DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7058

УДК 517.537

М. М. Шеремета (Львів. нац. у-т ім. І. Франка)

ПРО ОПЕРАТОРИ ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЄВА – САЛАГЕАНА І ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЄВА – РУШЕВЕЯ ТА АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Let $A_\lambda(0)$ denote the class of power series $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ such that $|g_k|\le \lambda_k|g_1|$ for all $k\ge 1$, where $\lambda=(\lambda_k)$ is a sequence of positive numbers. We obtain necessary and sufficient conditions imposed on a function l and an increasing sequence (n_p) of non-negative integers ensuring that the assumption that the Gelfond – Leont'ev – Sălăgean derivative $D^{n_p}_{l,[S]}f$ and the Gelfond – Leont'ev – Ruscheweyh derivative $D^{n_p}_{l,[R]}f$ belong to the class $A_\lambda(0)$ for all $p\in\mathbb{Z}_+$ implies that f is an entire function.

Позначимо через $A_\lambda(0)$ клас таких степеневих рядів $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$, що $|g_k|\le \lambda_k|g_1|$ для всіх $k\ge 1$, де $\lambda=(\lambda_k)$ — послідовність додатних чисел. Знайдено необхідні і достатні умови на функцію l і зростаючу послідовність (n_p) невід'ємних цілих чисел для того, щоб із належності до класу $A_\lambda(0)$ похідних Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана $D^{n_p}_{l,[S]}f$ і Гельфонда – Леонтьєва – Рушевея $D^{n_p}_{l,[R]}f$ для всіх $p\in\mathbb{Z}_+$ випливало, що f — ціла функція.

1. Вступ. Нехай $A(R)$, $0<R\le+\infty$, — клас аналітичних у крузі $\mathbb{D}_R=\{z:|z|<R\}$ функцій

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \tag{1}$$

а $A(0)$ — клас формальних степеневих рядів. Будемо говорити, що $f\in A^+(R)$, якщо $f\in A(R)$ і $f_k>0$ для всіх $k\ge 0$. Для $f\in A(0)$ і $l(z)=\sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k\in A^+(0)$ формальний степеневий ряд $D^n_l f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n}z^k$ називається похідною Гельфонда – Леонтьєва [1]. Якщо $l(z)=e^z$ (тобто $l_k=1/k!$), то $D^n_l f=f^{(n)}$ є звичайною похідною.

Для аналітичної в $\mathbb{D}_1$ функції $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty} f_k z^k$ оператор $D^n_{[S]}f$, $n\ge 0$, означений рівностями

$$D^0_{[S]}f(z)=f(z),\quad D^1_{[S]}f(z)=D_{[S]}f(z)=zf'(z),$$

$$D^n_{[S]}f(z)=D_{[S]}\left(D^{n-1}_{[S]}f(z)\right)=z+\sum_{k=2}^{\infty} k^n f_k z^k,$$

відомий як похідна Салагеана [2]. Оператор

$$D^n_{[R]}f(z)=\frac{z}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{z^{n-1}f(z)\right\}=z+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} f_k z^k$$

називається [3] похідною Рушевея.

Комбінуючи означення похідної Гельфонда – Леонтьєва з означеннями похідних Салагеана і Рушевея, автор у [4, 5] означив оператори Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана

$$D^n_{l,[S]}f(z)=zl_1D^1_l\left\{D^{n-1}_{l,[S]}f(z)\right\}=z+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{l_1l_{k-1}}{l_k}\right)^n f_k z^k$$

і Гельфонда – Леонтьєва – Рушевея

$$D^n_{l,[R]}f(z) = zl_n D^n_l\left\{z^{n-1}f(z)\right\} = z + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{l_{k-1}l_n}{l_{n+k-1}}\,f_k z^k$$

і дослідив властивості максимальних членів послідовних похідних Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана та Гельфонда – Леонтьєва – Рушевея [4] і адамарових композицій цих похідних [5].

Відомо [6], що якщо функція $f \in A(1)$ і всі її похідні $f^{(n)}$ є однолисті в D_1, то $f \in A(+\infty)$, тобто f допускає аналітичне продовження до цілої функції, і ця функція має експоненціальне зростання. В [7] доведено, що якщо існує така зростаюча послідовність (n_p) цілих невід'ємних чисел ($n_0 = 0$), що $n_{p+1} - n_p = o(\ln n_p)$ при $p \to \infty$ і всі похідні $f^{(n_p)}$ є однолистими в D_1, то $f \in A(+\infty)$. С. М. Шах [8] висловив припущення, що якщо $\sum_{p=1}^{\infty}\dfrac{1}{n_p} = +\infty$ і всі похідні $f^{(n_p)}$ є однолистими в D_1, то $f \in A(+\infty)$. Ця гіпотеза була повторена в 1976 р. на конференції з комплексного аналізу в Нью-Йорку (див. [9]) і спростована у статтях [10, 11]. Фактично доведено [10], що для того, щоб для кожної функції f з однолистості $f^{(n_p)}$ для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ випливало, що f — ціла функція, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\ln\, n_p - \frac{1}{n_p}\sum_{j=1}^{p}(n_j - n_{j-1})\ln\,(n_j - n_{j-1})\right\} = +\infty.$$

Як у [12], позначимо через Λ клас таких всіх додатних послідовностей $\lambda = (\lambda_k)$, що $0 \le \ln\,\lambda_k \le ak$ для деякого $a > 0$ і всіх $k \ge 1$, і будемо говорити, що $f \in A_\lambda(0)$, якщо $f \in A(0)$ і $|f_k| \le \lambda_k|f_1|$ для всіх $k \ge 1$. Зокрема, якщо $\lambda_k = k$ для всіх $k \ge 1$, то за доведеною [13] гіпотезою Бібербаха клас $A_\lambda(0)$ містить всі однолисті в одиничному крузі функції. Нарешті, нехай $\mathfrak{N}$ — клас зростаючих послідовностей (n_p) цілих невід'ємних чисел, $n_0 = 0$. Для похідних Гельфонда – Леонтьєва в [12] отримано такі результати.

I. Нехай $l \in A^+(0)$. Для того щоб для кожних послідовності $\lambda \in \Lambda$ і функції $f \in A(0)$ з умови $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\,\{D^n_l f \in A_\lambda(0)\}$ випливала належність f до $A(\infty)$, необхідно і достатньо, щоб $l \in A^+(+\infty)$.

II. Нехай $(n_p) \in \mathfrak{N}$. Для того щоб для кожних $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ і $l \in A^+(\infty)$ з умови $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\left\{D^{n_p}_l f \in A_\lambda(0)\right\}$ випливала належність f до $A(\infty)$, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim}_{p\to+\infty}(n_{p+1} - n_p) < \infty$.

III. Нехай $(n_p) \in \mathfrak{N}$, $l \in A^+(\infty)$ і послідовність $\left(l_k^2/l_{k-1}l_{k+1}\right)$ є незростаючою. Для того щоб для кожних послідовності $\lambda \in \Lambda$ і функції $f \in A(0)$ з умови $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\left\{D^{n_p}_l f \in A_\lambda(0)]\right\}$ випливала належність f до $A(\infty)$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{n_p+1}\left\{\ln\,\frac{1}{l_{n_p}+1} - \sum_{j=1}^{\infty}\ln\,\frac{1}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\right\} = +\infty.$$

IV. Нехай $l \in A^+(0)$. Для того щоб для кожних $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ і $n^0 \in \mathbb{N}$ з умови $D^{n^0}_l f \in$ $\in A_\lambda(0)$ випливала належність f до $A(\infty)$, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\lim}_{p\to+\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} =$ $= \infty$.

У цій статті ми отримаємо подібні результати для похідних Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана і Гельфонда – Леонтьєва – Рушевея.

2. Похідні Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана. На відміну від [4] для функції (1) будемо розглядати дещо загальніший вигляд похідної Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана

$$D^n_{l,[S]}f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{l_1 l_{k-1}}{l_k}\right)^n f_k z^k. \tag{2}$$

Спочатку доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $l \in A^+(0)$. Для того щоб для кожних $\lambda \in \Lambda,\ f \in A(0)$ і $(n_p) \in \mathfrak{N}$ з умови $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\left\{D^{n_p}_{l,[S]}f \in A_\lambda(0)\right\}$ випливала належність f до $A(\infty)$, необхідно і достатньо, щоб існувало таке число k_0, що $\dfrac{l_k}{l_1 l_{k-1}} < 1$ для всіх $k \geq k_0$.*

Доведення. Умова $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\{D^{n_p}_{l,[S]}f \in A_\lambda(0)\}$ виконується тоді й лише тоді, коли

$$\left(\frac{l_1 l_{k-1}}{l_k}\right)^{n_p} |f_k| \leq \lambda_k |f_1| \tag{3}$$

для всіх k і p, тобто, якщо $\sqrt[k]{|f_k|} \leq \sqrt[k]{|f_1|\lambda_k}\,(l_k/(l_1 l_{k-1}))^{n_p/k}$ для всіх k і p.

Якщо $l_k/(l_1 l_{k-1}) < 1$ для всіх $k \geq k_0$, то для $k \geq k_0$ можемо так вибрати n_{p_k}, що $(l_k/(l_1 l_{k-1}))^{n_{p_k}/k} \to 0$ при $k \to \infty$. Тому, оскільки $\ln \lambda_k \leq ak$ для деякого $a > 0$ і всіх $k \geq 1$, маємо

$$\sqrt[k]{|f_k|} \leq (1 + o(1)e^a\,(l_k/(l_1 l_{k-1}))^{n_{p_k}/k} = o(1), \quad k \to \infty,$$

тобто $f \in A(\infty)$.

Якщо ж існує така зростаюча послідовність (k_j), що $\dfrac{l_{k_j}}{l_1 l_{k_j-1}} \geq 1$ для всіх $j \geq 1$, виберемо $\lambda_k = 1$ для всіх $k,\ f_1 = 1,\ f_{k_j} = l_{k_j}/(l_1 l_{k_j-1})$ для всіх j і $f_k = 0$ для всіх $k \neq k_j$. Тоді

$$\left(\frac{l_1 l_{k_j-1}}{l_{k_j}}\right)^{n_p} |f_{k_j}| = \left(\frac{l_1 l_{k_j-1}}{l_{k_j}}\right)^{n_p-1} \leq 1 = \lambda_{k_j}|f_1|,$$

тобто (3) виконується. З іншого боку,

$$\sqrt[k_j]{|f_{k_j}|} = \sqrt[k_j]{l_{k_j}/(l_1 l_{k_j-1})} \geq 1.$$

Тому $(\forall p \in \mathbb{Z}_+)\left\{D^{n_p}_{l,[S]}f \in A_\lambda(0)\right\}$, але $f \notin A(\infty)$.

Теорему 1 доведено.

З теореми 1 випливає такий аналог твердження I.

***Наслідок* 1.** *Нехай $l \in A^+(0)$. Для того щоб для кожних $\lambda \in \Lambda$ і $f \in A(0)$ з умови $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)\left\{D^{n}_{l,[S]}f \in A_\lambda(0)\right\}$ випливала належність f до $A(\infty)$, необхідно і достатньо, щоб існувало таке число k_0, що $\dfrac{l_k}{l_1 l_{k-1}} < 1$ для всіх $k \geq k_0$.*

Зрозуміло, що для похідних Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана теорема 1 істотно відрізняється від тверджень I і II для похідних Гельфонда – Леонтьєва. З теореми 1 також випливає, що твердження III для похідних Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана не може мати аналога. Проте правильним є наступний аналог твердження IV.

Теорема 2. *Нехай* $l \in A^+(0)$. *Для того щоб для кожних* $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ *і деякого* $n^0 \in \mathbb{N}$ *з умови* $D^{n^0}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0)$ *випливала належність* f *до* $A(\infty)$, *необхідно і достатньо, щоб* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = +\infty$.

Доведення. Припустимо, що $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = \infty$ і $D^{n^0}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0)$ для деякого n^0. Тоді $(l_1 l_{k-1}/l_k)^{n^0} |f_k| \le \lambda_k |f_1|$ і, отже, $\sqrt[k]{|f_k|} \le \sqrt[k]{|f_1|\lambda_k} \left(\sqrt[k]{l_k/(l_1 l_{k-1})}\right)^{n^0} \to 0$ при $k \to \infty$, тобто $f \in A(\infty)$.

З іншого боку, якщо $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \ne +\infty$, то існують число $q \in (0, +\infty)$ і послідовність $(k_j) \uparrow +\infty$ такі, що $l_{k_j-1}/l_{k_j} \le q^{k_j}$. Виберемо $n^0 = 1$, $\lambda_k = 1$ для всіх k, $f_1 = l_1$, $f_{k_j} = q^{-k_j}$ і $f_m = 0$ для $m \ne k_j$. Тоді

$$\left(l_1 l_{k_j-1}/l_{k_j}\right)^{n^0} |f_{k_j}| = (l_1 l_{k_j-1}/l_{k_j}) q^{-k_j} \le l_1 = \lambda_{k_j} |f_1|$$

і, оскільки $f_m = 0$ для всіх $m \ne k_j$, отримуємо $D^{n^0}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0)$. Водночас $\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k|} = 1/q$, тобто $f \notin A(\infty)$.

Теорему 2 доведено.

Для цілої функції f, похідна Гельфонда – Леонтьєва – Салагеана якої задовольняє умову $D^{n^0}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0)$ для деякого n_0, можна встановити швидкість зростання максимуму модуля $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ в тій чи іншій шкалі зростання.

Нехай, як в [14], L — клас таких неперервних додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій α, що $\alpha(x) = \alpha(x_0) \ge 0$ для $x \le x_0$ і $\alpha(x) \uparrow +\infty$ при $x_0 \le x \to +\infty$. Будемо говорити, що $\alpha \in L_{si}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$ для кожного фіксованого $c \in (0, +\infty)$, тобто α — повільно зростаюча функція. Для $\alpha \in L$, $\beta \in L$ величина $\varrho_{\alpha,\beta}[f] = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \dfrac{\alpha(\ln M(r,f))}{\beta(\ln r)}$ називається [14] узагальненим порядком цілої функції f.

Справджуються такі твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\alpha \in L_{si}$, $\beta \in L_{si}$ *і* $\dfrac{d\beta^{-1}(c\alpha(x))}{d \ln x} = O(1)$ *при* $x \to +\infty$ *для кожного* $c \in (0, +\infty)$. *Якщо* $\lambda \in \Lambda$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = \infty$ *і* $D^{n^0}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0)$ *для деякого* n^0, *то* $\varrho_{\alpha,\beta}[f] \le \overline{\lim}_{k\to\infty} \alpha(k)/\beta\left(\dfrac{1}{k} \ln \dfrac{l_{k-1}}{l_k}\right)$.

Справді, за умов, накладених на функції $\alpha \in L_{si}$ і $\beta \in L_{si}$, правильною є формула [14] $\varrho_{\alpha,\beta}[f] = \overline{\lim}_{k\to\infty} \alpha(k)/\beta\left(\dfrac{1}{k} \ln \dfrac{1}{|f_k|}\right)$. З умов $\lambda \in \Lambda$ і $D^{n^0}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0)$ випливає, що

$$\frac{1}{k} \ln |f_k| \le a + \frac{1}{k} \ln |f_1| + \frac{n_0}{k} \ln \frac{l_k}{l_1 l_{k-1}},$$

тобто

$$\frac{1}{k} \ln \frac{1}{|f_k|} \ge \frac{n_0}{k} \ln \frac{l_1 l_{k-1}}{l_k} - a + o(1), \quad k \to \infty.$$

Тому

$$\varrho_{\alpha,\beta}[f] \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \alpha(k)/\beta\left(\frac{n_0}{k} \ln \frac{l_1 l_{k-1}}{l_k} - a + o(1)\right) = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \alpha(k)/\beta\left(\frac{1}{k} \ln \frac{l_{k-1}}{l_k}\right).$$

Вибираючи $\alpha(x) = \ln^+ x$ і $\beta(x) = x^+$, з означення $\varrho_{\alpha,\beta}[f]$ отримуємо означення порядку $\varrho[f] = \overline{\lim}_{r\to+\infty} \dfrac{\ln \ln M(r,f))}{\ln r}$ цілої функції (1). Функція $\beta(x) = x^+$ не задовольняє умову $\beta \in L_{si}$. Але, використовуючи формулу Адамара $\varrho[f] = \overline{\lim}_{k\to\infty} \dfrac{k \ln k}{-\ln |f_k|}$, можемо отримати таке твердження.

Твердження 2. *Якщо* $\lambda \in \Lambda$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = \infty$ *і* $D^{n^0}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0)$ *для деякого* n^0, *то* $\varrho[f] \le \dfrac{1}{n_0} \overline{\lim}_{k\to\infty} \dfrac{k \ln k}{\ln (l_{k-1}/l_k)}$.

Звідси випливає, що якщо $\lambda \in \Lambda$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} = \infty$, $k \ln k = O(\ln (l_{k-1}/l_k))$ при $k \to \infty$, $(n_p) \in \mathfrak{N}$ і $(\forall p \in \mathbb{Z}_+) \left\{ D^{n_p}_{l,[S]} f \in A_\lambda(0) \right\}$, то $\varrho[f] = 0$.

3. Похідні Гельфонда – Леонтьєва – Рушевея. Тут для функції (1) також будемо розглядати дещо загальніший вигляд похідної Гельфонда – Леонтьєва – Рушевея, а саме

$$D^n_{l,[R]}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{k-1} l_n}{l_{n+k-1}} f_k z^k. \tag{4}$$

Спочатку доведемо аналог теореми 1.

Теорема 3. *Нехай* $l_j l_{j+2} \le l^2_{j+1}$ *для всіх* $j \ge 0$. *Для того щоб для кожних* $\lambda \in \Lambda$, $f \in A(0)$ *і* $(n_p) \in \mathfrak{N}$ *з умови* $(\forall p \in \mathbb{Z}_+) \left\{ D^{n_p}_{l,[R]} f \in A_\lambda(0) \right\}$ *випливала належність* f *до* $A(\infty)$, *необхідно і достатньо, щоб існувало таке* k_0, *що для всіх* $k \ge k_0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{l_{j+1} l_{j+k-1}}{l_j l_{j+k}} = +\infty. \tag{5}$$

Доведення. Умова $(\forall p \in \mathbb{Z}_+) \left\{ D^{n_p}_{l,[R]} f \in A_\lambda(0) \right\}$ виконується тоді й лише тоді, коли

$$\frac{l_{k-1} l_{n_p}}{l_{n_p+k-1}} |f_k| \le \lambda_k |f_1|$$

для всіх $k \ge 2$ і $p \ge 0$, тобто

$$\frac{1}{k} \ln |f_k| \le a + \frac{\ln |f_1|}{k} + \frac{1}{k} \ln \frac{l_{n_p+k-1}}{l_{k-1} l_{n_p}}. \tag{6}$$

Приймемо $\eta_j = \dfrac{l_{j+1}}{l_j}$. Тоді $l_j = \prod_{m=0}^{j-1} \eta_m$ і

$$\ln \frac{l_{n+k-1}}{l_{k-1} l_n} = \sum_{m=0}^{n+k-2} \ln \eta_m - \sum_{m=0}^{k-2} \ln \eta_m - \sum_{m=0}^{n-1} \ln \eta_m = \sum_{m=k-1}^{n+k-2} \ln \eta_m - \sum_{m=0}^{n-1} \ln \eta_m =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \ln \eta_{k+j-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \ln \eta_j = \sum_{j=0}^{n-1} \ln \frac{\eta_{k+j-1}}{\eta_j} = \sum_{j=0}^{n-1} \ln \frac{l_j l_{j+k}}{l_{j+1} l_{j+k-1}} \tag{7}$$

для всіх $k \ge 2$ і $p \ge 0$ і, отже,

$$\ln \frac{l_{n_p+k-1}}{l_{k-1}l_{n_p}} = \sum_{j=0}^{n_p-1} \ln \frac{l_j l_{j+k}}{l_{j+1}l_{j+k-1}}$$

для всіх $k \geq 2$ і $p \geq 0$. Тому якщо $\lambda \in \Lambda$ і $(\forall p \in \mathbb{Z}_+) \left\{D^{n_p}_{l,[R]} f \in A_\lambda(0)\right\}$, то з огляду на (6) для всіх $k \geq 2$ і $n \geq 0$ маємо

$$\frac{1}{k} \ln |f_k| \leq a + o(1) + \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n_p-1} \ln \frac{l_j l_{j+k}}{l_{j+1}l_{j+k-1}}, \quad k \to \infty. \tag{8}$$

З умови (5) випливає, що для кожного фіксованого $k \geq k_0$ існує таке p_k, що

$$\sum_{j=0}^{n_{p_k}-1} \ln \frac{l_{j+1}l_{j+k-1}}{l_j l_{j+k}} \geq k^2,$$

тобто

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n_{p_k}-1} \ln \frac{l_j l_{j+k}}{l_{j+1}l_{j+k-1}} \leq -k \to -\infty, \quad k \to \infty.$$

Тому для $n = n_{p_k}$ з (8) отримуємо

$$\frac{1}{k} \ln |f_k| \leq a + o(1) + \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n_{p_k}-1} \ln \frac{l_j l_{j+k}}{l_{j+1}l_{j+k-1}} \to -\infty, \quad k \to \infty,$$

тобто $f \in A(\infty)$.

Достатність умови (5) доведено.

Припустимо тепер, що таке k_0 не існує, тобто існують число $q < +\infty$ і зростаюча послідовність (k_m) такі, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{l_{j+1}l_{j+k_m-1}}{l_j l_{j+k_m}} \leq q < +\infty. \tag{9}$$

Виберемо $\lambda_k = 1,\ f_1 = 1,\ f_{k_m} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{l_j l_{j+k_m}}{l_{j+1}l_{j+k_m-1}}\right\}$ для всіх m і $f_k = 0$ для всіх $k \neq k_m$. Тоді з (9) випливає, що $\dfrac{1}{k_m} \ln |f_{k_m}| \geq -q/k_m \to 0$ при $m \to \infty$, тобто $f \notin A(\infty)$. Водночас, оскільки $l_j l_{j+2} \leq l_{j+1}^2$ для всіх $j \geq 0$, послідовність (l_j/l_{j+1}) неспадна і з огляду на (7) маємо

$$\ln \frac{l_{k_m-1}l_{n_p}}{l_{n_p+k_m-1}} + \ln |f_{k_m}| = -\sum_{j=0}^{n_p-1} \ln \frac{l_j l_{j+k_m}}{l_{j+1}l_{j+k_m-1}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} \ln \frac{l_j l_{j+k_m}}{l_{j+1}l_{j+k_m-1}} = \sum_{j=n_p}^{\infty} \ln \frac{l_j l_{j+k_m}}{l_{j+1}l_{j+k_m-1}} \leq 0,$$

тобто

$$\frac{l_{k_m-1}l_{n_p}}{l_{n_p+k_m-1}}\,|f_{k_m}|\le 1=\lambda_{k_m}|f_1|.$$

При $k\ne k_m$ остання нерівність є очевидною. Тому $(\forall p\in\mathbb{Z}_+)\left\{D^{n_p}_{l,[R]}f\in A_\lambda(0)\right\}$.

Теорему 3 доведено.

Наслідок 2. *Нехай* $l_jl_{j+2}\le l^2_{j+1}$ *для всіх* $j\ge 0$. *Для того щоб для кожних* $\lambda\in\Lambda$ *і* $f\in A(0)$ *з умови* $(\forall n\in\mathbb{Z}_+)\left\{D^{n}_{l,[R]}f\in A_\lambda(0)\right\}$ *випливала належність* f *до* $A(\infty)$, *необхідно і достатньо, щоб існувало таке* k_0, *що* $\sum_{j=1}^{\infty}\ln\dfrac{l_{j+1}l_{j+k-1}}{l_jl_{j+k}}=+\infty$ *для всіх* $k\ge k_0$.

Правильним є такий аналог теореми 2.

Теорема 4. *Нехай* $l_jl_{j+2}\le l^2_{j+1}$ *для всіх* $j\ge 0$. *Для того щоб для кожних* $\lambda\in\Lambda$, $f\in A(0)$ *і деякого* $n^0\ge 1$ *з умови* $D^{n^0}_{l,[R]}f\in A_\lambda(0)$ *випливала належність* f *до* $A(\infty)$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n_0-1}\ln\frac{l_{j+k-1}}{l_{j+k}}=+\infty. \tag{10}$$

Доведення. Якщо $D^{n^0}_{l,[S]}f\in A_\lambda(0)$ і (10) виконується, то з огляду на (7), як і раніше, маємо

$$\frac{1}{k}\ln|f_k|\le a+o(1)+\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n^0-1}\ln\frac{l_jl_{j+k}}{l_{j+1}l_{j+k-1}}=O(1)-\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{n^0-1}\ln\frac{l_{j+k-1}}{l_{j+k}}\to-\infty,\quad k\to\infty,$$

тобто $f\in A(\infty)$.

З іншого боку, якщо (10) не виконується, то існує така послідовність $(k_m)\uparrow+\infty$, що $\dfrac{1}{k_m}\sum_{j=1}^{n_0-1}\ln\dfrac{l_{j+k_m-1}}{l_{j+k_m}}\le C_1<+\infty$ і, отже, $\dfrac{1}{k_m}\sum_{j=1}^{n_0-1}\ln\dfrac{l_{j+1}l_{j+k_m-1}}{l_jl_{j+k_m}}\le C_2<+\infty$. Виберемо $\lambda_k=1$ для всіх k, $f_1=1$, $f_{k_m}=\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n_0-1}\ln\dfrac{l_{j+1}l_{j+k_m-1}}{l_jl_{j+k_m}}\right\}$ і $f_k=0$ для всіх $k\ne k_m$. Тоді $D^{n^0}_{l,[R]}f\in A_\lambda(0)$, але $f\notin A(\infty)$.

Теорему 4 доведено.

Зауважимо, що (10) виконується, якщо $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}=\infty$.

Зауважимо також, що і у випадку похідних Гельфонда – Леонтьєва – Рушевея можна отримати оцінки для $M_f(r)$. Правильними є такі аналоги тверджень 1 і 2.

Твердження 3. *Нехай функції* α *і* β *задовольняють умови твердження* 1. *Припустимо, що* $\lambda\in\Lambda$, $l_jl_{j+2}\le l^2_{j+1}$ *для всіх* $j\ge 0$, $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}=\infty$ *і* $D^{n^0}_{l,[R]}f\in A_\lambda(0)$ *для деякого* n^0. *Тоді*

$$\varrho_{\alpha,\beta}[f]\le\varlimsup_{k\to\infty}\alpha(k)/\beta\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n_0-1}\ln\frac{l_{j+k-1}}{l_{j+k}}\right)\le\varlimsup_{k\to\infty}\alpha(k)/\beta\left(\frac{1}{k}\ln\frac{l_{k-1}}{l_k}\right).$$

Твердження 4. *Якщо* $\lambda\in\Lambda$, $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}}=\infty$ *і* $D^{n^0}_{l,[R]}f\in A_\lambda(0)$ *для деякого* n^0, *то*

$$\varrho[f]\le\frac{1}{n_0}\varlimsup_{k\to\infty}\frac{k\ln k}{\sum_{j=1}^{n_0-1}\ln\dfrac{l_{j+k-1}}{l_{j+k}}}\le\varlimsup_{k\to\infty}\frac{k\ln k}{\ln\left(l_{k-1}/l_k\right)}.$$

Література

1. А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев, *Об обобщении ряда Фурье*, Мат. сб., **29**, № 3, 477 – 500 (1951).
2. G. St. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Lect. Notes Math., **1013**, 362 – 372 (1983).
3. St. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **49**, 109 – 115 (1975).
4. M. M. Sheremeta, *On the maximal terms of successive Gelfond – Leont'ev – Sălăgean and Gelfond – Leont'ev – Ruscheweyh derivatives of a function analytic in the unit disc*, Mat. Stud., **37**, № 1, 58 – 64 (2012).
5. M. M. Sheremeta, *Hadamard composition of Gelfond – Leont'ev – Sălăgean and Gelfond – Leont'tev – Ruscheweyh derivatives of functions analytic in the unit disc*, Mat. Stud., **54**, № 2, 115 – 134 (2020).
6. S. M. Shah, S. Y. Trimble, *Univalent functions with univalent derivatives*, Bull. Amer. Math. Soc., **75**, 153 – 157 (1969).
7. S. M. Shah, S. Y. Trimble, *Univalent functions with univalent derivatives, III*, J. Math. and Mech., **19**, 451 – 460 (1969/1970).
8. S. M. Shah, *Analytic functions with univalent derivatives and entire functions of exponential type*, Bull. Amer. Math. Soc., **78**, № 2, 110 – 118 (1972).
9. S. S. Miller, *Problems in complex function theory*, Complex Anal., Proc. S.U.N.Y. Brockport Conf., New York; Basel (1978), p. 167 – 177.
10. М. Н. Шеремета, *О целых функциях с однолистными в круге производными*, Укр. мат. журн., **43**, № 3, 400 – 406 (1991).
11. М. М. Шеремета, *Спростування однієї гіпотези Шаха про однолисті функції*, Мат. студ., **2**, 46 – 48 (1993).
12. М. Н. Шеремета, *О степенных рядах с удовлетворяющими специальному условию производными Гельфонда – Леонтьева*, Мат. физика, анализ, геометрия, **3**, № 3/4, 423 – 445 (1996).
13. Louis de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., **154**, 137 – 152 (1985).
14. М. Н. Шеремета, *О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения*, Изв. вузов. Математика, № 2, 100 – 108 (1967).

Одержано 17.12.21