К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7012

УДК 517.5

В. В. Бовсуновська, П. В. Задерей (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

ПРО ТЕЙЛОРІВСЬКІ КОЕФІЦІЄНТИ ФУНКЦІЙ ІЗ КЛАСІВ H_1

We establish conditions imposed on the coefficients of a power series, under which the series under consideration is the Taylor series of a function belonging to the class H_1.

Встановлено умови на коефіцієнти степеневого ряду, при виконанні яких дані ряди є рядами Тейлора функції з класу H_1.

Регулярна в одиничному крузі $D = \{z : |z| < 1, z \in D\}$ функція $f(z)$ належить класу $H_p,\ p \geq$ ≥ 1, якщо

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right)\right|^p dt < \infty.$$

Однією з основних задач теорії аналітичних функцій є встановлення умов на коефіцієнти c_k степеневого ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \tag{1}$$

при виконанні яких даний степеневий ряд є рядом Тейлора функції $f\,(z)$ з класу H_p.

Відомим є твердження [1, c. 156]: для того щоб функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ належала класу H_2, необхідно і достатньо, щоб ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$$

збігався.

Виникає питання: чи можна встановити подібні твердження для класів H_p при $p \neq 2$? На жаль, на це питання відповідь є негативною.

У цій статті ми встановимо умови на коефіцієнти $c_k = a_k - ib_k$ степеневого ряду (1), при виконанні яких даний ряд буде рядом Тейлора деякої функції $f\,(z)$ з класу H_1.

Покладемо

$$\Delta^2 c_{k-1} = c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1}.$$

Теорема 1. *Якщо для послідовності чисел* $c_k = a_k - ib_k,\ k = 1, 2, \ldots,\ c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, *виконуються умови*

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\Delta^2 c_{k-1}\right| < \infty, \tag{3}$$

то ряд (1) *буде рядом Тейлора деякої функції* $f(\cdot) \in H_1$ *тоді й лише тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty. \tag{4}$$

Доведення. Якщо $f(\cdot) \in H_1$, то згідно з теоремою 8.7 [2, с. 454]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} \leq A \int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right| dt < \infty, \; A \equiv \mathrm{const},$$

тобто ряд (4) є збіжним.

Нехай виконуються умови (2)–(4). Покажемо, що функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ належить класу Гарді H_1, тобто $f(z)$ є регулярною в крузі D і

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\right| dt < \infty.$$

Оскільки $c_k \to 0$ при $k \to \infty$, то функція $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ є регулярною в крузі D. Покладаючи $z = re^{it}$, маємо

$$f\left(re^{it}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - ib_k) r^k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) r^k +$$

$$+ i \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt) r^k = u(r,t) + iv(r,t). \tag{5}$$

З умови (3) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\Delta^2 a_{k-1}\right| < \infty \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\Delta^2 b_{k-1}\right| < \infty,$$

а з (4) — що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

В 1923 р. А. М. Колмогоров [3] встановив, що якщо

$$a_k \to 0 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \left|\Delta^2 a_{k-1}\right| < \infty,$$

то ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ є рядом Фур'є сумовної функції.

В 1964 р. С. О. Теляковський [4] довів, що при виконанні умов

$$b_k \to 0 \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \left| \Delta^2 b_{k-1} \right| < \infty$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ буде рядом Фур'є сумовної функції тоді й лише тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} < \infty.$$

Тому, згідно з результатами А. М. Колмогорова [3] і С. О. Теляковського [4], ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt)$$

є рядами Фур'є сумовних спряжених функцій, які позначимо через $\mu(t)$ і $\widetilde{\mu}\,(t)$ відповідно.

Таким чином, враховуючи (5) і той факт, що в цьому випадку (див. [2, с. 161]) можна записати

$$u\,(r,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\tau) P_r\,(t-\tau)\,d\tau,$$

$$v\,(r,t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \widetilde{\mu}(\tau) P_r\,(t-\tau)\,d\tau,$$

де

$$P_r\,(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos t + r^2)}$$

— ядро Пуассона, отримуємо

$$f\left(re^{it}\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\mu\,(\tau) + i\widetilde{\mu}(\tau)) P_r\,(t-\tau)\,d\tau.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right| dt \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (|\mu\,(\tau)\,| + |\widetilde{\mu}\,(\tau)\,|) \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} P_r\,(t-\tau)\,dt \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (|\mu\,(\tau)\,| + |\widetilde{\mu}\,(\tau)\,|)\,d\tau < \infty,$$

а отже, $f(z)$ належить класу H_1.

Теорему доведено.

Література

1. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, Гостехиздат, Москва, Ленинград (1950).
2. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, в 2-х т., т. 1, Мир, Москва (1965).
3. A. Kolmogoroff, *Sur Lórdre de grandeur des coéfficients de la séria de Fourier – Lebesque*, Bull. Acad. Polon., Ser. A, 83 – 86 (1923).
4. С.А. Теляковский, *Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами*, Мат. сб., **63 (105)**, № 3, 426 – 444 (1964).

Одержано 26.11.21