DOI: 10.37863/umzh.v74i4.7164

УДК 517.5

І. В. Кальчук, Ю. І. Харкевич (Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $W^r_{\beta,\infty}$ УЗАГАЛЬНЕНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ АБЕЛЯ – ПУАССОНА

We study the approximative properties of generalized Abel – Poisson integrals $P_\gamma(\delta)$, $0 < \gamma \le 2$, on the Weil – Nagy classes $W^r_{\beta,\infty}$ under the condition $0 < r \le \gamma$ in the uniform metric.

Проведено дослідження апроксимативних властивостей узагальнених інтегралів Абеля – Пуассона $P_\gamma(\delta)$, $0 < \gamma \le 2$, на класах Вейля – Надя $W^r_{\beta,\infty}$ у випадку $0 < r \le \gamma$ в рівномірній метриці.

Вступ. Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max_t |f(t)|$; L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних суттєво обмежених функцій з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$; L — простір 2π-періодичних сумовних на періоді функцій, в якому норма задається рівністю $\|f\|_L = \|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Нехай функція f належить простору L і її ряд Фур'є має вигляд

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Нехай, далі, $r > 0$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції φ, то функцію φ називають (r,β)-похідною функції f у сенсі Вейля – Надя і позначають f^r_β (див., наприклад, [1, с. 130]). Множину функцій, для яких виконується ця умова, називають класом Вейля – Надя і позначають W^r_β. Якщо $f \in W^r_\beta$ і, крім того, $\left\|f^r_\beta(\cdot)\right\|_\infty \le 1$, то кажуть, що f належить класу $W^r_{\beta,\infty}$.

Нехай $f \in L$. Величину

$$P_\gamma(\rho, f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^\gamma} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad 0 \le \rho < 1, \quad 0 < \gamma \le 2, \tag{1}$$

де a_k, b_k — коефіцієнти Фур'є функції f, називають узагальненим інтегралом Абеля – Пуассона (див., наприклад, [2, 3]). При $\gamma = 1$ інтеграл (1) є інтегралом Пуассона (див., наприклад, [4 – 6]), при $\gamma = 2$ — інтегралом Веєрштрасса (див., наприклад, [7, 8]).

Поклавши $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, скрізь далі узагальнений інтеграл Абеля – Пуассона будемо записувати у вигляді

$$P_\gamma(\delta, f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^\gamma}{\delta}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad \delta > 0, \quad 0 < \gamma \le 2. \tag{2}$$

Статтю присвячено дослідженню асимптотичної поведінки при $\delta \to \infty$ величини

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta,\infty}; P_\gamma(\delta))_C = \sup_{f \in W^r_{\beta,\infty}} \left\|f(\cdot) - P_\gamma(\delta, f, \cdot)\right\|_C. \tag{3}$$

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $g(\delta)$ таку, що $\mathcal{E}(W^r_{\beta,\infty}; P_\gamma(\delta))_C = g(\delta) + o\big(g(\delta)\big)$ при $\delta \to \infty$, то говорять (див., наприклад, [1, с. 198]), що розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського для узагальненого інтеграла Абеля – Пуассона на класі $W^r_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці.

Зазначимо, що апроксимативні властивості узагальнених інтегралів Абеля – Пуассона на класах W^r_β, W^r та інших вивчали в роботах [2, 7, 9 – 14], але в більшості робіт задачу Колмогорова – Нікольського було розв'язано лише у випадках $\gamma = 1$ та $\gamma = 2$. Ми ж ставимо за мету знайти асимптотичні рівності для величин (3) при довільних $0 < \gamma \le 2$.

Асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень узагальнених інтегралів Абеля – Пуассона від функцій із класу $W^r_{\beta,\infty}$. Для узагальненого інтеграла Абеля – Пуассона (1) запишемо підсумовуючу функцію [15] у вигляді

$$\tau(u) = \begin{cases} \left(1 - e^{-u^\gamma}\right)\Big((\gamma - r - 1)\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}u^{2-\gamma} + (2 + r - \gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}u^{1-\gamma}\Big), & 0 \le u \le \dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}, \\ \left(1 - e^{-u^\gamma}\right)u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}, \end{cases} \tag{4}$$

де $0 < \gamma \le 2,\ \delta > 0$.

Домовимося далі через $K,\ K_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ позначати сталі, взагалі кажучи, різні в різних співвідношеннях.

Справджується така теорема.

Теорема. *Нехай $0 < r \le \gamma$. Тоді при $\delta \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(W^r_{\beta,\infty}; P_\gamma(\delta)\right)_C = \frac{1}{\left(\sqrt[\gamma]{\delta}\right)^r}A(\tau) + \Upsilon(\gamma, \delta), \tag{5}$$

де

$$\Upsilon(\gamma, \delta) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\delta}\right), & 0 < \gamma \le 1, \\ O\left(\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{1}{\left(\sqrt[\gamma]{\delta}\right)^{r+1}}\right), & 1 < \gamma \le 2, \end{cases} \tag{6}$$

величину $A(\tau)$ означено рівністю

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\Big(ut + \frac{\beta\pi}{2}\Big)du\right|dt \tag{7}$$

і для неї має місце оцінка

$$A(\tau) = \begin{cases} O(1), & 0 < r < \gamma, \\ O(\ln\delta), & r = \gamma. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення. Згідно з теоремою А [10], якщо функція $\tau(u)$ неперервна при $u \ge 0$ й інтеграл (7) є збіжним, то при $r > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ і $\delta \to \infty$ справджується рівність

$$\mathcal{E}(W^r_{\beta,\infty}; P_\gamma(\delta))_C = \frac{1}{(\sqrt[\gamma]{\delta})^r}A(\tau) + O\left(\frac{1}{(\sqrt[\gamma]{\delta})^r}a(\tau)\right), \tag{9}$$

де

$$a(\tau) = \int\limits_{|t|\geq\frac{\sqrt[\gamma]{\delta}\pi}{2}} \left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\Big(ut+\frac{\beta\pi}{2}\Big)du\right| dt. \tag{10}$$

Покажемо збіжність інтеграла (7). Згідно з теоремою 1 [10], для доведення збіжності інтеграла (7) необхідно і достатньо показати збіжність інтегралів

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\left|d\tau'(u)\right|, \quad \int\limits_{\frac{1}{2}}^\infty |u-1|\left|d\tau'(u)\right|, \quad \int\limits_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u}du, \quad \int\limits_0^1 \frac{\big|\tau(1-u)-\tau(1+u)\big|}{u}du. \tag{11}$$

Знайдемо оцінку для першого інтеграла з (11), розділивши його на дві частини:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\big|d\tau'(u)\big| = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} u\big|d\tau'(u)\big| + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u\big|d\tau'(u)\big|, \quad \delta>4.$$

Введемо позначення

$$v(u) = \big(1-e^{-u^\gamma}\big)u^{2-\gamma}, \qquad w(u) = \big(1-e^{-u^\gamma}\big)u^{1-\gamma}. \tag{12}$$

Знайдемо першу і другу похідні функцій $v(u)$ та $w(u)$:

$$v'(u) = \gamma u e^{-u^\gamma} + (2-\gamma)u^{1-\gamma}(1-e^{-u^\gamma}), \qquad w'(u) = \gamma e^{-u^\gamma} + (1-\gamma)u^{-\gamma}(1-e^{-u^\gamma}),$$

$$v''(u) = \gamma e^{-u^\gamma}(1-\gamma u^\gamma) + (2-\gamma)\big((1-\gamma)u^{-\gamma}(1-e^{-u^\gamma}) + \gamma e^{-u^\gamma}\big),$$

$$w''(u) = \gamma e^{-u^\gamma}\big((1-\gamma)u^{-1} - \gamma u^{\gamma-1}\big) + \gamma(\gamma-1)u^{-\gamma-1}(1-e^{-u^\gamma}).$$

Тоді, враховуючи, що при $u\in\left[0, \dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}\right]$

$$\tau''(u) = (\gamma-r-1)\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}v''(u) + (2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}w''(u), \tag{13}$$

отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} u\big|d\tau'(u)\big| \leq |\gamma-r-1|\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} u|v''(u)|du + (2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} u|w''(u)|du.$$

Враховуючи, що $v''(u)\geq 0,\ w''(u)\leq 0$ при $u\in\left[0, \dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}\right]$, а також нерівності

$$e^{-u^\gamma}\leq 1, \qquad 1-e^{-u^\gamma}\leq u^\gamma, \tag{14}$$

маємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} u\left|d\tau'(u)\right| \le |\gamma-r-1|\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} uv''(u)du-$$

$$-(2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} uw''(u)du = |\gamma-r-1|\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}\big(uv'(u)-v\,(u)\big)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}-$$

$$-(2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\big(uw'(u)-w(u)\big)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}=$$

$$=|\gamma-r-1|\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}\left(\gamma\delta^{-\frac{2}{\gamma}}e^{-\frac{1}{\delta}}+(2-\gamma)\delta^{1-\frac{2}{\gamma}}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-\delta^{1-\frac{2}{\gamma}}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\right)-$$

$$-(2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\left(\gamma\delta^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{1}{\delta}}+(1-\gamma)\delta^{1-\frac{1}{\gamma}}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-\delta^{1-\frac{2}{\gamma}}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\right)\le K\delta^{\frac{r}{\gamma}-1}. \quad (15)$$

Враховуючи, що при $u \ge \dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}$

$$\tau''(u)=\gamma u^{\gamma-r-2}e^{-u^\gamma}(\gamma-1-\gamma u^\gamma)-2r\gamma u^{\gamma-r-2}e^{-u^\gamma}+r(r+1)\big(1-e^{-u^\gamma}\big)u^{-r-2}, \quad (16)$$

а також нерівності (14) та нерівність

$$\big|-\gamma u^\gamma+\gamma-1\big|e^{-u^\gamma}\le 1, \quad u\in[0,\infty),$$

знаходимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u\big|d\tau'(u)\big| \le \gamma\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{\frac{1}{2}}|\gamma-1-\gamma u^\gamma|e^{-u^\gamma}u^{\gamma-r-1}du+2r\gamma\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u^{\gamma-r-1}e^{-u^\gamma}du+$$

$$+r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{\frac{1}{2}}\left(1-e^{-u^\gamma}\right)u^{-r-1}du\le$$

$$\le\big(\gamma+2r\gamma+r(r+1)\big)\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u^{\gamma-r-1}du=\begin{cases}K_1+K_2\delta^{\frac{r}{\gamma}-1}, & 0<r<\gamma,\\ K_3+K_4\ln\delta, & r=\gamma.\end{cases} \quad (17)$$

Із співвідношень (15), (17) випливає оцінка

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\big|d\tau'(u)\big|=\begin{cases}O(1), & 0<r<\gamma,\\ O(\ln\delta), & r=\gamma,\end{cases} \qquad \delta\to\infty. \quad (18)$$

Знайдемо оцінку для другого інтеграла з (11). Враховуючи (16), одержуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\big|d\tau'(u)\big| \le \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u\big|d\tau'(u)\big| \le r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\big(1-e^{-u^{\gamma}}\big)u^{-r-1}du+$$

$$+2r\gamma\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u^{\gamma-r-1}e^{-u^{\gamma}}du+\gamma\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|\gamma-1-\gamma u^{\gamma}|\,u^{\gamma-r-1}e^{-u^{\gamma}}du.$$

Далі, використовуючи нерівності

$$1-e^{-u^{\gamma}}\le 1, \qquad u^{\gamma}e^{-u^{\gamma}}\le 1, \qquad \big|-\gamma u^{\gamma}+\gamma-1\big|u^{\gamma-1}\le 2u^{2\gamma-1}+u^{\gamma-1}, \quad u\in(0,\infty), \tag{19}$$

отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\big|d\tau'(u)\big| \le \big(r(r+1)+2\gamma r\big)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u^{-r-1}du+$$

$$+\gamma\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u^{-r}(2u^{2\gamma-1}+u^{\gamma-1})e^{-u^{\gamma}}du\le$$

$$\le(r(r+1)+2\gamma r)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u^{-r-1}du+2^{r}\gamma\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}(2u^{2\gamma-1}+u^{\gamma-1})e^{-u^{\gamma}}du=K_1. \tag{20}$$

Із (20) випливає оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\big|d\tau'(u)\big|=O(1), \quad \delta\to\infty. \tag{21}$$

Для оцінки третього інтеграла з (11), як і в роботі [16], розіб'ємо проміжок інтегрування на три частини: $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}},1\right]$, $[1,\infty)$.

Нехай $u\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}\right]$. Враховуючи (4) і друге співвідношення із (14), маємо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}\frac{|\tau(u)|}{u}du\le|\gamma-r-1|\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}(1-e^{-u^{\gamma}})u^{1-\gamma}du+$$

$$+(2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}(1-e^{-u^{\gamma}})u^{-\gamma}du\le|\gamma-r-1|\delta^{\frac{r+2}{\gamma}-1}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}udu+$$

$$+(2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}du\le K\delta^{\frac{r}{\gamma}-1}. \tag{22}$$

Згідно з формулою (4) у випадку $u\in\left[\dfrac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}},1\right]$ отримуємо

$$\left|\int_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}\frac{\tau(u)}{u}du-\int_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}u^{\gamma-1-r}du\right|\le\int_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}|1-e^{-u^{\gamma}}-u^{\gamma}|u^{-r-1}du.$$

Оскільки при довільних u виконується нерівність

$$e^{-u^{\gamma}}+u^{\gamma}-1\le\frac{u^{2\gamma}}{2}, \tag{23}$$

то

$$\left|\int_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}\frac{\tau(u)}{u}du-\int_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}u^{\gamma-1-r}du\right|\le\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}u^{2\gamma-r-1}du=K_2+K_3\delta^{\frac{r}{\gamma}-2}. \tag{24}$$

Із (24) випливає, що

$$\int_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}\frac{|\tau(u)|}{u}du=\int_{1}^{\sqrt[\gamma]{\delta}}u^{\gamma-r-1}du+O(1)=\begin{cases}O(1), & r<\gamma,\\ O(\ln\delta), & r=\gamma.\end{cases} \tag{25}$$

Нехай тепер $u\in[1,\infty)$. Згідно з формулою (4) та першою нерівністю з (19) одержуємо

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\tau(u)}{u}du=\int_{1}^{\infty}\big(1-e^{-u^{\gamma}}\big)u^{-r-1}du\le\int_{1}^{\infty}u^{-r-1}du=\frac{1}{r}. \tag{26}$$

Із (22), (25) і (26) випливає оцінка

$$\int_{0}^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du=\begin{cases}O(1), & r<\gamma,\\ O(\ln\delta), & r=\gamma,\end{cases}\qquad \delta\to\infty. \tag{27}$$

Оцінимо тепер четвертий інтеграл з (11). Як і в роботі [10, с. 29], можна показати справедливість рівності

$$\int_{0}^{1}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du=\int_{0}^{1}\frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u}du+O\big(H(\tau)\big), \tag{28}$$

де $H(\tau)$ означається рівністю

$$H(\tau)=|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int_{0}^{\frac{1}{2}}u\big|d\tau'(u)\big|+\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\big|d\tau'(u)\big|,$$

а $\lambda(u)=e^{-u^{\gamma}}$. Враховуючи, що

$$\int_{0}^{1}\frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u}du=\int_{0}^{1}\frac{e^{-(1-u)^{\gamma}}-e^{-(1+u)^{\gamma}}}{u}du=O(1),$$

а також співвідношення (18) і (21), із (28) маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{\big|\tau(1-u)-\tau(1+u)\big|}{u}du = \begin{cases} O(1), & 0<r<\gamma, \\ O(\ln\delta), & r=\gamma, \end{cases} \qquad \delta\to\infty. \tag{29}$$

Отже, згідно з теоремою 1 [10], переконуємося в тому, що інтеграл $A(\tau)$ вигляду (7) є збіжним. Із нерівностей (2.14) і (2.15) з роботи [10] із урахуванням формул (18), (21), (27) і (29) отримуємо співвідношення (8).

Оцінимо залишковий член у правій частині рівності (9), тобто знайдемо оцінку для інтеграла (10). Враховуючи, що $\tau(0)=0$, $\lim_{u\to\infty}\tau(u)=\lim_{u\to\infty}\tau'(u)=0$ і $\tau'(u)$ неперервна на $[0,\infty)$, і двічі інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du = -\frac{1}{t^2}\left(\tau'(0)\cos\frac{\beta\pi}{2}+\int\limits_0^\infty \tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right).$$

Звідси

$$\left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{1}{t^2}\left(|\tau'(0)|+\int\limits_0^\infty |\tau''(u)|du\right).$$

Оскільки

$$|\tau'(0)| = \gamma(2+r-\gamma)\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1} = K_1\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1},$$

то можемо записати

$$\left|\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| \le \frac{K_1}{t^2}\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}+\frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty \big|\tau''(u)\big|du. \tag{30}$$

Проводячи аналогічні міркування, як і при оцінюванні першого інтеграла з (5) на проміжку $u\in\left[0,\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}\right]$, $\delta>4$, можемо записати оцінку

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}} \big|\tau''(u)\big|du = O\left(\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\right), \quad \delta\to\infty. \tag{31}$$

Нехай $u\in\left[\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}},1\right]$. Покладемо

$$\tau_1(u) = (1-e^{-u^\gamma}-u^\gamma)u^{-r}, \qquad \tau_2(u)=u^{\gamma-r},$$

тоді

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^1 |\tau''(u)|du \le \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^1 |\tau_1''(u)|du + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^1 |\tau_2''(u)|du. \tag{32}$$

Враховуючи, що

$$\tau_1''(u) = r(r+1)\left(1-e^{-u^\gamma}-u^\gamma\right)u^{-r-2} - 2\gamma u^{\gamma-r-2}\left(e^{-u^\gamma}-1\right)+$$
$$+\gamma\left((\gamma-1)u^{\gamma-2}(e^{-u^\gamma}-1)-\gamma u^{2\gamma-2}e^{-u^\gamma}\right)u^{-r},$$

знаходимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}|\tau_1''(u)|du\leq r(r+1)\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}(e^{-u^\gamma}+u^\gamma-1)u^{-r-2}du+$$

$$+2\gamma r\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}(1-e^{-u^\gamma})u^{\gamma-r-2}du+\gamma\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}\left|(\gamma-1)u^{\gamma-2}(e^{-u^\gamma}-1)-\gamma u^{2\gamma-2}e^{-u^\gamma}\right|u^{-r}du.$$

Враховуючи (23), другу нерівність з (14) і нерівність

$$\left|(\gamma-1)u^{\gamma-2}(e^{-u^\gamma}-1)-\gamma u^{2\gamma-2}e^{-u^\gamma}\right|\leq(2\gamma-1)u^{2\gamma-2},\quad u\in[0,\infty),$$

маємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}|\tau_1''(u)|du\leq\left(\frac{r(r+1)}{2}+2\gamma r+\gamma(2\gamma-1)\right)\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}u^{2\gamma-r-2}du=$$

$$=\begin{cases}K_1+K_2\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-2}, & r\neq 2\gamma-1,\\ K_3\ln\delta, & r=2\gamma-1.\end{cases}\tag{33}$$

Для другого інтеграла з правої частини рівності (32) очевидною є оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt[\gamma]{\delta}}}^{1}|\tau_2''(u)|du=O\left(1+\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\right),\quad\delta\to\infty.\tag{34}$$

Враховуючи (33), (34), із (32) знаходимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}|\tau''(u)|du=O\big(1+\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\big),\quad\delta\to\infty.\tag{35}$$

Нехай тепер $u\in[1,\infty)$. Проводячи аналогічні міркування, як і при оцінюванні другого інтеграла з (11), отримуємо

$$\int\limits_{1}^{\infty}|\tau''(u)|du=O(1),\quad\delta\to\infty.\tag{36}$$

Об’єднуючи формули (31), (35) і (36), із (30) одержуємо

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|=O\left(\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\right)\frac{1}{t^2}$$

при $0<\gamma\leq 1$ і

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| = O\left(1+\delta^{\frac{r+1}{\gamma}-1}\right)\frac{1}{t^2}$$

при $1<\gamma\le 2$. Звідси

$$a(\tau) = \int\limits_{|t|\ge\frac{\sqrt[\gamma]{\delta}\pi}{2}} \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt = \begin{cases} O\left(\delta^{\frac{r}{\gamma}-1}\right), & 0<\gamma\le 1,\\ O\left(\delta^{-\frac{1}{\gamma}}+\delta^{\frac{r}{\gamma}-1}\right), & 1<\gamma\le 2.\end{cases}$$

Із останньої рівності та співвідношення (9) випливає, що мають місце рівності (5) і (6).

Теорему доведено.

Література

1. А. И. Степанец, *Методы теории приближения*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (2002).
2. Л. П. Фалалеев, *О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона*, Сиб. мат. журн., **42**, № 4, 926 – 936 (2001).
3. Я. С. Бугров, *Неравенства типа неравенств Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка*, Math. Cluj, **5**, № 1, 5 – 25 (1963).
4. И. П. Натансон, *О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона*, Докл. АН СССР, **72**, № 1, 11 – 14 (1950).
5. А. Ф. Тиман, *Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона*, Докл. АН СССР, **74**, № 1, 17 – 20 (1950).
6. I. V. Kal'chuk, Yu. I. Kharkevych, K. V. Pozharska, *Asymptotics of approximation of functions by conjugate Poisson integrals*, Carpatian Math. Publ., **12**, № 1, 138 – 147 (2020).
7. В. А. Баскаков, *О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона*, Мат. заметки, **17**, № 2, 169 – 180 (1975).
8. O. L. Shvai, K. V. Pozharska, *On some approximation properties of Gauss – Weierstrass singular operators*, J. Math. Sci., **260**, № 5, 693 – 699 (2022).
9. Л. И. Баусов, *О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье*, Успехи мат. наук, **16**, № 3, 143 – 149 (1961).
10. Л. И. Баусов, *Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I*, Изв. вузов, **46**, № 3, 15 – 31 (1965).
11. Yu. I. Kharkevych, *Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals*, J. Automat. and Inform. Sci., **50**, № 8, 38 – 49 (2018).
12. I. V. Kal'chuk, Yu. I. Kharkevych, *Complete asymptotics of the approximation of function from the Sobolev classes by the Poisson integrals*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22**, № 1, 23 – 36 (2018).
13. Yu. I. Kharkevych, *On approximation of the quasi-smooth functions by their Poisson type integrals*, J. Automat. and Inform. Sci., **49**, № 10, 74 – 81 (2017).
14. I. V. Kal'chuk, *Approximation of (ψ,β)-differentiable functions defined on the real axis by Weierstrass operators*, Ukr. Math. J., **59**, № 9, 1342 – 1363 (2007).
15. I. V. Kal'chuk, V. I. Kravets, U. Z. Hrabova, *Approximation of the classes $W^r_\beta H^\alpha$ by three-harmonic Poisson integrals*, J. Math. Sci., **246**, № 1, 39 – 50 (2020).
16. F. G. Abdullayev, Yu. I. Kharkevych, *Approximation of the classes $C^\psi_\beta H^\alpha$ by biharmonic Poisson integrals*, Ukr. Math. J., **72**, № 1, 21 – 38 (2020).

Одержано 15.02.22