DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7143

УДК 517.5

О. Г. Ровенська, В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ),
М. В. Савчук (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ СЕРЕДНІМИ ЧЕЗАРО

For the Lipschitz class of functions holomorphic in the disc, we present a constructive characterization of this class in terms of Cesàro's means of order $\alpha \geq 2$ of the Taylor series. We solve the problem of exact upper bound for the deviations of Cesàro's means of order $\alpha \geq 2$ as well as for the deviations of Riesz's means of order 2 of the Taylor series in the class of functions holomorphic in the disc and having a bounded derivative.

Наведено конструктивну характеристику класу Ліпшиця голоморфних у крузі функцій в термінах середніх Чезаро порядку $\alpha \geq 2$ рядів Тейлора. Розв'язано задачу про точну верхню межу відхилень середніх Чезаро порядку $\alpha \geq 2$, а також середніх Ріса другого порядку рядів Тейлора на класі голоморфних у крузі функцій з обмеженою похідною.

1. Вступ. Нехай f — функція, голоморфна у крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, і

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}_j z^j, \quad \widehat{f}_j := \frac{f^{(j)}(0)}{j!},$$

— її розклад у ряд Тейлора.

Середніми Чезаро (C, α) порядку $\alpha, \alpha > -1$, і степеня $n-1, n \in \mathbb{N}$, функції f називається многочлен

$$\sigma_n^{\alpha}(f)(z) := \frac{1}{A_{n-1}^{\alpha}} \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j-1}^{\alpha} \widehat{f}_j z^j,$$

де

$$A_k^{\alpha} := \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)} = \binom{k+\alpha}{k}$$

і Γ — гамма-функція.

Зокрема, $\sigma_n^0(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k z^k$ — частинні суми ряду Тейлора, а $\sigma_n(f)(z) := \sigma_n^1(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1}(1 - k/n)\widehat{f}_k z^k$ — середні Феєра функції f.

Нехай $A(\overline{\mathbb{D}})$ — диск-алгебра з нормою $\|f\| = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$, тобто банахова алгебра функцій, голоморфних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$.

Якщо функція $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, то при $z \in \mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} \colon |t| = 1\}$ ми можемо розглядати $\sigma_n^{\alpha}(f)$ як (C, α)-середні Чезаро тригонометричного ряду Фур'є $\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k e^{\mathrm{i}x}$ функції $x \mapsto f(e^{\mathrm{i}x})$. Такий підхід дозволяє застосовувати величезний арсенал тверджень, методів і прийомів про (C, α)-підсумовуваність тригонометричних рядів і щодо рядів Тейлора. Наприклад, за теоремою М. Ріса [1] (див. також [2, с. 157]) при $\alpha > 0$ для будь-якої функції $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$

$$\lim_{n \to \infty} \left\| f - \sigma_n^{\alpha}(f) \right\| = 0.$$

Іншими словами, середні Чезаро $\sigma_n^{\alpha}(f)$ при $\alpha > 0$ породжують лінійний метод рівномірного наближення голоморфних функцій з диск-алгебри $A(\overline{\mathbb{D}})$. Апроксимативні властивості σ_n^{α} як в

$A(\overline{\mathbb{D}})$, так і в інших банахових просторах голоморфних функцій, є добре вивченими. Тут ми згадаємо статтю [3], в якій можна знайти бібліографію з питань наближення середніми Чезаро в просторах Гарді $H^p,\ p > 0$.

У даній статті ми зосередимося на питаннях насичення середніх $\sigma_n^\alpha(f)$ як лінійного методу наближення та підсумовуванні рядів Тейлора методом Чезаро в сильному квадратичному сенсі.

Нагадаємо необхідні поняття (див., наприклад, [4, с. 90]).

Якщо для даного $\alpha > -1$ існує додатна, монотонно спадна до нуля функція $\varphi_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ така, що співвідношення $\|f - \sigma_n^\alpha(f)\| = o(\varphi_\alpha(n))$ при $n \to \infty$ імплікує, $f \equiv \mathrm{const}$, і знайдеться хоча б одна функція $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, відмінна від сталої, така, що

$$\big\|f - \sigma_n^\alpha(f)\big\| = O(\varphi_\alpha(n)),\ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

то метод наближення (підсумовування) σ_n^α є насиченим у просторі $A(\overline{\mathbb{D}})$ з порядком насичення φ_α. При цьому клас $\varPhi$ функцій $f \in A(\overline{\mathbb{D}})$, для яких виконується співвідношення (1), називається класом насичення методу σ_n^α.

Із робіт [5 – 7] випливає, що $\varphi_\alpha(n) = \alpha/n$ при $\alpha > 0$, і згідно з контурно-тілесною теоремою Гарді – Літтлвуда (див., наприклад, [8, с. 13])

$$\varPhi = \mathrm{Lip}(\overline{\mathbb{D}}) := \Big\{f \in A(\overline{\mathbb{D}}) : \big|f(z_1) - f(z_2)\big| = O\big(|z_1 - z_2|\big), z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}\Big\}.$$

Запишемо ці факти у зручному для нас вигляді:

$$f \in \mathrm{Lip}(\overline{\mathbb{D}}) \Leftrightarrow \big\|f - \sigma_n^\alpha(f)\big\| = O\left(\frac{\alpha}{n}\right), \qquad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Наша основна мета — конкретизувати сталі і функцію φ_α, які неявно фігурують у рівносильності (2). А саме, ми прагнемо дати конструктивну характеристику класу

$$\mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}}) := \Big\{f \in A(\overline{\mathbb{D}}) : \big|f(z_1) - f(z_2)\big| \le |z_1 - z_2|, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}\Big\}$$

в термінах σ_n^α.

На цьому шляху видається важливим обчислення точного значення величини

$$\mathscr{C}(n, \alpha, z) := \sup\Big\{|f(z) - \sigma_n^\alpha(f)(z)| : f \in \mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})\Big\},$$

де $n \in \mathbb{N},\ \alpha > 0$ і $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Функції, для яких досягається точна верхня межа, будемо називати екстремальними.

Нескладно зрозуміти, що $\mathscr{C}(n, \alpha, z)$, як функція змінної z, залежить лише від $|z|$ і, згідно з принципом максимуму модуля голоморфної функції, для всіх $z \in \mathbb{T}$

$$\mathscr{C}(n, \alpha, z) = \mathscr{C}(n, \alpha, 1) = \sup\Big\{\big\|f - \sigma_n^\alpha(f)\big\| : f \in \mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})\Big\}.$$

Зауважимо також, що клас $\mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})$ збігається з класом B^1, який складається з голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $|f'(z)| \le 1$ при всіх $z \in \mathbb{D}$.

Задача про відшукання явного аналітичного виразу для $\mathscr{C}(n, \alpha, z)$ і відповідних екстремальних функцій належить до кола основних екстремальних задач теорії наближення голоморфних функцій. Її розв'язок є відомим лише в окремих випадках при $\alpha = 1$, тобто у випадку середніх Феєра. Зокрема, в [9] показано, що

$$\mathscr{C}(n,1,z) = \frac{|z|}{n}$$

для кожного натурального n і $z \in \{w\colon |w| \le (3-\sqrt{3})/2\}$, а екстремальними при $z \ne 0$ є лише функції вигляду $f(z) = az + b,\ a, b \in \mathbb{C},\ |a| = 1$.

Стосовно поведінки функції $z \mapsto \mathscr{C}(n,1,z)$ у замкненому кільці $\{z\colon (3-\sqrt{3})/2 \le |z| \le 1\}$ є відомою така оцінка [10]:

$$\frac{|z|}{n} \le \mathscr{C}(n,1,z) \le \frac{2}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

При $z \in \mathbb{T}$ ліва частина цих співвідношень є строгою нерівністю для всіх натуральних $n \ge 2$.

Щодо нерівності в правій частині (3) при $z \in \mathbb{T}$ зазначимо наступне. А. Зигмунд [11] показав, що

$$\mathscr{C}(n,1,1) \le \left(\pi + \frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

а згодом С. Б. Стєчкін [12] уточнив сталу справа в (4), довівши нерівність

$$\mathscr{C}(n,1,1) \le \frac{3n-1}{n(n+1)} < \frac{3}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, стала 2 в (3) є найменшою з відомих нам стала, які мажорують величину $\sup\{n\mathscr{C}(n,1,z)\colon n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$ при $z \in \mathbb{T}$.

У даній роботі ми показуємо, що для будь-якого натурального $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 2$ і $z \in \overline{\mathbb{D}}$ справджується рівність (див. наслідок 2)

$$\mathscr{C}(n,\alpha,z) = \frac{\alpha|z|}{n+\alpha-1}. \tag{5}$$

Нам вдалося знайти просте доведення (5). А саме, ми з’ясували, що обчислення $\mathscr{C}(n,\alpha,z)$ зводиться до обчислення (у частковому випадку) величини

$$\mathscr{H}(\alpha,\lambda,z) := \sup\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k\,(A_k^{\alpha})^2\left|f(z) - \sigma_{k+1}^{\alpha}(f)(z)\right|^2 \,:\, f \in \mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})\right\}, \tag{6}$$

де $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ — числова послідовність, така що

$$\lambda_k \ge 0 \quad \text{і} \quad \lambda_k \ge \lambda_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{7}$$

Знаходження явної формули для $\mathscr{H}(\alpha,\lambda,z)$ і відповідних екстремальних функцій також видається цікавою екстремальною задачою. В такій постановці нам не відомо жодного результату в її розв’язанні.

Збіжність ряду у правій частині (6) характеризує сумовність методом Чезаро у сильному квадратичному сенсі. Подібні конструкції досліджено досить ґрунтовно на різноманітних класах як голоморфних, так і 2π-періодичних функцій. Тут ми згадаємо основоположні роботи [13, 14], що стосуються голоморфних функцій, а також статтю [15], де отримано в певному розумінні остаточні результати щодо 2π-періодичних функцій.

Рівність (5) виявилася також корисною в доведенні рівності (див. теорему 2)

$$\mathscr{R}(n,2,z) := \sup\left\{|f(z) - R_n^2(f)(z)| \colon f \in \mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})\right\} = \frac{2n-1}{n^2}|z|, \quad n \in \mathbb{N},$$

де $R_n^2(f)$ — середні Ріса другого порядку функції f.

Нагадаємо, що середніми Ріса порядку $\delta > 0$ і степеня $n-1$ ряду Тейлора голоморфної функції f називається алгебраїчнний многочлен

$$R_n^\delta(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^\delta \widehat{f}_k z^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

З результатів робіт [5, 6] випливає, що середні Ріса R_n^δ породжують лінійний метод наближення, насичений в $A(\overline{\mathbb{D}})$ з порядком насичення $\varphi(n) = 1/n$ і класом насичення $\Phi = \mathrm{Lip}(\overline{\mathbb{D}})$ при всіх $\delta > 0$.

На завершення зазначимо, що задачі, аналогічні задачам про $\mathscr{C}(n,\alpha,1)$ і $\mathscr{R}(n,2,z)$, на класах диференційовних 2π-періодичних функцій розв'язані іншим методом у [16].

Стаття написана за такою схемою. У п. 2 сформульовано дві теореми. З теореми 1 отримано два наслідки. У п. 3 наведено три леми, серед яких лема 3 не позбавлена й самостійного інтересу. Доведення основних результатів наведено у п. 4, вони спираються на леми з п. 3.

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай $\alpha \geq 2$ і f — функція, голоморфна в $\mathbb{D}$. Тоді рівносильні такі твердження*:

1) *для кожного натурального n, будь-якої числової послідовності λ, яка задовольняє* (7), *і для будь-якого $z \in \mathbb{D}$*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left(A_k^{\alpha-1}\right)^2\left|f(z) - \sigma_{k+1}^{\alpha-1}(f)(z)\right|^2 \leq |z|^2\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\left(A_k^{\alpha-2}\right)^2;$$

2) *для кожного натурального n і будь-якого $z \in \mathbb{D}$*

$$\left|f(z) - \sigma_n^\alpha(f)(z)\right| \leq \frac{\alpha|z|}{n+\alpha-1};$$

3) $f \in \mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})$.

З теореми 1 випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $\alpha \geq 1$, λ — числова послідовність, яка задовольняє* (7), *і $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Якщо*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(A_k^{\alpha-1}\right)^2 < +\infty, \tag{8}$$

то

$$\mathscr{H}(\alpha,\lambda,z) = |z|^2\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\left(A_k^{\alpha-1}\right)^2.$$

Екстремальними є функції вигляду $f_*(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Справді, за умови (8), з імплікації 3) $\Rightarrow$1) в теоремі 1 для будь-якої функції $f \in \mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})$ маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(A_k^{\alpha}\right)^2 \left|f(z) - \sigma_{k+1}^{\alpha}(f)(z)\right|^2 \le |z|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(A_k^{\alpha-1}\right)^2. \tag{9}$$

З іншого боку, для функції f_*

$$f_*(z) - \sigma_{k+1}^{\alpha}(f_*)(z) = az\left(1 - \frac{A_{k-1}^{\alpha}}{A_k^{\alpha}}\right) = az\frac{A_k^{\alpha-1}}{A_k^{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

що доводить рівність у (9) для f_* і твердження в цілому.

Наслідок 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 2$ *і* $z \in \overline{\mathbb{D}}$. *Тоді*

$$\mathscr{C}(n, \alpha, z) = \frac{\alpha|z|}{n + \alpha - 1}.$$

Екстремальними є функції вигляду $f_*(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Це твердження доводиться аналогічно попередньому з урахуванням тотожності

$$1 - \frac{A_{k-1}^{\alpha}}{A_k^{\alpha}} = \frac{\alpha}{k + \alpha}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Наведемо тепер одне застосування наслідку 2 до розв'язання задачі про точну верхню межу похибки наближення середніми Ріса другого порядку R_n^2 на класі $\mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})$.

Справджується така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *і* $z \in \overline{\mathbb{D}}$. *Тоді*

$$\mathscr{R}(n, 2, z) = \frac{2n - 1}{n^2}|z|.$$

Екстремальними є функції вигляду $f_*(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

3. Леми. Доведення основних результатів спирається на такі допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\alpha > -1$, $z \in \mathbb{D}$ *і* f *— функція, голоморфна в* $\mathbb{D}$. *Тоді для будь-якого* $t \in \mathbb{D}$

$$\frac{f(z) - f(zt)}{(1 - t)^{\alpha+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\alpha} \left(f(z) - \sigma_{k+1}^{\alpha}(f)(z)\right) t^k.$$

Ця формула є відомою і неважко доводиться, наприклад, за правилом Коші множення степеневих рядів.

Лема 2. *Нехай* $\beta > 0$, λ *— числова послідовність, яка задовольняє* (7), *і* $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ *— функція, голоморфна в* $\mathbb{D}$. *Якщо*

$$|\Phi(t)| \le \frac{K}{|1 - t|^{\beta}} \quad \forall\, t \in \mathbb{D}, \quad K = \mathrm{const} > 0, \tag{10}$$

то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \left|a_k\right|^2 \le K^2 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \left(A_k^{\beta-1}\right)^2. \tag{11}$$

Це твердження є частковим випадком теореми Голузіна в теорії квазісубординованих голоморфних функцій.

Нагадаємо (див., наприклад, [17, с. 9]), що голоморфна функція Φ є квазісубординованою до голоморфної функції Ψ, якщо $\Phi(t) = \varphi(t)\Psi(\omega(t))$ для всіх $t \in \mathbb{D}$, де φ і ω — функції, голоморфні в $\mathbb{D}$, такі що $\sup\{|\varphi(t)| : t \in \mathbb{D}\} \le 1$, $|\omega(t)| < 1$ при $t \in \mathbb{D}$ і $\omega(0) = 0$.

Доведення. Розглянемо функції $\Psi(t) = K(1-t)^{-\beta}$, $\varphi(t) = K^{-1}(1-t)^{\beta}\Phi(t)$ і $\omega(t) = t$. Оскільки $\Phi(t) = \varphi(t)\Psi(t)$ і, згідно з (10), $|\varphi(t)| \le 1$, то Φ є квазісубординованою до функції Ψ. Тому за теоремою Голузіна [18] (див. також [17, с. 10]) з урахуванням того, що функція Ψ має розклад у ряд Тейлора $\Psi(t) = K\sum_{k=0}^{\infty} A_k^{\beta-1}t^k$, переконуємося в справедливості (11) при всіх натуральних n.

Лема 3. *Нехай B_0 — множина голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $f(0) = 0$ і $\sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\} \le 1$. Тоді*

$$\mathscr{F}(n,z) := \sup\{|\sigma_n(f)(z)| : f \in B_0\} = \frac{n-1}{n}|z| \quad \forall n \ge 2, \quad z \in \overline{\mathbb{D}}. \tag{12}$$

Екстремальними є функції вигляду $f_*(z) = az$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$.

Це твердження доведене в [19], але задля зручності ми його відтворимо тут.

Доведення. Зауважимо, що функція з B_0 має вигляд $f(z) = zg(z)$, де g — функція з класу B, що складається з голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій, для яких $\sup\{|g(z)| : z \in \mathbb{D}\} \le 1$. Тому, поклавши $\lambda_{k,n} = z^k(n-k-1)/n$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, одержимо

$$\sigma_n(f)(z) = z\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_{k,n}\widehat{g}_k.$$

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $z \in (0, 1]$.

Отже,

$$|\sigma_n(f)(z)| \le z\left|\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_{k,n}\widehat{g}_k\right| \quad \forall f \in B_0. \tag{13}$$

З огляду на це рівність (12) стає очевидною при $n = 2$.

Нехай $n = 3$. Тоді, використовуючи відомі нерівності $|\widehat{g}_1| \le 2(1-|\widehat{g}_0|)$ і $|\widehat{g}_0| \le 1$, одержуємо

$$|\sigma_n(f)(z)| \le z\sup\{|\lambda_{0,3}\widehat{g}_0 + \lambda_{1,3}\widehat{g}_1| : g \in B\} \le$$
$$\le z\sup\{\lambda_{0,3}|\widehat{g}_0| + 2\lambda_{1,3}(1-|\widehat{g}_0|) : g \in B\} \le z\lambda_{0,3},$$

до того ж рівності виконуються, якщо $|\widehat{g}_0| = 1$ і $\widehat{g}_1 = 0$, тобто $f(z) = az$, $|a| = 1$.

Нарешті, нехай $n \ge 4$. Тоді безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що для всіх $k = 0, 1, \ldots, n-4$

$$\lambda_{k,n} - 2\lambda_{k+1,n} + \lambda_{k+2,n} = \frac{z^k}{n}(1-z)\big((n-k-1)(1-z) + 2z\big) \ge 0$$

і

$$\lambda_{n-3,n} - 2\lambda_{n-2,n} = \frac{2z^{n-3}}{n}(1-z) \ge 0.$$

Отже, виконуються всі умови теореми Рогозинського – Сегьо [20] (див. також [21, с. 324]), за якою

$$\max\left\{\left|\sum_{k=0}^{n-2}\lambda_{k,n}\widehat{g}_k\right| : g\in B\right\}=\lambda_{0,n},$$

а максимум досягається лише для функцій $g(z)=a,\ |a|=1$.

Ця рівність разом із (13) і доводять лему 3 при $n\geq 4$.

4. Доведення основних результатів. ***Доведення теореми*** **1.** 1) $\Rightarrow$2). Насамперед нагадаємо дві відомі формули:

$$\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{\alpha-1}=A_{n-1}^{\alpha}, \tag{14}$$

$$f(z)-\sigma_n^{\alpha}(f)(z)=\frac{1}{A_{n-1}^{\alpha}}\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{\alpha-1}\left(f(z)-\sigma_{k+1}^{\alpha-1}(f)(z)\right). \tag{15}$$

Візьмемо послідовність $\lambda=\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, в якій $\lambda_k=1/A_k^{\alpha-2}$. Неважко переконатися, що умова (7) виконується тоді й лише тоді, коли $\alpha\geq 2$.

У цьому випадку, відштовхуючись від формули (15), за нерівністю Коші – Буняковського – Шварца з урахуванням (14) одержуємо

$$|f(z)-\sigma_n^{\alpha}(f)(z)|\leq\frac{1}{A_{n-1}^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{\alpha-2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(A_k^{\alpha-1}\right)^2}{A_k^{\alpha-2}}|f(z)-\sigma_{k+1}^{\alpha-1}(f)(z)|^2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{|z|}{A_{n-1}^{\alpha}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{\alpha-2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{\alpha-2}\right)^{1/2}=|z|\frac{A_{n-1}^{\alpha-1}}{A_{n-1}^{\alpha}}=\frac{\alpha|z|}{n+\alpha-1}.$$

2) $\Rightarrow$3). Зафіксуємо $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$, і нехай $t\in[0,1)$. Тоді, згідно з лемою 1, маємо

$$\frac{\left|f(z)-f(zt)\right|}{(1-t)^{\alpha+1}}\leq\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\alpha}\left|f(z)-\sigma_{k+1}^{\alpha}(f)(z)\right|t^k\leq|z|\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\alpha}\frac{\alpha}{k+\alpha}t^k=$$

$$=|z|\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{\alpha-1}t^k=\frac{|z|}{(1-t)^{\alpha}}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\left|\frac{f(z)-f(zt)}{z-zt}\right|\leq 1.$$

Спрямувавши t до $1-$, одержимо $|f'(z)|\leq 1$. Оскільки z — довільне, то $\sup\left\{|f'(z)| : z\in\mathbb{D}\right\}\leq$ ≤ 1, що рівносильно включенню $f\in\mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})$.

3) $\Rightarrow$1). Зафіксуємо довільне $z\in\mathbb{D}$ і розглянемо голоморфну функцію

$$\Phi(t)=\frac{f(z)-f(zt)}{(1-t)^{\alpha}},\quad t\in\mathbb{D}.$$

Зрозуміло, що

$$|\Phi(t)| \leq \frac{|z|}{|1-t|^{\alpha-1}} \quad \forall\, t \in \mathbb{D}.$$

Тому твердження 1 випливає з твердження 3 згідно з лемами 1 і 2.

***Доведення теореми* 2.** Оскільки

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^2 = \left(1-\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{k}{n+1}\right) - \frac{k}{n(n+1)}\left(1-\frac{k}{n}\right),$$

то для будь-якої голоморфної функції f

$$f(z) - R_n^2(f)(z) = f(z) - \sigma_n^2(f)(z) + \frac{1}{n(n+1)}\sigma_n\left(Df\right)(z),$$

де $Df(z) := zf'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\widehat{f}_k z^k$.

Оскільки $f \in \mathrm{Lip}_1(\overline{\mathbb{D}})$ тоді й лише тоді, коли $Df \in B_0$, то, ґрунтуючись на останній формулі, за наслідком 2 і лемою 3 одержуємо

$$\mathscr{R}(n,2,z) \leq \mathscr{C}(n,2,z) + \frac{1}{n(n+1)}\mathscr{F}(n,z) =$$

$$= \frac{2|z|}{n+1} + \frac{(n-1)|z|}{n^2(n+1)} = \frac{2n-1}{n^2}|z|.$$

З іншого боку, для функції $f_*(z) = az + b$ маємо

$$f(z) - R_n^2(f)(z) = az - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 az = \frac{2n-1}{n^2}az.$$

Теорему доведено.

Література

1. M. Riesz, *Sur la sommation des séries de Fourier*, Acta Sci. Math., **1**, 104 – 113 (1923).
2. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды: в 2-х т., т. 1*, Мир, Москва (1965).
3. Э. А. Стороженко, *Приближение функций класса H^p, $0 < p \leq 1$*, Мат. сб., **105**, № 4, 601 – 621 (1978).
4. А. И. Степанец, *Методы теории приближений: в 2-х ч., ч. 1*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (2002).
5. G.-I. Sunouchi, C. Watari, *On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions. II*, Tôhoku Math. J., II. Ser., **11**, 480 – 488 (1959).
6. А. Х. Турецкий, *О классах насыщения в пространстве C*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **25**, № 3, 411 – 442 (1961).
7. H. Berens, *On the saturation theorem for the Cesàro means of Fourier series*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **21**, 95 – 99 (1970).
8. П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения*, Наук. думка, Киев (1975).
9. В. В. Савчук, С. О. Чайченко, М. В. Савчук, *Наближення обмежених голоморфних і гармонічних функцій середніми Фейєра*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 516 – 542 (2019).
10. В. В. Савчук, *Приближения средними Фейера функций класса Дирихле*, Мат. заметки, **81**, № 5, 744 – 750 (2007).
11. A. Zygmund, *On the degree of approximation of functions by Fejer means*, Bull. Amer. Math. Soc., **51**, 274 – 278 (1945).
12. С. Б. Стечкин, *Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **17**, № 5, 462 – 472 (1953).
13. H. C. Chow, *Theorems on power series and Fourier series*, Proc. London Math. Soc., **1**, 206 – 216 (1951).

14. G.–I. Sunouchi, *On the strong summability of power series and Fourier series*, Tôhoku Math. J., II. Ser., **6**, 220 – 225 (1954).
15. V. Totik, *On the strong approximation by the* (C,α)*-means of Fourier series. I*, Anal. Math., **6**, 57 – 85 (1980).
16. В. П. Заставный, *Точная оценка приближения некоторых классов дифференцируемых функций сверточными операторами*, Укр. мат. вісн., **7**, № 3, 409 – 433 (2010).
17. F. G. Avkhadiev, K.-J. Wirths, *Schwarz – Pick type inequalities*, Birkhäuser-Verlag, Basel (2008).
18. Г. М. Голузин, *О мажорации подчиненных аналитических функций.I*, Мат. сб., **29 (71)**, № 1, 209 – 224 (1951).
19. В. В. Савчук, М. В. Савчук, *Оцінки сум Фейєра для голоморфних функцій класу Блоха*, Зб. праць Ін–ту математики НАН України, **7**, № 1, 264 – 273 (2010).
20. W. Rogosinski, G. Szegö, *Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben*, Math. Z., **28**, 73 – 94 (1928).
21. G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros*, World Sci. Publ. Co. Inc., Singapore etc. (1994).

Одержано 02.02.22