DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7103

УДК 517.5

Г. А. Дзюбенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНА ОЦІНКА КОПОЗИТИВНОГО НАБЛИЖЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

Under the condition that a function f, which is continuous on $[-1,1]$, changes its sign at s points y_i, $-1 < y_s < y_{s-1} < \ldots < y_1 < 1$, then for each $n \in \mathbb{N}$ greater than some constant N depending only on $\min_{i=0,\ldots,s}\{y_i - y_{i+1}\}$, $y_{s+1} := -1$, $y_0 := 1$, we construct an algebraic polynomial P_n of degree $\le n$ such that P_n has the same sign as f on $[-1,1]$, in particular, $P_n(y_i) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, and

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(s)\,\omega_2(f, \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1,1],$$

where $c(s)$ is a constant depending only on s, and $\omega_2(f,\cdot)$ is the second order modulus of smoothness of f. Note that in this estimate, which is interpolatory at ± 1 and established by DeVore for the unconstrained approximation, it is not possible, even for the unconstrained approximation, to replace ω_2 with ω_k, $k > 2$.

Якщо неперервна на $[-1,1]$ функція f змінює свій знак у s точках y_i: $-1 < y_s < y_{s-1} < \ldots < y_1 < 1$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$, що більше за деяку сталу N, яка залежить тільки від $\min_{i=0,\ldots,s}\{y_i - y_{i+1}\}$, $y_{s+1} := -1$, $y_0 := 1$, знайдено алгебраїчний поліном P_n степеня $\le n$ такий, що P_n має на $[-1,1]$ той самий знак, що і f, зокрема $P_n(y_i) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, і

$$|f(x) - P_n(x)| \le c(s)\,\omega_2(f, \sqrt{1-x^2}/n), \quad x \in [-1,1],$$

де $c(s)$ — стала, яка залежить тільки від s, і $\omega_2(f,\cdot)$ — модуль гладкості 2-го порядку функції f. Зауважимо, що в цій інтерполяційній у ± 1 оцінці, встановленій ДеВором для наближення без обмежень, не можна замінити ω_2 на ω_k, $k > 2$, навіть для наближення без обмежень.

1. Вступ. Нехай $C := C_{[-1,1]}$ — простір усіх неперервних на $[-1,1]$ функцій f і $\mathbb{P}_n$ — простір усіх алгебраїчних поліномів P_n степеня $\le n \in \mathbb{N}$. Запишемо дві класичні поточкові оцінки типу Нікольського (похибки) наближення $f \in C$ поліномами $P_n \in \mathbb{P}_n$: *якщо* $f \in C$, *то для будь-якого* $n \ge k-1$, $k \in \mathbb{N}$, *існує* $P_n \in \mathbb{P}_n$ *такий, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \le c\,\omega_k\left(f, \rho_n(x)\right), \quad \text{де} \quad \rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad x \in [-1,1], \tag{1.1}$$

$\rho_0(x) :\equiv 1$, c — *стала, що залежить лише від* k, *і* $\omega_k(f,t)$ — k-*й модуль гладкості* f; *якщо* $f \in C$, *то для* $k = 1, 2$ *і кожного* $n \ge k-1$ *існує* $P_n \in \mathbb{P}_n$ *такий, що*

$$|f(x) - P_n(x)| \le c\,\omega_k\left(f, \delta_n(x)\right), \quad \text{де} \quad \delta_n(x) := \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad x \in [-1,1], \tag{1.2}$$

$\delta_0(x) :\equiv 1$. Оцінку (1.1) встановили Тіман (для $k = 1$), Дзядик (для $k = 2$), Фройд (для $k = 2$) і Брудний (для $k > 2$) (детальніше див. [1], розділ 6), а інтерполяційну (в -1 і 1) оцінку (1.2) — Теляковський [2] (для $k = 1$) і ДеВор [3] (для $k = 2$). Згодом Ю [4] і Венц, Гонска, Левіатан та Шевчук [5] довели, що на відміну від (1.1) *оцінка* (1.2), *взагалі кажучи*, *не справджується для* $k > 2$.

У 1995 р. Копотун [6] отримав копозитивний аналог (1.1) з $k = 3$. А саме, нехай Y_s позначає набір з $s \in \mathbb{N}$ фіксованих точок y_i:

$$-1 < y_s < \ldots < y_1 < 1.$$

Через $\Delta^{(0)}(Y_s)$ позначимо множину функцій $f \in C$ таких, що f невід'ємна на $[y_1, 1]$, недодатна на $[y_2, y_1]$, невід'ємна на $[y_3, y_2]$ і т. д., тобто

$$f \in \Delta^{(0)}(Y_s) \Leftrightarrow f(x)\Pi(x) \geq 0, \quad \text{де} \quad \Pi(x) := \Pi(x, Y_s) := \prod_{i=1}^{s}(x - y_i), \quad \Pi(x, \varnothing) : \equiv 1.$$

Функції з $\Delta^{(0)}(Y_s)$ називаються *копозитивними* (одна одній, або між собою). Покладемо

$$y_{s+1} := -1 \quad \text{і} \quad y_0 := 1.$$

Теорема 1.1 [6]. *Якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$, що більше за деяку сталу $N(Y_s)$, яка залежить лише від $\min_{i=0,\ldots,s}\{y_i - y_{i+1}\}$, існує поліном $P_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що*

$$P_n \in \Delta^{(0)}(Y_s),$$

зокрема, $P_n(y_i) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, і

$$\bigl|f(x) - P_n(x)\bigr| \leq c(s)\, \omega_3^{\varphi}(f, 1/n), \quad x \in [-1, 1], \tag{1.3}$$

де $c(s)$ — стала, що залежить лише від s, і ω_3^{φ} — третій модуль гладкості Діціана – Тотіка.

З (1.3) випливає рівномірна оцінка

$$\|f - P_n\| \leq c(s)\, \omega_3(f, 1/n), \quad n \geq N(Y_s), \tag{1.4}$$

яку (зі сталою $C(Y_s)$ замість $c(s)$ і для $n \geq 2$) встановлено в [7], як наслідок аналогічної нерівності для сплайнів [7], а для ω_2 — у [8].

Оцінка (1.4), а отже і (1.3), є остаточною за порядком модуля гладкості, тобто в ній неможливо замінити ω_3 на ω_k з $k > 3$, оскільки в [9, 10] побудовано функцію $f \in \Delta^{(0)}(Y_1)$ (яка є навіть ще й з $C^{(1)} := \{f : \ f' \in C\}$) таку, що

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\inf\limits_{P_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y_1)} \|f - P_n\|}{\omega_4(f, 1/n)} = \infty.$$

У цій статті ми доведемо копозитивний аналог нерівності ДеВора (1.2) з $k = 2$, а саме, таку теорему.

Теорема 1.2. *Якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$, то існує стала $N(Y_s)$, яка залежить лише від $\min_{i=0,\ldots,s}\{y_i - y_{i+1}\}$, така, що для кожного натурального $n \geq N(Y_s)$ знайдеться такий поліном $P_n \in \mathbb{P}_n$, що*

$$P_n \in \Delta^{(0)}(Y_s), \tag{1.5}$$

зокрема, $P_n(y_i) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, і

$$\bigl|f(x) - P_n(x)\bigr| \leq c(s)\, \omega_2\bigl(f, \delta_n(x)\bigr), \quad x \in [-1, 1], \tag{1.6}$$

де $c(s)$ — стала, яка залежить лише від s.

Як було зазначено, оцінка (1.6), взагалі кажучи, не справджується з ω_k, $k > 2$, навіть у наближенні без обмежень (1.2) (див. [4, 5]). З теореми 1.2 випливають такі наслідки.

***Наслідок* 1.1.** *Якщо* $f \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap C^{(1)}$, *то для кожного* $n \geq N(Y_s)$ *існує такий поліном* $P_n \in \Delta^{(0)}(Y) \cap \mathbb{P}_n$, *що*

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| \leq c(s)\, \delta_n(x)\, \omega_1\big(f', \delta_n(x)\big), \quad x \in [-1, 1].$$

Нехай W^r, $r \in \mathbb{N}$, — множина функцій $f \in C$, що мають на $[-1, 1]$ абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$ і таких, що $\left|f^{(r)}(x)\right| \leq 1$ майже скрізь.

***Наслідок* 1.2.** *Якщо* $r = 1, 2$ *і* $f \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap W^r$, *то для кожного* $n \geq N(Y_s)$ *існує такий поліном* $P_n \in \Delta^{(0)}(Y) \cap \mathbb{P}_n$, *що*

$$\left\|\frac{f - P_n}{\delta_n^r}\right\| \leq c(s).$$

Позначимо через $\mathrm{Lip}^* \alpha$, $0 < \alpha \leq 2$, множину функцій $f \in C$ таких, що

$$\omega_2(f, t) = O(t^\alpha), \quad t \to 0.$$

***Наслідок* 1.3.** *Нехай* $0 < \alpha < 2$. *Функція* $f \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathrm{Lip}^* \alpha$ *тоді й тільки тоді, коли існує послідовність* $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ *таких поліномів* $P_n \in \Delta^{(0)}(Y_s) \cap \mathbb{P}_n$, *що*

$$\left\|\frac{f - P_n}{\delta_n^\alpha}\right\| = O(1), \quad n \to \infty.$$

Нерівність (1.6) для комонотонного та коопуклого наближень доведено у [11] та [12] відповідно.

2. Допоміжні факти. *2.1.* Далі через c позначатимемо різні невід'ємні абсолютні сталі або сталі, що можуть залежити лише від s. Вони можуть бути різними, навіть якщо знаходитимуться в одному рядку.

Нехай точки $x_j := x_{j,n} := \cos(j\pi/n)$, $j = 0, \ldots, n$, складають чебишовське розбиття $[-1, 1] =: I (= [y_{s+1}, y_0])$. Для фіксованих $Y_s = \{y_i\}_{i=1}^s$ і $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$O_i := O_i(n, Y_s) := (x_{j+2}, x_{j-3}), \quad \text{якщо} \quad y_i \in [x_j, x_{j-1}),$$

де $x_{-1} := 1$, $x_{-2} := 1$ і $x_{n+1} := -1$, $x_{n+2} := -1$. Нехай

$$O = O(n, Y_s) := \bigcup_{i=1}^s O_i.$$

Будемо писати $j \in H := H(n, Y_s)$, якщо $x_j \in I \setminus O$. Зокрема, $\{0, n\} \subset H$.

Для $j = 1, \ldots, n$ позначимо $I_j := I_{j,n} := [x_j, x_{j-1}]$. Довжину будь-якого інтервалу E позначимо через $|E|$, зокрема $|I_j| = x_{j-1} - x_j =: h_{j,n} =: h_j$ і $h_0 = h_{n+1} := h_1$. З посиланнями і без них будемо використовувати відомі нерівності

$$\begin{gathered} h_{j\pm1} < 3h_j, \\ \rho_n(x) < h_j < 5\rho_n(x), \quad x \in I_j, \\ \rho_n(x) < 2\delta_n(x), \quad x \in I \setminus (I_1 \cup I_n), \\ \rho_n^2(y) < 4\rho_n(x)\big(|x - y| + \rho_n(x)\big), \quad x, y \in I. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Ці нерівності використовуються в багатьох роботах з поточкового наближення. Також будемо використовувати нерівність Уїтні [13]

$$\Big\|g - L_{k-1}\big(g, \cdot, [a,b]\big)\Big\|_{[a,b]} \le 3\,\omega_k\big(g, (b-a)/k, [a,b]\big), \quad g \in C\big([a,b]\big), \tag{2.2}$$

де $k \in \mathbb{N}$, $L_k\big(g, x, [a,b]\big)$ — поліном Лагранжа степеня $\le k$, що на $[a,b]$ інтерполює функцію $g = g(x)$ в рівновіддалених точках $a + \nu(b-a)/k$, $\nu = 0, \ldots, k$; $L_0(g, x, [a,b]) := g(a)$; $\omega_k\big(g, t, [a,b]\big)$ — k-й модуль гладкості g на $[a,b]$, а сталу 3 отримано в роботі [14].

Покладемо

$$\omega(t) := \omega_2(f, t).$$

Виберемо найменше $N(Y_s)$, що для всіх $n \ge N(Y_s)$ і $i = 2, \ldots, s$ задовольняє рівність

$$\overline{\overline{O}}_i \cap \overline{\overline{O}}_{i-1} \cap \{-1, 1\} = \varnothing,$$

де $\overline{\overline{O}}_i$ для кожного $i = 1, \ldots, s$ позначає об'єднання всіх відрізків I_j, $j = 1, \ldots, n$, таких, що $I_j \cap \overline{O}_i \ne \varnothing$. Нехай

$$O_i =: (\overline{y}_i, \underline{y}_i) =: (x_{\overline{j}_i}, x_{\underline{j}_i}), \quad i = 1, \ldots, s,$$

тобто $\overline{y}_i$ і $\underline{y}_i$ — ліві і праві кінці O_i відповідно.

Лема 2.1. *Якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$, то для кожного $n \ge N(Y_s)$ знайдеться ламана*

$$L \in \Delta^{(0)}(Y_s), \tag{2.3}$$

яка має вузли лише в точках x_j з $j \in H$, і

$$\big|f(x) - L(x)\big| \le c\,\omega_2(f, \delta_n(x)), \quad x \in I. \tag{2.4}$$

Зауважимо, що ламана L в лемі 2.1 не може мати вузлів у точках x_j, якщо $x_j \in O$.

Доведення. Нехай для кожного $i = 1, \ldots, s$ $\bar{l}_i$ — лінійна функція, що інтерполює f в точках $\overline{y}_i$ і y_i; $\underline{l}_i$ — лінійна функція, що інтерполює f в y_i і $\underline{y}_i$, і

$$\Delta_i(x) := \frac{\bar{l}_i(x) + \underline{l}_i(x)}{2}.$$

Через $\widehat{L} := \widehat{L}(x)$ позначимо ламану, яка складається з $5s+1$ ланок, таких, що $\widehat{L}(\pm 1) = 0$ і для кожного $i = 1, \ldots, s$ $\widehat{L}(x_{\overline{j}_i+1}) = \widehat{L}(y_i) = \widehat{L}(x_{\underline{j}_i-1}) = 0$ та

$$\widehat{L}(\overline{y}_i) = \Delta_i(\overline{y}_i) - f(\overline{y}_i), \qquad \widehat{L}(\underline{y}_i) = \Delta_i(\underline{y}_i) - f(\underline{y}_i).$$

Зазначимо, що

$$\big|\widehat{L}(x)\big| \le c\,\omega\big(\delta_n(x)\big), \quad x \in I. \tag{2.5}$$

Справді, якщо $x \in O_i$, то за нерівністю Уїтні (2.2)

$$\big|f(x) - \bar{l}_i(x)\big| \le c\,\omega\big(|O_i|\big) \quad \text{і} \quad \big|f(x) - \underline{l}_i(x)\big| \le c\,\omega\big(|O_i|\big),$$

тобто

$$|\widehat{L}(x)| \le \max\Big\{\big|\widehat{L}(\overline{y}_i)\big|, \big|\widehat{L}(\underline{y}_i)\big|\Big\} \le c\,\omega\big(|O_i|\big),$$

і (2.5) справджується з урахуванням означення $\widehat{L}$ і (2.1).

Через $L^* := L^*(x)$ позначимо ламану з вузлами в x_j, $j \in H$, і y_i, $i = 1, \ldots, s$, що інтерполює f у цих вузлах. Звісно, $L^* \in \Delta^{(0)}(Y_s)$, якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y_s)$, і за нерівністю Уїтні

$$\big|f(x) - L^*(x)\big| \le c\,\omega\left(\rho_n(x)\right), \quad x \in I. \tag{2.6}$$

Тепер ламана

$$L := L(x) := L^*(x) + \widehat{L}(x)$$

є шуканою. Справді, включення $L \in \Delta^{(0)}(Y_s)$ є очевидним за побудовою і L не має вузлів ніде, крім в x_j з $j \in H$ (на кожному O_i вона лінійна, $L = \Delta_i$), тоді як нерівності (2.5), (2.6) зумовлюють (2.4) для $x \in I \setminus (I_1 \cup I_n)$.

Отже, ми залишились з (2.4) для $x \in I_1$ і $x \in I_n$. За побудовою, L лінійна на I_1 і I_n та $L(-1) = f(-1)$, $L(1) = f(1)$. Покладемо $g(x) := f(x) - L(x)$. Тоді маємо $g(-1) = 0$, $g(1) = 0$, $\omega_2(g, t, I_1) = \omega_2(f, t, I_1) \le \omega(t)$ і $\omega_2(g, t, I_n) \le \omega(t)$. Крім того, нерівності (2.5) і (2.6) зумовлюють оцінку

$$\big|g(x)\big| \le c\,\omega(1/n^2), \quad x \in I_1 \cup I_n.$$

Тепер, наприклад, для $x \in I_1$ застосуємо нерівність Маршо [15] і отримаємо

$$\big|f(x) - L(x)\big| = \big|g(x)\big| = \big|g(x) - g(1)\big| \le c\,(1-x) \int\limits_{1-x}^{|I_1|} \frac{\omega(u)}{u^2} du + \frac{1-x}{|I_1|} \omega\left(|I_1|\right) \le$$

$$\le c\,(1-x) \int\limits_{1-x}^{\delta_n(x)} \frac{\omega(u)}{u^2} du + c\,(1-x) \int\limits_{\delta_n(x)}^{|I_1|} \frac{\omega(u)}{u^2} du + c\,\omega\big(\delta_n(x)\big) \le$$

$$\le c\,(1-x)\,\omega\big(\delta_n(x)\big) \int\limits_{1-x}^{\infty} \frac{du}{u^2} + c\,(1-x^2)\,|I_1| \frac{\omega\big(\delta_n(x)\big)}{\delta_n^2(x)} + c\,\omega\big(\delta_n(x)\big) \le$$

$$\le c\,\omega\big(\delta_n(x)\big) + c\,n^2 |I_1| \omega\big(\delta_n(x)\big) \le c\,\omega\big(\delta_n(x)\big).$$

Так само перевіряється (2.4) для $x \in I_n$.

Лему 2.1 доведено.

***Наслідок* 2.1.** *Якщо L — ламана з леми* 2.1, *то*

$$\big|[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\big| \le c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{2.7}$$

$$[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L] = [x_j, x_{j-1}, L] = 0, \quad j \notin H, \tag{2.8}$$

де $[x_j, x_{j-1}, L]$ і $[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]$ — перша і друга поділені різниці L відповідно.

2.2. Наслідуючи [16] (див. також [17]), покладаємо

$$t_j(x) := t_{j,n}(x) := \frac{\cos^2 2n \arccos x}{(x - x_j^0)^2} + \frac{\sin^2 2n \arccos x}{(x - \bar{x}_j)^2},$$

де $\bar{x}_j = \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\pi/n,\ x_j^0 = \cos\beta_j^0$ з $\beta_j^0 = \left(j - \frac{1}{4}\right)\pi/n,\ j \le n/2$, і $\beta_j^0 = \left(j - \frac{3}{4}\right)\pi/n,$ $j > n/2$. Зазначимо, що $\bar{x}_j$ і x_j^0 — нулі відповідних чисельників, які містяться строго в I_j, а t_j — алгебраїчні поліноми степеня $4n-2$ такі, що

$$t_j(x) \le \frac{c}{\big(|x - x_j| + h_j\big)^2} \le c\, t_j(x), \quad x \in I.$$

Зафіксуємо $b \in \mathbb{N}$. Далі сталі c будуть залежити від цього b, тобто $c := c(b)$. Також будемо писати $c_k := c_k(b)$, $k = 1, 2$, якщо будуть посилання на значення цих сталих. Наслідуючи [18 – 20], означимо для кожного $j \in H$ два алгебраїчних поліноми степеня $\le cn$:

$$T_j(x) := T_{j,n}(x, b, Y_s) := \int\limits_{-1}^{x} t_j^b(u)\Pi(u, Y_s)du \Big/ \int\limits_{-1}^{1} t_j^b(u)\Pi(u, Y_s)du,$$

$$\tau_j(x) := \tau_{j,n}(x, b, Y_s) := \alpha \int\limits_{-1}^{x} T_{j+1}(u)du + (1 - \alpha) \int\limits_{-1}^{x} T_{j-1}(u)du,$$

де $0 \le \alpha \le 1$ вибрано з умови

$$\tau_{j,n}(1, b, Y_s) = 1 - x_j,$$

і $T_{n+1}(x) = T_n(x) :\equiv 1,\ T_{-1}(x) = T_0(x) :\equiv 0$. Позначимо

$$\chi(x, a) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le a, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > a, \end{cases} \quad a \in I, \qquad \chi_j(x) := \chi(x, x_j), \quad (x - x_j)_+ := (x - x_j)\,\chi_j(x),$$

$$\Gamma_j(x) := \Gamma_{j,n}(x) := \frac{h_j}{|x - x_j| + h_j}$$

і запишемо нерівність з (2.1):

$$h_j\Gamma_j(x) \le c\rho_n(x), \quad x \in I. \tag{2.9}$$

Нехай

$$Y^* := Y_s \cup \{-1, 1\} = \{y_{s+1}, \ldots, y_0\},$$
$$t_j^* := T'_{j,n}(x, b, Y^*).$$

Будемо писати O_i^*, $i = 0, \ldots, s+1$, для $O_{s+1}^* := [-1, x_{n-1})$, $O_i^* := O_i$, $i = 1, \ldots, s$, і $O_0^* := (x_1, 1]$. Нехай

$$O^* = O^*(n, Y^*) := \bigcup_{i=0}^{s+1} O_i^*.$$

В лемі 2.2 зберемо, в зручній для нас формі, необхідні нерівності з [18 – 20].

Лема 2.2. *Якщо* $j \in H$ *і* $b \geq 6(s+3)$, *то*

$$\big|\chi_j(x) - T_j(x)\big| \leq c\left(\Gamma_j(x)\right)^{2b-s-1}, \quad x \in I,$$

$$\big|(x-x_j)_+ - \tau_j(x)\big| \leq c\, h_j\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b-s-2}, \quad x \in I,$$

$$\tau_j(\pm 1) = (\pm 1 - x_j)_+, \quad t_j^*(\pm 1) = 0, \tag{2.10}$$

$$t_j^*(x)\,\Pi(x)\,\Pi(x_j) \geq 0, \quad x \in I, \tag{2.11}$$

$$|t_j^*(x)| \leq c\frac{1}{h_j}\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b-s}, \quad x \in I, \tag{2.12}$$

$$|t_j^{*\prime}(x)| \leq c\frac{1}{\rho_n(x) h_j}\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b-s+1}, \quad x \in I, \tag{2.13}$$

$$|t_j^*(x)| \geq c_1\frac{1}{h_j}\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b+2s}, \quad x \in I \setminus O^*, \tag{2.14}$$

$$|t_j^*(x)| \geq c_1\,\frac{1}{h_j}\,\big(\Gamma_j(x)\big)^{2b+2s}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \qquad x \in O_i^*, \quad i = 0,\ldots,s+1, \tag{2.15}$$

де, нагадаємо, $c_1 = c_1(b)$ *— додатна стала, яка залежить лише від* s *і* b.

***Зауваження* 2.1.** Лему 2.2 доводять за допомогою нерівностей

$$c\,\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right| \leq |T_j'(x)| \leq c\,\frac{1}{h_j}\Gamma_j^{2b}(x)\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(x_j)}\right|, \quad x \in I,$$

$$\left|\frac{\Pi(x)}{\Pi(y)}\right| \leq \left(\frac{|x-y|}{\rho_n(y)}+1\right)^{s+2}, \qquad x \in I, \quad y \in I \setminus O^*,$$

$$\gamma_j^2(x) < 16\Gamma_j(x), \qquad \Gamma_j^2(x) < 400\gamma_j(x), \quad x \in I,$$

де $\gamma_j(x) := \rho_n(x)/\big(|x-x_j|+\rho_n(x)\big)$, і з урахуванням нерівності Бернштейна – Маркова для (2.13).

2.3. Для кожного $j \in H$ покладемо

$$\widehat{\tau}_j(x) := \widehat{\tau}_{j,n}(x,b,Y^*) := \tau_{j,n}(x,b,\varnothing) + \sum_{i=1}^{s}\frac{(y_i-x_j)_+ - \tau_{j,n}(y_i,b,\varnothing)}{T_{j,n}'(y_i,b,Y_i)}T_{j,n}'(x,b,Y_i),$$

де $Y_i := Y^* \setminus \{y_i\}$.

***Наслідок* 2.2.** *Якщо* $j \in H$ *і* $b \geq 6(s+3)$, *то поліном* $\widehat{\tau}_j \in \mathbb{P}_{cn}$ *задовольняє нерівності*

$$\big|\chi_j(x) - \widehat{\tau}_j'(x)\big| \leq c\,(\Gamma_j(x))^{2b-2s-2}, \quad x \in I, \tag{2.16}$$

$$\big|(x-x_j)_+ - \widehat{\tau}_j(x)\big| \leq c_2\, h_j(\Gamma_j(x))^{2b-2s-3}, \quad x \in I, \tag{2.17}$$

$$\big|(x-x_j)_+ - \widehat{\tau}_j(x)\big| \leq c_2\, h_j(\Gamma_j(x))^{2b-2s-3}\left|\frac{x-y_i}{x_j-y_i}\right|, \qquad x \in O_i^*, \quad i = 0,\ldots,s+1, \tag{2.18}$$

зокрема,

$$(y_i - x_j)_+ - \widehat{\tau}_j(y_i) = 0. \tag{2.19}$$

Візьмемо три числа:

$$b_1 = 6(s+3), \qquad b_2 = 6(2s+3), \qquad n_1 = 2\big[1 + c_2(b_2)/c_1(b_1)\big]n$$

($[\cdot]$ — ціла частина) і для кожного $j = 1, \ldots, n-1$ через j^* позначимо індекс такий, що

$$x_{j^*,n_1} = x_{j,n}.$$

Лема 2.3. *Для кожного $j \in H$ поліноми*

$$\overline{\tau}_j(x) := \widehat{\tau}_{j^*,n_1}(x, b_2, Y^*) + h_{j,n}^2\, T_{j,n}'(x, b_1, Y^*),$$
$$\underline{\tau}_j(x) := \widehat{\tau}_{j^*,n_1}(x, b_2, Y^*) - h_{j,n}^2\, T_{j,n}'(x, b_1, Y^*)$$

степеня cn при всіх $x \in I$ задовольняють нерівності

$$\big(\overline{\tau}_j(x) - (x - x_j)_+\big)\Pi(x)\,\Pi(x_j) \ge 0, \tag{2.20}$$

$$\big(\underline{\tau}_j(x) - (x - x_j)_+\big)\Pi(x)\,\Pi(x_j) \le 0, \tag{2.21}$$

$$\big|(x - x_j)_+ - \overline{\underline{\tau}}_j(x)\big| \le c\, h_j\, \Gamma_{j,n}^6(x), \tag{2.22}$$

$$\big|(x - x_j)_+ - \overline{\underline{\tau}}_j(x)\big| \le c\,(1 - x^2)\,\Gamma_{j,n}^4(x), \tag{2.23}$$

де $\overline{\underline{\tau}}_j := \overline{\tau}_j \vee \underline{\tau}_j$.

Доведення. З двох схожих нерівностей (2.20) і (2.21) доведемо лише (2.20). Якщо $x \in$ $\in I \setminus O^*(n_1, Y^*)$, то (2.17), (2.14) і (2.11) обумовлюють

$$\big(\overline{\tau}_j(x) - (x - x_j)_+\big)\Pi(x)\Pi(x_j) \equiv$$
$$\equiv \big(\widehat{\tau}_{j^*,n_1}(x, b_2, Y^*) - (x - x_j)_+ + h_{j,n}^2\, T_{j,n}'(x, b_1, Y^*)\big)\Pi(x)\Pi(x_j) \ge$$
$$\ge -c_2(b_2)\; h_{j^*,n_1}\Gamma_{j^*,n_1}^{22s+33}(x) + c_1(b_1)\; \frac{h_{j,n}^2}{h_{j,n}}\Gamma_{j,n}^{14s+36}(x) \ge$$
$$\ge \big(c_1(b_1)\, h_{j,n} - c_2(b_2)\, h_{j^*,n_1}\big)\Gamma_{j,n}^{14s+36}(x) \ge 0$$

завдяки n_1. Збираючи (2.18), (2.15) і (2.11), отримуємо (2.20) для $x \in O^*(n_1, Y^*)$.

Доведемо (2.22) і (2.23) лише для $\underline{\tau}_j$. Нерівності (2.17) і (2.12) зумовлюють (2.22):

$$\big|(x - x_j)_+ - \overline{\tau}_j(x)\big| = \Big|\big((x - x_j)_+ - \widehat{\tau}_{j^*,n_1}(x, b_2, Y^*)\big) + h_{j,n}^2\, T_{j,n}'(x, b_1, Y^*)\Big| =:$$
$$=: \big|A_1(x) + A_2(x)\big| \le c_2(b_2)\, h_{j^*,n_1}\Gamma_{j^*,n_1}^{22s+33}(x) + c(b_1)\, \frac{h_{j,n}^2}{h_{j,n}}\Gamma_{j,n}^{11s+36}(x) \le c\, h_j\, \Gamma_j^6(x).$$

Якщо $x \notin I_1 \cup I_n$, то (2.9) зумовлює нерівність

$$h_j\, \Gamma_j^2(x) \le c\, n^2\, \rho_n^2(x) \le c\,(1 - x^2),$$

і тоді (2.23) випливає з (2.22).

Якщо $x \in I_1$, то згідно з (2.19), (2.10), (2.16), (2.13) і (2.1) записуємо

$$\big|(x-x_j)_+ - \tau_{j^*}(x)\big| = \big|A_1(x) - A_1(1) + A_2(x) - A_2(1)\big| =$$

$$= \left|\int\limits_x^1 A_1'(u)du + \int\limits_x^1 A_2'(u)du\right| \le \int\limits_x^1 \big|A_1'(u)\big|\,du + \int\limits_x^1 \big|A_2'(u)\big|\,du \le$$

$$\le c(b_2)\,(1-x)\,\max_{t\in I_1}\Gamma_{j^*,n_1}^{22s+34}(t) + c(b_1)\frac{h_{j,n}^2}{\rho_n(x)h_{j,n}}\,(1-x)\,\Gamma_{j,n}^{11s+35}(x) \le$$

$$\le c\,(1-x)\,\Gamma_{j^*,n_1}^{22s+34}(x_1) + c\,\frac{4(|x-x_j| + \rho_n(x))h_{j,n}^2}{\rho_n^2(x_j)h_{j,n}}\,(1-x)\,\Gamma_{j,n}^{11s+35}(x) \le$$

$$\le c\,(1-x)\,\Gamma_{j^*,n_1}^{22s+34}(x_1) + c\,(1-x)\,\Gamma_{j,n}^{11s+34}(x) \le$$

$$\le c\,(1-x)\,\Gamma_j^4(x) \le c\,(1-x^2)\,\Gamma_j^4(x).$$

Аналогічно доводиться (2.23) для $x \in I_n$.

Лему 2.3 доведено.

3. Доведення теореми 1.2. Нехай L — ламана з леми 2.1. Запишемо її у вигляді

$$L(x) \equiv l(x) + \sum_{j=1}^{n-1}\big[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L\big]\big(x_{j-1} - x_{j+1}\big)(x-x_j)_+ \equiv$$

$$\equiv l(x) + \sum_{j\in H^*}\big[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L\big]\big(x_{j-1} - x_{j+1}\big)(x-x_j)_+,$$

де $l(x) := L(-1) + [x_n, x_{n-1}, L](x+1),\ H^* := H\setminus\{0,n\}$ і де ми скористалися (2.8).

Покладемо

$$P_n(x) := l(x) + \sum_{j\in H^*}\big[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L\big]\big(x_{j-1} - x_{j+1}\big)\tau_j^*(x),$$

де

$$\tau_j^*(x) := \begin{cases} \overline{\tau}_j(x), & \text{якщо} \quad [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L]\Pi(x_j) \ge 0, \\ \underline{\tau}_j(x) & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Таким чином, беручи до уваги (2.3), бачимо, що нерівності (2.20) і (2.21) при всіх $x \in I$ зумовлюють оцінку

$$P_n(x)\Pi(x) = \big(P_n(x) - L(x) + L(x)\big)\Pi(x) =$$

$$= \left(\sum_{j\in H^*}\big[x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L\big](x_{j-1} - x_{j+1})(\tau_j^*(x) - (x-x_j)_+) + L(x)\right)\Pi(x) \ge 0,$$

яка еквівалентна (1.5).

Для доведення (1.6) запишемо різницю $f - P_n$ у вигляді

$$f(x) - P_n(x) = f(x) - L(x) + L(x) - P_n(x) = f(x) - L(x) +$$

$$+ \sum_{j \in H^*} [x_{j+1}, x_j, x_{j-1}, L](x_{j-1} - x_{j+1})\big((x - x_j)_+ - \tau_j^*(x)\big) =:$$

$$=: f(x) - L(x) + \sum_{j \in H^*} \alpha_j(x). \tag{3.1}$$

Для оцінювання $\alpha_j(x)$ скористаємося нерівностями (2.22), (2.23) і (2.7). Якщо $x \notin I_1 \cup I_n$, то

$$\big|\alpha_j(x)\big| \le c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2} h_j h_j \Gamma_j^4(x) = c\,\omega(h_j)\Gamma_j^4(x) \le$$

$$\le c\,\omega\big(\rho_n(x)\big)\left(1 + \frac{h_j^2}{\rho_n^2(x)}\right)\Gamma_j^4(x) \le c\,\omega\big(\rho_n(x)\big)\Gamma_j^2(x) \le$$

$$\le c\,\omega\big(\delta_n(x)\big)\Gamma_j^2(x),$$

де ми скористалися (2.9). Якщо $x \in I_1$, то

$$|\alpha_j(x)| \le c\,\frac{\omega(h_j)}{h_j^2} h_j (1 - x^2)\Gamma_j^4(x) \le c\,\omega\left(\delta_n(x)\right)\Gamma_j^2(x),$$

де ми знову скористалися (2.9). Тому, беручи до уваги, що (2.9) також зумовлює нерівність $\left\|\sum_{j=1}^n \Gamma_j^2\right\| \le c$, записуємо

$$\left|\sum_{j \in H^*} \alpha_j(x)\right| \le c\,\omega\big(\delta_n(x)\big) \sum_{j \in H^*} \Gamma_j^2(x) \le c\,\omega\big(\delta_n(x)\big) \left\|\sum_{j=1}^n \Gamma_j^2\right\| \le c\,\omega\big(\delta_n(x)\big), \quad x \in I.$$

Звідси, з (3.1) і (2.4) випливає (1.6).

Теорему 1.2 доведено.

Література

1. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, Москва (1977).
2. С. А. Теляковский, *Две теоремы о приближении функций алгебраическими многочленами*, Мат. сб., **70 (112)**, № 2, 252 – 265 (1966).
3. R. A. DeVore, *Degree of approximation, Approximation theory*, II, Proc. Intern. Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex., 1976, Acad. Press, New York (1976), p. 117 – 161.
4. X. M. Yu, *Pointwise estimates for convex polynomial approximation*, Approx. Theory and Appl., **1**, № 4, 65 – 74 (1985).
5. H. H. Gonska, D. Leviatan, I. A. Shevchuk, H.-J. Wenz, *Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation*, Constr. Approx., **16**, 603 – 629 (2000).
6. K. A. Kopotun, *Copositive approximation by algebraic polynomials*, Anal. Math., **21**, Issue 4, 269 – 283 (1995).
7. Y. Hu, X. M. Yu, *The degree of copositive approximation and a computer algorithm*, SIAM J. Numer. Anal., **33**, Issue 1, 388 – 398 (1996).
8. Y. Hu, D. Leviatan, X. M. Yu, *Copositive polynomial approximation in* $C[0,1]$, J. Anal., **1**, 85 – 90 (1993).
9. S. P. Zhou, *A counterexample in copositive approximation*, Israel J. Math., **78**, 75 – 83 (1992).
10. S. P. Zhou, *On copositive approximation*, Approxim. Theory and Appl., **9**, Issue 2, 104 – 110 (1993).
11. G. A. Dzyubenko, *Comonotone approximation with interpolation at the ends of an interval*, Anal. Theory and Appl., **22**, № 3, 233 – 245 (2006).

12. G. A. Dzyubenko, J. Gilewicz, I. A. Shevchuk, *Coconvex pointwise approximation*, Укр. мат. журн., **54**, № 9, 1200 – 1212 (2002).
13. H. Whitney, *On functions with bouded n-th differences*, J. Math. Pures et Appl., **36**, № 9, 67 – 95 (1957).
14. J. Gilewicz, Yu. V. Kryakin, I. A. Shevchuk, *Boundedness by 3 of the Whitney interpolation constant*, J. Approx. Theory, **119**, 271 – 290 (2002).
15. A. Marchaud, *Sur les dérivées et sur les différences des fonctions de variables réelles*, J. Math. Pures et Appl., **6**, 337 – 426 (1927).
16. И. А. Шевчук, *Приближение монотонных функций монотонными многочленами*, Мат. сб., **183**, № 5, 63 – 78 (1992).
17. И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наук. думка, Киев (1992).
18. G. A. Dzyubenko, J. Gilewicz, I. A. Shevchuk, *Piecewise monotone pointwise approximation*, Constr. Approx., **14**, 311 – 348 (1998).
19. K. A. Kopotun, *Pointwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials*, Constr. Approx., **10**, № 2, 153 – 178 (1994).
20. D. Leviatan, I. A. Shevchuk, *Coconvex approximation*, J. Approx. Theory, **118**, 20 – 65 (2002).

Одержано 12.01.22