DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7136

УДК 517.5

А. С. Сердюк, І. В. Соколенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ СУМАМИ ФУР'Є НА КЛАСАХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ У СЕНСІ ВЕЙЛЯ – НАДЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ВИСОКИМ ПОКАЗНИКОМ ГЛАДКОСТІ *

We establish asymptotic estimates for the least upper bound of approximations in the uniform metric by Fourier sums of order $n-1$ in classes of 2π-periodic Weyl – Nagy differentiable functions $W^r_{\beta,p}$, $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, with high exponents of smoothness r $(r-1 \ge \sqrt{n})$. We also obtain similar estimates for functional classes $W^r_{\beta,1}$ in metrics of the spaces $L_p, 1 \le p \le \infty$.

Встановлено асимптотичні оцінки точних верхніх меж відхилень у рівномірній метриці частинних сум Фур'є порядку $n-1$ на класах 2π-періодичних функцій, диференційовних у сенсі Вейля – Надя, $W^r_{\beta,p}, 1 \le p \le \infty, \beta \in \mathbb{R}$, при високих показниках гладкості r $(r-1 \ge \sqrt{n})$. Аналогічні оцінки встановлено і в метриках просторів $L_p, 1 \le$ $\le p \le \infty$, для функціональних класів $W^r_{\beta,1}$.

1. Вступ. Нехай L_p, $1 \le p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних в p-му степені на $[-\pi, \pi)$ функцій φ зі стандартною нормою

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p};$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних та істотно обмежених функцій φ, в якому норму задано рівністю

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |\varphi(t)|;$$

C — простір 2π-періодичних неперервних функцій φ з нормою

$$\|\varphi\|_C = \max_t |\varphi(t)|.$$

Нехай, далі, $W^r_{\beta,p}, r > 0, \beta \in \mathbb{R}, 1 \le p \le \infty,$ — класи 2π-періодичних функцій f, що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (\varphi * B_{r,\beta})(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

з ядрами Вейля – Надя $B_{r,\beta}(\cdot)$ вигляду

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

функцій φ, що задовольняють умову $\varphi \in B^0_p$, де

* Виконано за часткової фінансової підтримки за проєктом „Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні" (№ держ. реєстрації 0122U000670) в рамках програми „Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України на 2022 – 2023 рр.".

$$B_p^0 := \left\{ \varphi \in L_p \colon \|\varphi\|_p \le 1, \ \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0 \right\}. \tag{3}$$

Класи $W^r_{\beta,p}$ називають класами Вейля – Надя (див., наприклад, [1 – 4]), а функцію φ в зображенні (1) — (r,β)-похідною в сенсі Вейля – Надя функції f і позначають через f^r_β.

При всіх $1 < p, s < \infty$, $r > \left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{s}\right)_+ = \begin{cases} \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{s}, & p < s, \\ 0, & p \ge s, \end{cases}$ і $\beta \in \mathbb{R}$ має місце вкладення $W^r_{\beta,p} \subset L_s$ (див., наприклад, [1], гл. V. 4, [2], гл. VI. 6). Окрім того, при довільних $1 \le p \le \le \infty, r > \dfrac{1}{p}$, $\beta \in \mathbb{R}$ виконуються вкладення $W^r_{\beta,p} \subset C$ (див., наприклад, [5]).

Якщо $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$, то функції вигляду (2) є відомими ядрами Бернуллі, а відповідні класи $W^r_{\beta,p}$ збігаються з відомими класами W^r_p 2π-періодичних функцій f, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і такі, що $\|f^{(r)}\|_p \le 1$. При цьому майже скрізь виконується рівність $f^{(r)}(\cdot) = f^r_\beta(\cdot)$.

Для довільної множини $\mathfrak{N} \subset X$, де $X = C$ або L_s, $1 \le s \le \infty$, розглянемо величину

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N})_X := \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot)\|_X, \tag{4}$$

в якій $S_{n-1}(f;\cdot)$ — частинна сума Фур'є порядку $n-1$ функції f.

При $X = C$ для точних верхніх меж вигляду (4) на класах Вейля – Надя $W^r_{\beta,\infty}$ має місце асимптотична при $n \to \infty$ рівність

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_C = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

При $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$ цю оцінку довів А. М. Колмогоров [6], при дробових $r > 0$ і деяких співвідношеннях між r і β — В. Т. Пінкевич [7] та С. М. Нікольський [8]. У загальному випадку оцінка (5) випливає із результатів А. В. Єфімова [9] та С. О. Теляковського [10].

Зазначимо також, що аналогічна (5) асимптотична рівність має місце і для класів $W^r_{\beta,1}$ у метриці простору L_1, а саме,

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_1} = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R} \tag{6}$$

(див. [11, 12]).

У вказаних роботах параметри r і β класів Вейля – Надя вважалися фіксованими і питання про залежність залишкового члена в оцінці (5) (чи (6)) не розглядалося. Характер залежності від r і β залишкового члена в асимптотичній оцінці (5) вивчали в роботах [13 – 19].

У роботі [19] досліджено асимптотичну поведінку величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_C$ при $n \to \infty$ і $r \to \infty$. А саме, було доведено, що при довільних $r \ge 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_C = \frac{1}{n^r}\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-r/n}) + O(1)\frac{1}{r}\right), \tag{7}$$

в якій

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}} \tag{8}$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по r, n і β.

Крім того, С. Б. Стєчкін показав [19] (теорема 4), що для великих r залишковий член у рівності (7) можна покращити. А саме, при довільних $r \geq n+1$ і $\beta \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,\infty})_C = \frac{1}{n^r}\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}\right), \tag{9}$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по r, n і β. Формула (9) є асимптотичною рівністю, якщо $r/n \to \infty$.

З [19] також випливає, що для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_1}$ мають місце аналогічні (7) і (9) оцінки, а саме, при $r \geq 1$ і $\beta \in \mathbb{R}$ рівномірно щодо всіх розглядуваних параметрів справджується формула

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_1} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{8}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-r/n}) + O(1)\frac{1}{r}\right), \tag{10}$$

а при $r \geq n+1$ і $\beta \in \mathbb{R}$ рівномірно за всіма параметрами — оцінка

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_1} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r}\right). \tag{11}$$

Згодом С. О. Теляковський [17, 18] показав, що другий доданок у формулах (9), (11) можна замінити меншим, а саме, замість $O(1)(1+1/n)^{-r}$ писати $O(1)(1+2/n)^{-r}$. Він же уточнив оцінки (9), (11) за рахунок виділення наступних членів асимптотики.

У роботі авторів [20], зокрема, при довільних $1 \leq p \leq \infty$ встановлено узагальнюючі аналоги оцінок С. Б. Стєчкіна (9), (11). А саме, було розглянуто більш загальні, ніж $W^r_{\beta,p}$, класи функцій $W^r_{\bar{\beta},p}$, які задаються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\bar{\beta}}(t)\,dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{12}$$

з ядрами

$$B_{r,\bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right), \tag{13}$$

що визначаються параметром $r > 0$ і довільною числовою послідовністю $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ фазових зсувів $\beta_k \in \mathbb{R}$.

Зрозуміло, що у випадку, коли $\beta_k = \beta$ при всіх $k \in \mathbb{N}$, класи $W^r_{\bar{\beta},p}$ перетворюються у класи Вейля – Надя $W^r_{\beta,p}$.

У роботі [20] для величин (4) при $\mathfrak{N} = W^r_{\bar{\beta},p}$ і $X = C$ або $\mathfrak{N} = W^r_{\bar{\beta},1}$ і $X = L_p$ було доведено, що при всіх $r \geq n+1$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ і $1 \leq p \leq \infty$ виконуються оцінки

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},p})_C = \frac{1}{n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} + O(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-r}\right), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{14}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},1})_{L_p} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_{p}}{\pi} + O(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-r}\right), \tag{15}$$

в яких $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені щодо всіх розглядуваних параметрів. Оцінки (14), (15) є асимптотичними рівностями, якщо $r/n \to \infty$. І навіть більше, як доведено в [21] (теорема 5), за умови $r/n \to \infty$ величини $\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},p})_C$ асимптотично збігаються з найкращими рівномірними наближеннями класів $W^r_{\bar{\beta},p}$ тригонометричними поліномами порядку $n-1$.

У роботі авторів [22] встановлено інтерполяційні аналоги асимптотичних оцінок (14), (15), в яких замість норм відхилень частинних сум Фур'є розглядаються норми відхилень інтерполяційних тригонометричних поліномів Лагранжа з рівномірним розподілом вузлів.

У даній роботі досліджується асимптотична поведінка величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},p})_C$ і $\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},1})_{L_p}$, $1 \leq p \leq \infty$, у випадку, коли гладкісний та апроксимативний параметри r і n пов'язані співвідношенням

$$\sqrt{n}+1 \leq r \leq n^2. \tag{16}$$

При $p=\infty$ асимптотична поведінка для зазначених величин є відомою й описується формулами (7), (10).

При $p=2$ відомими є точні значення величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},p})_C$ та $\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},1})_{L_p}$ при довільних $r > \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ і $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},2})_C = \mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},1})_{L_2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi\Gamma(2r)}}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{2r-1}e^{-nt}}{1-e^{-t}}dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

(див., наприклад, [20, 23, 24]).

При всіх інших значеннях параметра p $\Big($тобто при $1 \leq p < 2$ або $2 < p < \infty$ і $\frac{r}{n} \nrightarrow \infty\Big)$ асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},p})_C$ і $\mathcal{E}_n(W^r_{\bar{\beta},1})_{L_p}$ за умови (16) залишались невідомими.

У даній роботі зазначені рівності будуть знайдені за рахунок використання методології, яка дозволяє звести задачу про сильну асимптотику величин вигляду (4) при $X = C$ або L_p на класах Вейля – Надя до аналогічних величин на класах інтегралів Пуассона; для останніх асимптотичні рівності відомі завдяки роботам [25, 26].

Позначимо через $C^q_{\beta,p}$, $q \in (0,1), \beta \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty$, класи інтегралів Пуассона періодичних функцій із множин B^0_p вигляду (3), тобто класи 2π-періодичних функцій f, що зображуються згортками

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)P_{q,\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad \varphi \in B^0_p, \tag{18}$$

з ядрами Пуассона $P_{q,\beta}(t)$ вигляду

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

2. Наближення функцій із класів $W^r_{\beta,p}$ сумами Фур'є в рівномірній метриці.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r > 1$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді за умови*

$$\sqrt{n} + 1 \le r \le n + 1 \tag{20}$$

при $p = 1$ *має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C = n^{-r}\left(\frac{1}{\pi(1 - e^{-r/n})} + O(1)nr^{-2}\right), \tag{21}$$

а при $1 < p \le \infty$ — *формула*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = n^{-r}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'}{2}, \frac{p'}{2}; 1; e^{-2r/n}\right) + O(1)nr^{-2}\right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{22}$$

де $F(a, b; c; z)$ — *гіпергеометрична функція Гаусса*

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (x)_k := x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1). \tag{23}$$

В (21) *і* (22) $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені щодо всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Будемо використовувати запропонований С. Б. Стєчкіним у [19] метод доведення, який полягає в тому, що залишок ряду Фур'є ядра Вейля – Надя $B_{r,\beta}$ вигляду (2) апроксимується в $L_{p'}$-метриці залишком ряду Фур'є ядра Пуассона $P_{q,\beta}$ вигляду (19) при $q = e^{-r/n}$. С. Б. Стєчкін [19] реалізував зазначений підхід при $p' = 1$. Ми ж розглядаємо загальний випадок $1 \le p' \le \infty$.

Покладемо

$$B_{r,\beta,n}(t) := \sum_{k=n}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right). \tag{24}$$

Із рівностей (1), (2) і (4) отримуємо

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in B^0_p} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) \sum_{k=n}^{\infty} k^{-r} \cos\left(nt - \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in B^0_p} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta,n}(t) dt. \tag{25}$$

Поклавши $q = e^{-r/n}$, запишемо $B_{r,\beta,n}(t)$ у вигляді

$$B_{r,\beta,n}(t) = \left(\frac{e}{n}\right)^r P_{q,\beta,n}(t) + R_n(r;\beta)(t), \tag{26}$$

де

$$P_{q,\beta,n}(t) := \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{27}$$

$$R_n(r;\beta)(t) := B_{r,\beta,n}(t) - \left(\frac{e}{n}\right)^r P_{q,\beta,n}(t). \tag{28}$$

Тоді з (25) одержимо

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = \left(\frac{e}{n}\right)^r \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C + O(1)R_n(r;\beta;p)_C, \tag{29}$$

де

$$R_n(r;\beta;p)_C := \sup_{\varphi\in B^0_p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)R_n(r;\beta)(t)dt. \tag{30}$$

Як випливає з теореми 1 [25] і формули (25) [27], при довільних $1\le p\le\infty$ для величин $\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C$, $0<q<1$, $\beta\in\mathbb{R}$, мають місце рівності

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_C = q^n\left(\frac{1}{\pi(1-q)} + O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right), \quad p=1, \tag{31}$$

і

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,p})_C = q^n\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;q^2\right) + O(1)\frac{\xi(p)q}{n(1-q)^{s(p)}}\right),\\ 1<p\le\infty, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\end{gathered} \tag{32}$$

де

$$s(p) = \begin{cases}1, & p=\infty,\\ 2, & p\in[1,\infty),\end{cases} \qquad \xi(p) = \begin{cases}0, & p=2,\\ 1, & p\in[1,2)\cup(2,\infty],\end{cases} \tag{33}$$

а величини $O(1)$ рівномірно обмежені щодо n, p, q і β.

Для залишкових членів зі співвідношень (31), (32) при $q=e^{-r/n}$ за умови $\sqrt{n}+1\le r\le \le n+1$, з урахуванням нерівностей

$$e^{-x} \le \frac{1}{1+x}, \quad x>0, \tag{34}$$

$$\frac{1}{1-e^{-x}} \le \frac{1+x}{x}, \quad x>0, \tag{35}$$

отримуємо такі оцінки:

$$\frac{q}{n(1-q)^{s(p)}} \le \frac{e^{-r/n}}{n(1-e^{-r/n})^2} \le \frac{1}{n(1+r/n)}\left(\frac{1+r/n}{r/n}\right)^2 = \frac{n+r}{r^2} \le \frac{2n+1}{r^2} = O(1)nr^{-2}. \tag{36}$$

Встановимо оцінку зверху залишку $R_n(r;\beta;p)_C$ зі співвідношення (29). Покажемо, що за умови (20) для залишку $R_n(r;\beta;p)_C$, означеного рівністю (30), при всіх $1\le p\le\infty$ справджується рівномірна щодо всіх розглядуваних параметрів оцінка

$$R_n(r;\beta;p)_C = O(1)n^{-r+1}r^{-2}, \quad 1\le p\le\infty, \quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{37}$$

Застосовуючи нерівність Гельдера до правої частини (30) і враховуючи, що $q = e^{-r/n}$, маємо

$$R_n(r;\beta;p)_C \le \left\| B_{r,\beta,n}(t) - \left(\frac{e}{n}\right)^r P_{q,\beta,n}(t) \right\|_{p'} =$$

$$= n^{-r} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \left(\left(\frac{n}{k}\right)^r - q^{k-n} \right) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{p'} =$$

$$= n^{-r} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-r} - e^{-rk/n} \right) \cos\left((k+n)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right\|_{p'} \le (2\pi)^{1/p'} n^{-r} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right), \quad (38)$$

де

$$\varphi(x) := (1+x)^{-r} - e^{-rx}. \quad (39)$$

Для оцінки зверху величини $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ нам знадобиться твердження, доведення якого наведемо після доведення теореми 1.

Лема 1. *Нехай* $r > 1, n \in \mathbb{N}$ *і виконується умова* (20). *Тоді мають місце нерівності*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) < (54e^{-1} + 16 - 8\sqrt{2})\, nr^{-2} < 24,5518\, nr^{-2}. \quad (40)$$

Оцінка (37) у випадку виконання умови (20) є наслідком формул (38), (40). Тоді, об'єднуючи співвідношення (29), (31), (32) і (36), отримуємо оцінки (21), (22).

Теорему 1 доведено.

***Доведення леми* 1.** Покладемо $m = \left[\frac{n}{\sqrt{r}}\right]$, де $[x]$ — ціла частина дійсного числа x. Зрозуміло, що

$$m \le \frac{n}{\sqrt{r}} < m + 1. \quad (41)$$

Зазначимо, що (див. [19, с. 145])

$$0 \le \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \le e^{-\frac{rk}{n}} \left(e^{\frac{rk^2}{n(n+k)}} - 1 \right) = \left(e^{-\frac{r}{n}}\right)^k \left(e^{\frac{rk^2}{n(n+k)}} - 1 \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (42)$$

Крім того, згідно з теоремою Лагранжа, при $1 \le k \le m$

$$e^{\frac{rk^2}{n(n+k)}} - 1 \le e^{\frac{rm^2}{n(n+1)}} \frac{rk^2}{n(n+k)} < e^{\frac{rm^2}{n^2}} \frac{rk^2}{n^2}. \quad (43)$$

Згідно з (20), $rm^2/n^2 \le 1$ і, отже,

$$e^{\frac{rm^2}{n^2}} \le e. \quad (44)$$

Об'єднуючи оцінки (42) – (44) і враховуючи, що при довільних $0 < q < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k k^2 = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}, \quad (45)$$

одержуємо

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \le \left(\sum_{k=1}^{m}\left(e^{-\frac{r}{n}}\right)^k k^2\right)\frac{er}{n^2} < \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\frac{r}{n}}\right)^k k^2\right)\frac{er}{n^2} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{r}{n}}\left(1+e^{-\frac{r}{n}}\right)}{\left(1-e^{-\frac{r}{n}}\right)^3}\frac{er}{n^2} < \frac{2e^{-\frac{r}{n}}}{\left(1-e^{-\frac{r}{n}}\right)^3}\frac{er}{n^2}. \tag{46}$$

Оскільки, як неважко переконатись, функція $e^{-x}(1+x)^3$ набуває найбільшого значення на $(0,+\infty)$ в точці $x_0=2$, тобто $\max\limits_{x>0} e^{-x}(1+x)^3 = \dfrac{27}{e^2}$, то

$$e^{-x} \le \frac{27}{e^2(1+x)^3}, \quad x>0. \tag{47}$$

Використовуючи нерівності (35), (47), маємо

$$\frac{e^{-\frac{r}{n}}}{\left(1-e^{-\frac{r}{n}}\right)^3} \le \frac{27}{e^2\left(1+\frac{r}{n}\right)^3}\frac{\left(1+\frac{r}{n}\right)^3}{\left(\frac{r}{n}\right)^3} = \frac{27}{e^2}\frac{n^3}{r^3}. \tag{48}$$

Із (46), (48) випливає нерівність

$$\sum_{k=1}^{m}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{54}{e}nr^{-2}. \tag{49}$$

Далі знайдемо оцінку зверху величини $\sum_{k=m+1}^{\infty}\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right)$. На підставі очевидної нерівності

$$\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \left(1+\frac{k}{n}\right)^{-r} \tag{50}$$

і нерівності (41) маємо

$$\varphi\left(\frac{m+1}{n}\right) < \left(1+\frac{m+1}{n}\right)^{-r} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r} \tag{51}$$

і

$$\sum_{k=m+2}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \sum_{k=m+2}^{\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{-r} < \int\limits_{m+1}^{\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-r}dt = n\int\limits_{\frac{m+1}{n}}^{\infty}(1+x)^{-r}\,dx =$$

$$= \frac{n}{r-1}\left(1+\frac{m+1}{n}\right)^{-r+1} < \frac{n}{r-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r+1}. \tag{52}$$

Функція $\dfrac{r^2}{r-1}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r+1}$ спадає на проміжку $[2,+\infty)$, тому

$$\max_{r\ge 2}\frac{r^2}{r-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r+1} = 8-4\sqrt{2}. \tag{53}$$

Із (51), (53) отримуємо

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)<\left(\frac{\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}+\frac{n}{r-1}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r+1}=\frac{r+n-\sqrt{r}}{r-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r+1}<$$

$$<\frac{2n+1-\sqrt{r}}{r-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r+1}<\frac{2n}{r^2}\frac{r^2}{r-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{-r+1}\leq(16-8\sqrt{2})\,nr^{-2}. \tag{54}$$

Об'єднуючи оцінки (49) і (54), одержуємо нерівності (40).

Лему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* $1\leq p\leq\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $r>1$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді за умови*

$$n+1\leq r\leq n^2 \tag{55}$$

при $p=1$ *має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C=n^{-r}\left(\frac{1}{\pi(1-e^{-r/n})}+O(1)rn^{-2}e^{-r/n}\right), \tag{56}$$

а при $1<p\leq\infty$ — *формула*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C=n^{-r}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;e^{-2r/n}\right)+O(1)rn^{-2}e^{-r/n}\right),\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{57}$$

де $F(a,b;c;z)$ — *гіпергеометрична функція Гаусса вигляду* (23). *В* (56) *і* (57) $O(1)$ — *величини, рівномірно обмежені щодо всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення будемо проводити за схемою доведення теореми 1. Базуючись на співвідношенні (29) і використовуючи рівності (31), (32), неважко помітити, що асимптотичні формули (56) і (57) будуть встановлені, якщо за виконання умови (55) ми доведемо істинність таких рівномірних за всіма параметрами оцінок:

$$\frac{1}{(1-q)^2}=O(1),\quad \text{де}\quad q=e^{-r/n}, \tag{58}$$

і

$$R_n(r;\beta;p)_C=O(1)rn^{-r-2}e^{-r/n},\quad 1\leq p\leq\infty,\quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{59}$$

Щоб переконатись у справедливості (58), достатньо скористатись нерівністю (35) при $x=\dfrac{r}{n}$ і співвідношенням (55), згідно з якими

$$\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{(1-e^{-r/n})^2}\leq\left(\frac{1+r/n}{r/n}\right)^2=\left(\frac{r+n}{r}\right)^2\leq\frac{2r-1}{r}<2.$$

Для оцінювання залишку $R_n(r;\beta;p)_C$ використаємо ланцюжок співвідношень (38), згідно з якими

$$R_n(r;\beta;p)_C=O(1)\,n^{-r}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right). \tag{60}$$

Як випливає з доведення теореми 3 роботи [19, с. 147], при $n \in \mathbb{N}$ і $n+1 \le r \le n^2$ рівномірно щодо всіх розглядуваних параметрів справджується оцінка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = O(1) r n^{-2} e^{-r/n}. \tag{61}$$

Оцінка (59) випливає безпосередньо із формул (60), (61).

Теорему 2 доведено.

3. Наближення функцій із класів $W^r_{\beta,1}$ сумами Фур'є в інтегральних метриках.

Теорема 3. *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r > 1$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді за умови* $\sqrt{n} + 1 \le r \le n+1$ *при* $1 \le p < \infty$ *має місце формула*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = n^{-r}\left(\frac{\|\cos t\|_p}{\pi} F^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}; 1; e^{-2r/n}\right) + O(1) n r^{-2}\right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{62}$$

а при $p = \infty$ *— формула*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_\infty} = n^{-r}\left(\frac{1}{\pi(1 - e^{-r/n})} + O(1) n r^{-2}\right), \tag{63}$$

де $F(a, b; c; z)$ *— гіпергеометрична функція Гаусса вигляду* (23), *а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені щодо всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, запишемо величину $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_p}, r > 1, 1 \le p \le$ $\le \infty, \beta \in \mathbb{R}$, у вигляді

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = \left(\frac{e}{n}\right)^r \mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_{L_p} + O(1) R_n(r; \beta; 1)_{L_p}, \tag{64}$$

де

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_{L_p} = \frac{1}{\pi} \sup_{\varphi \in B^0_1} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) P_{q,\beta,n}(t) dt \right\|_p, \quad q = e^{-r/n}, \tag{65}$$

$$R_n(r; \beta; 1)_{L_p} := \sup_{\varphi \in B^0_1} \left\| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) R_n(r; \beta)(t) dt \right\|_p, \tag{66}$$

а $R_n(r; \beta)(t)$ означено рівністю (28).

Як випливає з теореми 1 роботи [26] та формули (25) роботи [27], при довільних $1 \le p \le \infty$ для величин $\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_{L_p}$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, справджуються асимптотичні рівності

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_{L_p} =$$

$$= \begin{cases} q^n \left(\dfrac{\|\cos t\|_p}{\pi} F^{\frac{1}{p}}\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}; 1; q^2\right) + O(1) \dfrac{q}{n(1-q)^{s(p')}}\right), & 1 \le p < \infty, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \\ q^n \left(\dfrac{1}{\pi(1-q)} + O(1) \dfrac{q}{n(1-q)^2}\right), & p = \infty, \end{cases} \tag{67}$$

в яких $s(\cdot)$ означено співвідношенням (33), а $O(1)$ — величини, що рівномірно обмежені щодо всіх розглядуваних параметрів.

В роботі [24, с. 250] було доведено, що для величин $\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_{L_p}$ при $p=2$ виконується рівність

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_{L_2} = \frac{q^n}{\sqrt{\pi(1-q^2)}}, \quad 0<q<1, \quad \beta\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{68}$$

Рівність (68) уточнює асимптотичну рівність (67) при $p=2$ в тому сенсі, що зазначена рівність (67) при $s=2$ залишається правильною, якщо в ній обнулити залишковий член.

Отже, беручи до уваги формули (67), (68) та очевидну рівність $F(1,1;1;q^2) = \dfrac{1}{1-q^2}$, $q\in(0,1)$, для всіх $0<q<1$, $\beta\in\mathbb{R}$ і $1\le p\le\infty$ можемо записати

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,1})_{L_p} =$$

$$= \begin{cases} q^n\left(\dfrac{\|\cos t\|_p}{\pi}F^{\frac{1}{p}}\left(\dfrac{p}{2},\dfrac{p}{2};1;q^2\right) + O(1)\dfrac{\xi(p)q}{n(1-q)^{s(p')}}\right), & 1\le p<\infty, \quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1, \\ q^n\left(\dfrac{1}{\pi(1-q)} + O(1)\dfrac{q}{n(1-q)^2}\right), & p=\infty, \end{cases} \tag{69}$$

де $\xi(\cdot)$ і $s(\cdot)$ означено формулами (33), а $O(1)$ — величини, що рівномірно обмежені щодо всіх розглядуваних параметрів.

Застосовуючи до правої частини (66) твердження 1.5.5 із роботи [28, с. 43], згідно з яким для L_p-норми згортки $(\varphi * K)(\cdot) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cdot - t)K(t)dt$, де $\varphi\in L_1, K\in L_p, 1\le p\le\infty$,

$$\|\varphi * K\|_p \le \frac{1}{\pi}\|\varphi\|_1\|K\|_p, \tag{70}$$

і враховуючи оцінку (40), для залишку $R_n(r;\beta;1)_{L_p}$ при $1\le p\le\infty, \beta\in\mathbb{R}$ і виконанні умови (20) одержуємо

$$R_n(r;\beta;1)_{L_p} \le \|R_n(r;\beta)(t)\|_p \le (2\pi)^{1/p}n^{-r}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = O(1)n^{1-r}r^{-2}. \tag{71}$$

Із (36), (64), (69) і (71) отримуємо рівності (62), (63).

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Нехай* $1\le p\le\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $r>1$ *і* $n\in\mathbb{N}$. *Тоді за умови* $n+1\le r\le n^2$ *при* $1\le p<\infty$ *має місце рівність*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = n^{-r}\left(\frac{\|\cos t\|_p}{\pi}F^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{2},\frac{p}{2};1;e^{-2r/n}\right) + O(1)rn^{-2}e^{-r/n}\right), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{72}$$

а при $p=\infty$ *— рівність*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_\infty} = n^{-r}\left(\frac{1}{\pi(1-e^{-r/n})} + O(1)rn^{-2}e^{-r/n}\right), \tag{73}$$

де $F(a,b;c;z)$ *— гіпергеометрична функція Гаусса вигляду* (23), *а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені щодо всіх розглядуваних параметрів.*

Доведення. За умови $n+1 \le r \le n^2$, згідно з (61), (66) і (70),

$$R_n(r;\beta;1)_{L_p} = \|R_n(r;\beta)(t)\|_p \le (2\pi)^{1/p} n^{-r} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = O(1) r n^{-r-2} e^{-r/n}. \tag{74}$$

Об'єднуючи співвідношення (64), (69) і (74), для величин $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_p}$ за умови (55) отримуємо рівності

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = \begin{cases} n^{-r}\left(\dfrac{\|\cos t\|_p}{\pi} F^{\frac{1}{p}}\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{p}{2}; 1; e^{-2r/n}\right) + O(1) r n^{-2} e^{-r/n}\right), & 1 \le p < \infty, \\ n^{-r}\left(\dfrac{1}{\pi(1-e^{-r/n})} + O(1) r n^{-2} e^{-r/n}\right), & p = \infty. \end{cases}$$

Теорему 4 доведено.

Зрозуміло, що у формулах (63), (73) величини $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_\infty}$ можна замінити на $\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C$ і, по суті, зазначені оцінки збігаються з оцінками (21) і (56) відповідно. Доцільність наведення їх у теоремах 3, 4 мотивується завершеністю формулювання останніх щодо параметра p, $1 \le \le p \le \infty$.

В ході доведення теорем 1 – 4 суттєвим чином були використані асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах інтегралів Пуассона $C^q_{\beta,p}$ (формули (31), (32), (67)). Завдяки роботам [1, 2, 17, 18, 29, 30] аналогічні асимптотичні рівності встановлено і для класів узагальнених інтегралів Пуассона $C^{\alpha,r}_{\beta,p}$ (див., наприклад, [30]).

4. Зауваження та наслідки.

***Зауваження* 1.** Формули (21), (22), (56), (57), (62), (63), (72) і (73), які фігурують в теоремах 1 – 4, є асимптотичними рівностями при $r \to \infty, n \to \infty$ у випадку, коли частка $\dfrac{r}{n}$ обмежена зверху і знизу деякими додатними числами K_1 і K_2:

$$0 < K_1 \le \frac{r}{n} \le K_2 < +\infty. \tag{75}$$

Справді, нехай спочатку $\sqrt{n}+1 \le r \le n+1$. В цьому випадку

$$0 < K_1 \le \frac{r}{n} \le 2 \tag{76}$$

і, отже, можна записати

$$\frac{n}{r^2} = O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{77}$$

Далі, з урахуванням (76) маємо

$$\frac{1}{1-e^{-r/n}} \ge \frac{1}{1-e^{-2}}, \tag{78}$$

$$F\left(s, s; 1; e^{-2r/n}\right) \ge F\left(s, s; 1; e^{-4}\right), \quad s > 0. \tag{79}$$

Із співвідношень (76), (78) і (79) випливає, що за умови (75) формули (21), (22), (62) і (63) є асимптотичними рівностями при $r \to \infty$ і $n \to \infty$. При цьому у (21), (22) і (62), (63) залишковий член $O(1)nr^{-2}$ можна замінити на $O\left(\frac{1}{r}\right)$.

Нехай, далі, $n+1 \le r \le n^2$. В цьому випадку

$$1 < \frac{r}{n} \le K_2 < +\infty, \tag{80}$$

і, отже,

$$\frac{r}{n^2} e^{-r/n} = O\left(\frac{1}{r}\right). \tag{81}$$

Очевидно також, що

$$\frac{1}{1-e^{-r/n}} > 1, \tag{82}$$

$$F\left(s, s; 1; e^{-2r/n}\right) > 1, \quad s > 0. \tag{83}$$

Із співвідношень (81) – (83) випливає, що формули (56), (57), (72) і (73) за умови (75) також є асимптотичними рівностями при $r \to \infty$ і $n \to \infty$.

***Зауваження* 2.** Формули (21), (22), (62) і (63) з теорем 1 і 3 є асимптотичними рівностями при $r \to \infty, n \to \infty$ у випадку, коли

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{r}{n} = 0. \tag{84}$$

Справді, згідно з умовою $\sqrt{n}+1 \le r \le n+1$, що фігурує в зазначених теоремах, виконується нерівність

$$\frac{n}{r^2} \le 1, \tag{85}$$

а отже, залишкові члени у формулах (21), (22), (62) і (63) рівномірно обмежені за всіма параметрами. Залишилося показати, що головні члени у зазначених формулах за умови (84) прямують до нескінченності при $r \to \infty$ і $n \to \infty$. Оскільки

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x} + O(1) \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{86}$$

то за умови (84) справджується асимптотична рівність

$$\frac{1}{1-e^{-r/n}} = \frac{n}{r} + O(1). \tag{87}$$

Із (84), (85) і (87) випливає, що формули (21) і (62) є асимптотичними рівностями. І навіть більше, насправді ми довели таке твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\sqrt{n}+1 \le r \le n+1, n \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{R}$ *і має місце* (84). *Тоді при* $r \to \infty$ *і* $n \to \infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C = \mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_\infty} = \frac{1}{rn^{r-1}}\left(\frac{1}{\pi} + O\left(\frac{r}{n} + \frac{1}{r}\right)\right). \tag{88}$$

Покажемо далі, що за умови (84)

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ n\to\infty}} F^{1/s}\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2};1;e^{-2r/n}\right)=+\infty,\quad s>0. \tag{89}$$

Як показано у [27] (формула (25)),

$$F^{1/s}\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2};1;q^2\right)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}\right|^s dx\right)^{1/s},\quad s\geq 1,\quad q\in(0,1), \tag{90}$$

тому, враховуючи, що величина

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}\right|^s dx\right)^{1/s}$$

зростає за параметром s на $[1,+\infty)$, отримуємо

$$F^{1/s}\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2};1;q^2\right)\geq F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;q^2\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-2q\cos x+q^2}}=\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(q), \tag{91}$$

де $\mathbf{K}(q)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду.

Із (91) і асимптотичного розкладу величини $\mathbf{K}(q)$,

$$\mathbf{K}(q)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-q}+C+o(1),\quad q\to 1-0$$

(див. [31], гл. 22), а також із формули (87) маємо

$$F^{1/s}\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2};1;e^{-2r/n}\right)\geq\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{1-e^{-r/n}}+O(1)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{n}{r}+O(1)\to\infty. \tag{92}$$

Із (85), (92) випливає, що за умови (84) оцінки (21) і (62) є асимптотичними рівностями при $r\to\infty$ і $n\to\infty$.

***Зауваження* 3.** Формули (56), (57), (72) і (73), які фігурують у теоремах 2 і 4, є асимптотичними рівностями при $r\to\infty, n\to\infty$ у випадку, коли

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{r}{n}=+\infty. \tag{93}$$

Справді, як зазначалось раніше, згідно з умовою $n+1\leq r\leq n^2$ має місце оцінка (81) і, крім того, з урахуванням (93)

$$\frac{1}{1-e^{-r/n}}=1+e^{-r/n}+O(1)e^{-2r/n}. \tag{94}$$

Із (81) і (94) випливає, що формули (56) і (73) є асимптотичними рівностями. І навіть більше, ми тим самим довели таке твердження.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $n+1\leq r\leq n^2, n\in\mathbb{N}, \beta\in\mathbb{R}$ *і має місце* (93). *Тоді при* $r\to\infty$ *і* $n\to\infty$ *виконується асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_C=\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_\infty}=\frac{1}{n^r}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}e^{-r/n}+O(1)\left(\frac{r}{n^2}+e^{-r/n}\right)e^{-r/n}\right). \tag{95}$$

Із співвідношень (90), (91) для величини $F^{1/s}\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2};1;q^2\right)$ випливає двостороння оцінка

$$\frac{2}{\pi}\mathbf{K}(q) \le F^{1/s}\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}; 1; q^2\right) \le \frac{1}{1-q}, \quad s \ge 1, \quad q \in (0,1). \tag{96}$$

Оскільки згідно з (91)

$$\mathbf{K}(q) = \frac{\pi}{2} + O(q^2), \tag{97}$$

то із (96) при $q = e^{-r/n}$ за умови (93) випливає асимптотична при $r \to \infty$ і $n \to \infty$ рівність

$$F^{1/s}\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}; 1; e^{-2r/n}\right) = 1 + O(1)e^{-r/n}, \quad 1 \le s < \infty. \tag{98}$$

Із (81) і (98) випливає, що за умови (93) формули (57) і (72) є асимптотичними при $r \to \infty$ і $n \to \infty$ рівностями. При цьому ми встановили таке твердження.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{R}$ *і* $n+1 \le r \le n^2$. *Тоді за умови* (93) *мають місце асимптотичні при* $r \to \infty$ *і* $n \to \infty$ *рівності*

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,p})_C = \frac{1}{n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi} + O(1)e^{-r/n}\right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{99}$$

$$\mathcal{E}_n(W^r_{\beta,1})_{L_p} = \frac{1}{n^r}\left(\frac{\|\cos t\|_{p}}{\pi} + O(1)e^{-r/n}\right). \tag{100}$$

Утім асимптотичні рівності (99) і (100) випливають також із (14) і (15) відповідно. Отже, формули (14) і (15) та (56), (57), (72) і (73) повністю узгоджуються між собою.

***Зауваження* 4.** Оцінки (21) і (56) є граничними випадками оцінок (22) і (57) при $p' \to \infty$. Аналогічно, оцінки (63) і (73) є граничними випадками оцінок (62) і (72) при $p \to \infty$.

Щоб у цьому переконатись, потрібно перейти до границі при $s \to \infty$ у формулі (90):

$$\lim_{s\to\infty} F^{1/s}\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}; 1; q^2\right) = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^{1/s}}\left(\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos x + q^2}}\right|^s dx\right)^{1/s} =$$

$$= \left\|\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos(\cdot)+q^2}}\right\|_{L_\infty} = \frac{1}{1-q}. \tag{101}$$

Далі залишається застосувати (101) при $q = e^{-r/n}$ і $s = p'$ або $s = p$.

Література

1. A. I. Stepanets, *Classification and approximation of periodic functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995).
2. A. I. Stepanets, *Methods of approximation theory*, VSP, Utrecht (2005).
3. B. Sz.-Nagy, *Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. 1. Periodischer Fall*, Ber. Math.-Phys. Kl. Akad. Wiss., Leipzig, **90**, 103 – 134 (1938).
4. S. B. Stechkin, *On the best approximation of certain classes of periodic functions by trigonometric polynomials*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **20**, 643 – 648 (1956) (in Russian).
5. V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, Comput. Math. and Anal. Ser. Nova Sci. Publ. Inc., New York (1993).
6. A. N. Kolmogorov, *On the order of the remainders of the Fourier series of differentiable functions*, Selected Works. Mathematics and Mechanics, Nauka, Moscow (1985), p. 179 – 185.

7. V. T. Pinkevich, *On the order of the remainders of the Fourier series of functions differentiable in the sense of Weyl*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **4**, 521 – 528 (1940) (in Russian).
8. S. M. Nikol'skii, *An asymptotic estimation of the remainder under approximation by Fourier sums*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **32**, 386 – 389 (1941) (in Russian).
9. A. V. Efimov, *Approximation of continuous periodic functions by Fourier sums*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **24**, 243 – 296 (1960) (in Russian).
10. S. A. Telyakovskii, *On the norms of trigonometric polynomials and approximation of differentiable functions by the linear means of their Fourier series*, Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, **62**, 61 – 97 (1961) (in Russian).
11. S. M. Nikol'skii, *Approximation of functions in the mean by trigonometric polynomials*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **10**, 207 – 256 (1946) (in Russian).
12. S. B. Stechkin, S. A. Telyakovskii, *On approximation of differentiable functions by trigonometric polynomials in the L metric*, Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, **88**, 20 – 29 (1967) (in Russian).
13. I. G. Sokolov, *The remainder term of the Fourier series of differentiable functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **103**, 23 – 26 (1955) (in Russian).
14. S. G. Selivanova, *Approximation by Fourier sums of the functions possessing a derivative satisfying the Lipschitz condition*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **105**, 909 – 912 (1955) (in Russian).
15. G. I. Natanson, *Approximation by Fourier sums of functions possessing different structural properties on different parts of the domain of definition*, Vestn. Leningr. Univ., **19**, 20 – 35 (1961) (in Russian).
16. S. A. Telyakovskii, *Approximation of differentiable functions by the partial sums of their Fourier series*, Math. Notes, **4**, 668 – 673 (1968).
17. S. A. Telyakovskii, *Approximation of functions of high smoothness by Fourier sums*, Ukr. Math. J., **41**, № 4, 444 – 451 (1989).
18. S. A. Telyakovskii, *On approximation by Fourier sums of differentiable functions of high smoothness*, Tr. Mat. Inst. Steklov, **198**, 193 – 211 (1992).
19. S. B. Stechkin, *An estimation of the remainders of the Fourier series of differentiable functions*, Tr. Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, **145**, 126 – 151 (1980) (in Russian).
20. A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko, *Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness*, Methods Funct. Anal. and Top., **25**, № 4, 381 – 387 (2019).
21. A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko, *Asymptotic estimates for the best uniform approximations of classes of convolution of periodic functions of high smoothness*, J. Math. Sci., **252**, 526 – 540 (2021).
22. А. С. Сердюк, І. В. Соколенко, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій*, Укр. мат. журн., **71**, № 2, 283 – 292 (2019).
23. A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko, *Uniform approximation of classes of $(\psi,\bar{\beta})$-differentiable functions by linear methods*, Approx. Theory Funct. and Relat. Probl., **8**, № 1, 181 – 189 (2011) (in Ukrainian).
24. A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko, *Approximation by linear methods of classes of $(\psi,\bar{\beta})$-differentiable functions*, Approx. Theory Funct. and Relat. Probl., **10**, № 1, 245 – 254 (2013) (in Ukrainian).
25. A. S. Serdyuk, *Approximation of classes of analytic functions by Fourier sums in the uniform metric*, Ukr. Math. J., **57**, № 8, 1275 – 1296 (2005).
26. A. S. Serdyuk, *Approximation of classes of analytic functions by Fourier sums in the metric of the space L_p*, Ukr. Math. J., **57**, № 10, 1635 – 1651 (2005).
27. А. С. Сердюк, *Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах періодичних аналітичних функцій*, Укр. мат. журн., **64**, № 5, 698 – 712 (2012).
28. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, Москва (1987).
29. А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк, *Наближення класів узагальнених інтегралів Пуассона сумами Фур'є в метриках просторів L_s*, Укр. мат. журн., **69**, № 5, 695 – 704 (2017).
30. A. S. Serdyuk, T. A. Stepanyuk, *Uniform approximations by fourier sums in classes of generalized Poisson integrals*, Anal. Math., **45**, № 1, 201 – 236 (2019).
31. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, Физматгиз, Москва (1983).

Одержано 29.01.22