-1}(f)\|)$, одержуємо

$$\mathcal{K}_{B_m}(f,t)_X \leq \|f - p_{n_0-1}(f)\|_X + t\, |\beta_{n_0-1}|\ \|p_{n_0-1}(f)\|_X < \varepsilon,$$

а це означає, що

$$\lim\{\mathcal{K}_{B_m}(f,t)_X : t \to 0+\} = 0.$$

Таким чином, узагальнений K-функціонал (2.8) подібно до модуля неперервності може використовуватись як певна характеристика функції при оцінюванні зверху величини її найкращого поліноміального наближення (4.1). Зазначимо, що в певному сенсі аналогічний випадок розглянуто і в роботі Г. В. Радзієвського [5].

4.2. **Теорема 1.** *Нехай $s, m \in \mathbb{Z}_+$ і задано функції*

$$B_s^*(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geq s)} \beta_j^* z^j, \quad \beta_j^* \neq 0 \quad \forall\, j \geq s,$$

і

$$B_m(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+(j\geq m)} \beta_j z^j; \quad \beta_j \neq 0 \quad \forall\, j \geq m,$$

які задовольняють сформульовані у зауваженні 1 *вимоги, є припустимими у колі* U_ρ, $0 < < \rho \leq 1$, *а* $B_m(z)$ *задовольняє умови твердження* 3. *Тоді для довільного натурального числа* $n > \max(s, m)$ *має місце рівність*

$$\sup\left\{\frac{|\beta_n^*| E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho)}{\rho^n \mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, f); 1/|\beta_n|)} : f \in X(U, D(B_s^*))\right\} = 1. \tag{4.3}$$

Доведення. Із твердження 1 випливає, що функція $f \in X(U, D(B_s^*))$ належить банаховому простору $X(U)$, а отже і простору $X(U_\rho)$, а узагальнений K-функціонал композиції Адамара $D(B_s^*, f)$ згідно з (2.8) має вигляд

$$\mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, f); t)_X = \inf\{\|D(B_s^*, f) - g\|_X +$$
$$+ t\|D(B_m, g)\|_X : g \in X(U, D(B_m))\}, \quad t \geq 0. \tag{4.4}$$

Із твердження 1 також випливає належність функції g до простору $X(U)$.

Нам знадобляться такі результати, які випливають з роботи [20] і будуть сформульовані з використанням уведених нами позначень:

для довільних $n > s$, $n \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+$, $f \in X(U, D(B_s^*))$ *виконується нерівність*

$$E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho) \leq \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|} E(D(B_s^*, f), \mathcal{P}_{n-1}, X); \tag{4.5}$$

для довільної функції $g \in X(U, D(B_m))$ *при* $n > m$, $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}_+$, *виконується нерівність*

$$\|g - V_{\Lambda(B_m), n-1}(g)\|_X \leq \frac{1}{|\beta_n|} \|D(B_m, g)\|_X, \tag{4.6}$$

де алгебраїчний поліном $V_{\Lambda(B_m), n-1}(g)$ *визначається формулою* (2.2).

Використовуючи формулу (4.1), записуємо

$$E(D(B_s^*, f), \mathcal{P}_{n-1}, X) \leq \|D(B_s^*, f) - V_{\Lambda(B_m), n-1}(g)\|_X \leq$$
$$\leq \|D(B_s^*, f) - g\|_X + \|g - V_{\Lambda(B_m), n-1}(g)\|_X. \tag{4.7}$$

Якщо натуральне число n є більшим, ніж $\max(s, m)$, то з (4.5) – (4.7) отримуємо

$$E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho) \leq \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|}\left\{\|D(B_s^*, f) - g\|_X + \frac{1}{|\beta_n|}\|D(B_m, g)\|_X\right\}. \tag{4.8}$$

Оскільки ліва частина нерівності (4.8) не залежить від функції g, то, обчислюючи точну нижню межу по $g \in X(U, D(B_m))$ від її правої частини і використовуючи формули (4.4), маємо

$$E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho) \leq \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|}\, \mathcal{K}\left(D(B_s^*, f); \frac{1}{|\beta_n|}\right)_X$$

або

$$\sup\left\{\frac{|\beta_n^*| E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho)}{\rho^n \mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, f), 1/|\beta_n|)_X} : f \in X(U, D(B_s^*))\right\} \leq 1. \tag{4.9}$$

Отримаємо оцінку знизу екстремальної характеристики, розташованої в лівій частині нерівності (4.9). Для цього розглянемо функцію $\mu(z) := z^n/\beta_n^*$. Оскільки її композиція Адамара $D(B_s^*, \mu; z) = z^n$, то $D(B_m, D(B_s^*, \mu); z) = \beta_n z^n$, тобто $D(B_s^*, \mu)$ належить множині $X(U, D(B_m))$.

Одержимо оцінку зверху узагальненого K-функціонала

$$\mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, \mu); t)_X =$$
$$= \inf\{\|D(B_s^*, \mu) - g\|_X + t\|D(B_m, g)\|_X : g \in X(U, D(B_m))\}, \quad t \geq 0, \tag{4.10}$$

вважаючи у (4.10) спочатку $g \equiv 0$, а потім $g \equiv D(B_s^*, \mu)$:

$$\mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, \mu); t)_X \leq \min\{\|D(B_s^*, \mu)\|_X, t\|D(B_m, D(B_s^*, \mu))\|_X\} =$$
$$= \|z^n\|_X \min\{1, t|\beta_n|\} \leq \|z^n\|_X. \tag{4.11}$$

Спираючись на теорему Хана – Банаха та критерій елемента найкращого наближення в комплексному сепарабельному банаховому просторі, встановлений В. М. Нікольським [40], у роботі [20] було показано, що коли $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k$ — невід'ємні цілі числа, для яких $n_j \neq n_s$ при $j \neq s,\ j, s = \overline{0, k}$, то

$$\inf\left\{\left\|z^{n_0} - \sum_{j=1}^{k} c_j z^{n_j}\right\|_{X_\rho} : c_j \in \mathbb{C},\ j = \overline{1, k}\right\} = \|z^{n_0}\|_{X_\rho}, \quad 0 < \rho \leq 1.$$

Використовуючи дане співвідношення і (4.1), (4.2), записуємо

$$E(\mu, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho) = \frac{1}{|\beta_n^*|} E(z^n, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho) = \frac{1}{|\beta_n^*|}\|z^n\|_{X_\rho} = \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|}\|z^n\|_X. \tag{4.12}$$

За допомогою формул (4.11), (4.12) отримуємо таку оцінку знизу:

$$\sup\left\{\frac{|\beta_n^*| E(f, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho)}{\rho^n \mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, f); 1/|\beta_n|)_X} : f \in X(U, D(B_s^*))\right\} \geq$$

$$\geq \frac{|\beta_n^*| E(\mu, \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho)}{\rho^n \mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, \mu), 1/|\beta_n|)_X} \geq 1. \tag{4.13}$$

Рівність (4.3) одержуємо зі співвідношень (4.9), (4.13).

Теорему 1 доведено.

Не зменшуючи загальності, наведемо конкретизацію теореми 1 для простору Гарді H_q, $1 \leq q \leq \infty$. Використавши твердження 1, введемо у розгляд такі класи функцій:

$$H_q^l := \{f \in A(U) : f^{(l)} \in H_q\} \text{ та } H_q^{l,\arg} := \{f \in A(U) : f_{\arg}^{(l)} \in H_q\}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Тоді згідно з (1.19), (1.20), (2.8) і (1.15), (1.12), де $\alpha = l$, для $f \in H_q$ маємо

$$K_{l,\arg}(f, t)_q = \mathcal{K}_{\widetilde{B}_1^{l,\arg}}(f, t)_q, \quad \widetilde{K}_l(f, t)_q = \mathcal{K}_{\widehat{B}_l}(f, t)_q, \quad t \geq 0.$$

Тут $\mathcal{K}_{B_m}(f, t)_q := \mathcal{K}_{B_m}(f, t)_{H_q}$.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $r, l \in \mathbb{N}$, $0 < \rho \le 1$, $1 \le q \le \infty$. *Якщо*

$$B_1^*(z) = \widetilde{B}_1^{r,\arg}(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (ij)^r z^j \quad i \quad B_1(z) = \widetilde{B}_1^{l,\arg}(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (ij)^l z^j,$$

то для будь-якого натурального числа $n > 1$ *має місце рівність*

$$\sup\left\{\frac{n^r E(f, \mathcal{P}_{n-1}, H_{q,\rho})}{\rho^n K_{l,\arg}\big(f_{\arg}^{(r)}, n^{-l}\big)_q} : f \in H_q^{r,\arg}\right\} = 1.$$

Якщо

$$B_1^*(z) = \widetilde{B}_1^{r,\arg}(z) \quad i \quad B_l(z) = \widehat{B}_l(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}(j\ge l)} \alpha_{j,l} z^j,$$

де числа $\alpha_{j,l}$ *визначаються формулою* (3.9), *то для довільного натурального числа* $n > l$ *виконується рівність*

$$\sup\left\{\frac{n^r E(f, \mathcal{P}_{n-1}, H_{q,\rho})}{\rho^n \widetilde{K}_l(f_{\arg}^{(r)}, 1/\alpha_{n,l})_q} : f \in H_q^{r,\arg}\right\} = 1.$$

Нехай

$$B_r^*(z) = \widehat{B}_r(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}(j\ge r)} \alpha_{j,r} z^j \quad i \quad B_1(z) = \widetilde{B}_1^{l,\arg}(z).$$

Тоді для довільного натурального числа $n > r$ *маємо*

$$\sup\left\{\frac{\alpha_{n,r} E(f, \mathcal{P}_{n-1}, H_{q,\rho})}{\rho^n K_{l,\arg}(f^{(r)}, n^{-l})_q} : f \in H_q^r\right\} = 1.$$

Якщо

$$B_r^*(z) = \widehat{B}_r(z) \quad i \quad B_l(z) = \widehat{B}_l(z),$$

то для будь-якого натурального числа $n > \max(r, l)$ *виконується рівність*

$$\sup\left\{\frac{\alpha_{n,r} E(f, \mathcal{P}_{n-1}, H_{q,\rho})}{\rho^n \widetilde{K}_l(f^{(r)}, 1/\alpha_{n,l})_q} : f \in H_q^r\right\} = 1.$$

Література

1. И. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства*, Мир, Москва (1980).
2. R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Springer-Verlag, New York (1993).
3. Ю. В. Крякин, *Приближение функций на единичной окружности в пространствах L_p и H_p*, Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Одесса (1985).
4. P. Oswald, *On some approximation properties of real Hardy space* $(0 < p \le 1)$, J. Approx. Theory, **40**, № 1, 45 – 65 (1984).
5. G. V. Radzievskii, *On the best approximations and rate of convergence of decompositions in the root vectors of an operator*, Ukr. Math. J., **49**, № 6, 844 – 864 (1997).
6. S. B. Vakarchuk, *K-functionals and exact values of n-widths of some classes in L_2*, Math. Notes, **66**, № 4, 404 – 408 (1999).
7. С. Б. Вакарчук, *О точных значениях n-поперечников функциональных классов в банаховых пространствах H_p*, Доп. НАН України, № 9, 7 – 10 (2000).

8. S. B. Vakarchuk, *K-functionals and exact values of n-widths of certain classes in the spaces $C(2\pi)$ and $L_1(2\pi)$*, Math. Notes, **71**, № 4, 477 – 485 (2002).
9. S. B. Vakarchuk, *K-functionals and n-widths of classes of periodic functions of two variables*, East J. Approx., **8**, № 2, 161 – 182 (2002).
10. S. B. Vakarchuk, A. V. Shvachko, *On the best approximation in the mean by algebraic polynomials with weight and the exact values of widths for the classes of functions*, Ukr. Math. J., **65**, № 12, 1774 – 1792 (2014).
11. S. B. Vakarchuk, *Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev – Hermite weight and widths of function classes*, Math. Notes, **95**, № 5, 599 – 614 (2014).
12. S. B. Vakarchuk, *Meansquare approximation of function classes, given on the all real axis R by the entere functions of exponential type*, Intern. J. Adv. Res. Math., **6**, 1 – 12 (2016).
13. М. Саидусайнов, *K-функционалы и точные значения n-поперечников в пространстве Бергмана*, Урал. мат. журн., **3**, № 2, 74 – 81 (2017).
14. M. Sh. Shabozov, O. A. Dzhurakhonov, *Upper bounds for approximation of some classes of bivariate functions by triangular Fourier – Hermite sums in the space $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$*, Anal. Math., **45**, № 4, 823 – 840 (2019).
15. В. М. Тихомиров, *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений*, Успехи мат. наук, **15**, № 3, 81 – 120 (1960).
16. Л. В. Тайков, *О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций*, Мат. заметки, **1**, № 2, 155 – 162 (1967).
17. Л. В. Тайков, *Поперечники некоторых классов аналитических функций*, Мат. заметки, **22**, № 2, 285 – 295 (1977).
18. Н. Айнуллоев, Л. В. Тайков, *Наилучшее приближение в смысле Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций*, Мат. заметки, **40**, № 3, 341 – 351 (1986).
19. М. З. Двейрин, *Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге*, Теория приближения функций, Тр. Междунар. конф. по теории приближений, Наука, Москва (1977), с. 129 – 132.
20. М. З. Двейрин, И. В. Чебаненко, *О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций*, Теория отображений и приближение функций, Сб. научн. тр. Ин-та прикл. математики и механики АН УССР, Наук. думка, Киев (1983), с. 62 – 73.
21. Ю. А. Фарков, *Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре $\mathbb{C}^n$*, Успехи мат. наук, **45**, № 5, 197 – 198 (1990).
22. S. B. Vakarchuk, *On the best linear approximation methods and the widths of certain classes of analytic functions*, Math. Notes, **65**, № 2, 153 – 158 (1999).
23. S. B. Vakarchuk, *Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods*, Math. Notes, **72**, № 5, 615 – 619 (2003).
24. S. B. Vakarchuk, *On some extremal problems of approximation theory in the complex plane*, Ukr. Math. J., **56**, № 9, 1371 – 1390 (2004).
25. S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, *Best linear approximation methods for functions of Taikov classes in the Hardy spaces $H_{q,\rho}, q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$*, Math. Notes, **85**, № 3, 322 – 327 (2009).
26. V. V. Savchuk, *Best linear methods for the approximation of functions of the Bergman class by algebraic polynomials*, Ukr. Math. J., **58**, № 12, 1904 – 1915 (2006).
27. V. V. Savchuk, *Best linear methods of approximation and optimal orthonormal systems of the Hardy space*, Ukr. Math. J., **60**, № 5, 730 – 743 (2008).
28. S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, *The widths of classes of analytic functions in a disc*, Sb. Math., **201**, № 8, 1091 – 1110 (2010).
29. М. Ш. Шабозов, Ш. А. Холмамадова, *О поперечниках некоторых классов аналитических в круге функций*, Изв. Тул. гос. ун-та. Естествен. науки, № 3, 48 – 59 (2012).
30. M. Sh. Shabozov, G. A.Yusupov, *Best approximation methods and widths for some classes of functions in $H_{q,\rho}$*, $1 \leq q < \infty,\ 0 < \rho \leq 1$, Sib. Math. J., **57**, № 2, 369 – 376 (2016).
31. S. B. Vakarchuk, *Estimates of the values of n-widths of classes of analytic functions in the weight spaces $H_{2,\gamma}(D)$*, Math. Notes, **108**, № 6, 775 – 790 (2020).
32. P. L. Duren, B. W. Romberg, F. L. Shields, *Linear functionals in H_p spaces with* $0 < p < 1$, J. reine und angew. Math., **238**, 4 – 60 (1969).
33. М. И. Гварадзе, *Об одном классе пространств аналитических функций*, Мат. заметки, **21**, № 2, 141 – 150 (1977).

34. М. И. Гварадзе, *Об одном классе пространств аналитических функций*, Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Тбилиси (1975).
35. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
36. J. T. Scheik, *Polynomial approximation of functions analytic in a disk*, Proc. Amer. Math. Soc., **17**, № 6, 1238 – 1243 (1966).
37. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, Москва (1965).
38. S. B. Vakarchuk, *Diameters of certain classes of functions analytic in the unit disc. I*, Ukr. Math. J., **42**, № 7, 769 – 778 (1990).
39. Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, Москва (1976).
40. В. Н. Никольский, *Распространение теоремы А. Н. Колмогорова на банаховы пространства функций*, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, Москва (1961), с. 335 – 337.

Одержано 03.11.21