DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7172

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара),
В. В. Бабенко (Університет Дрейка, Де-Мойн, США),
О. В. Коваленко, Н. В. Парфінович (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ОЦІНКИ ВІДХИЛЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ У НАПІВЛІНІЙНИХ МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

In this paper, we develop the theory of approximations in functional semilinear metric spaces, which allows us to consider classes of multi- and fuzzy-valued functions, as well as classes of Banach space-valued functions including classes of random processes. For integral operators on classes of functions with values in semilinear metric spaces, we obtain estimates of their deviations and discuss possible applications of these estimates to studying problems of approximation by generalized trigonometric polynomials, optimization of approximate integration formulas, and recovery of functions under the conditions of incomplete information.

Метою даної роботи є розвиток теорії апроксимації у функціональних напівлінійних метричних просторах, що дозволяє включити до розгляду класи багато- і нечіткозначних функцій, а також класи функцій зі значеннями у банахових просторах, зокрема класи випадкових процесів. Одержано оцінки відхилення інтегральних операторів на класах функцій зі значеннями в напівлінійних метричних просторах і обговорено можливість застосування їх до дослідження задач апроксимації узагальненими тригонометричними поліномами, оптимізації формул наближеного інтегрування, а також відновлення функцій за неповною інформацією.

1. Вступ. Метою даної роботи є розвиток деяких розділів теорії апроксимації у функціональних напівлінійних метричних просторах. Робота у цьому напрямку мотивована такими обставинами. На даний час теорія апроксимації функцій, що набувають числових значень, є добре розвиненим розділом аналізу (див., наприклад, монографії [1 – 7]), який має численні застосування. Протягом останніх десятиліть, виходячи як з теоретичних, так і практичних міркувань, також мали місце спроби розвитку теорії апроксимації багатозначних (див. [8]) і нечіткозначних (див. [9]) функцій. Природно, що при цьому насамперед математики намагалися адаптувати до цих функцій методи, розроблені для числових функцій. Звичайно, це викликало і продовжує викликати певні труднощі. Розвиток теорії апроксимації у напівлінійних метричних просторах, по-перше, дозволяє з єдиної точки зору розглядати відповідні задачі для багато- і нечіткозначних функцій, а також функцій зі значеннями у банахових просторах (зокрема, для випадкових процесів), а по-друге, така робота може стати основою для розробки обчислювальних алгоритмів для розв'язання різноманітних задач, пов'язаних із такими функціями. Крім того, становить теоретичний інтерес питання про те, наскільки далеко можна просунутись у напрямку узагальнення відомих результатів для числових функцій у випадку функцій зі значеннями у напівлінійних метричних просторах.

Опишемо коротко структуру статті. У другому пункті наведено необхідні відомості із теорії напівлінійних метричних просторів (L-просторів). У третьому пункті досліджено задачу про оцінки відхилення інтегральних операторів у просторах функцій зі значеннями в L-просторах. Насамкінець, у четвертому пункті обговорено можливі застосування одержаних результатів до задач апроксимації узагальненими тригонометричними поліномами, оптимізації формул наближеного інтегрування, а також відновлення функцій за неповною інформацією.

2. Означення і деякі відомості про L-простори.

2.1. **Означення 1.** *Множина X називається напівлінійним простором, якщо в ній означено операції додавання елементів та множення на дійсне число і для всіх $x, y, z \in X$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконуються умови*:

1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) $\exists \theta \in X : x + \theta = x$;
4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6) $1 \cdot x = x,\ \ 0 \cdot x = \theta$,

де через θ позначено нейтральний елемент простору X, означений властивістю 3; *легко бачити, що такий елемент θ єдиний.*

Іноді в подальшому для $\alpha \in \mathbb{R}$ і $x \in X$ будемо писати $x\alpha$ замість αx і $-\alpha x$ замість $(-\alpha)x$, зокрема запис $-x$ означатиме $(-1) \cdot x$.

Означення 2. *Назвемо елемент $x \in X$ опуклим, якщо для всіх $\alpha, \beta \geq 0$*

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \tag{1}$$

Позначимо через X^c підпростір усіх опуклих елементів простору X.

Зауваження **1.** Деякі автори (див., наприклад, [10]) включають до аксіом напівлінійного простору вимогу $X = X^c$.

Означення 3. *Напівлінійний метричний простір X з метрикою $h = h_X$ називається L-простором, якщо він є повним і сепарабельним і для всіх $x, y, z \in X$ і $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\begin{gathered} h(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| h(x, y), \\ h(x + z, y + z) \leq h(x, y). \end{gathered} \tag{2}$$

Зауваження **2.** Із нерівності трикутника і (2) випливає, що

$$h(x + z, y + w) \leq h(x, y) + h(z, w) \quad \forall x, y, z, w \in X.$$

Означення 4. *L-простір X називається ізотропним, якщо нерівність* (2) *перетворюється на рівність для всіх $x, y, z \in X$.*

Довільні сепарабельні банахові простори і довільні повні та сепарабельні квазілійні нормовані простори (див. [11]) є L-просторами. Простір $\Omega(X)$ непорожніх компактних підмножин сепарабельного банахового простору X, наділений звичайною ґаусдорфовою метрикою, простір $\Omega_{\mathrm{conv}}(X)$ опуклих елементів із $\Omega(X)$ і простори нечітких множин (див., наприклад, [12]) є також прикладами L-просторів. Усі наведені вище простори є ізотропними. Приклад неізотропного L-простору побудовано в [13]. Більше прикладів L-просторів можна знайти в статтях [14 – 16].

Означення 5. *Будемо говорити, що елемент $x \in X$ є оборотним, якщо існує елемент $x' \in X$ такий, що $x + x' = \theta$. Елемент x' називається оберненим для x. Позначимо через X^{inv} множину оборотних елементів простору X. Елемент x називається сильно оборотним, якщо $x' = -x$.*

***Зауваження* 3.** В довільному L-просторі, який є не лише напівлінійним, а і лінійним простором, зокрема в довільному банаховому просторі, кожний елемент буде опуклим і сильно оборотним. У просторі $\Omega(X)$ будь-який елемент вигляду $\{x\}$, $x \in X$, є опуклим і сильно оборотним. У просторах нечітких множин кожна функція $u_{x_0} = \chi_{\{x_0\}}$, де χ_A — характеристична функція множини A, також є опуклим і сильно оборотним елементом.

Мають місце (див. [13, 14, 17]) такі твердження.

Лема 1. *Якщо $x \in X^{\mathrm{inv}}$, то обернений елемент x' єдиний.*

Лема 2. *Якщо $x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^c$, то $x' \in X^c$.*

Лема 3. *Для всіх $x \in X^c$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$h(\alpha x, \beta x) \leq |\alpha - \beta| h(x, \theta). \tag{3}$$

Якщо X є ізотропним, то нерівність (3) *перетворюється на рівність для $x \in X^c$ і $\alpha \cdot \beta \geq 0$.*

Лема 4. *Нехай X — ізотропний L-простір. Тоді для будь-якого $x \in X^c \cap X^{\mathrm{inv}}$*

$$h(x, x') = d(x + x, \theta) = 2h(x, \theta).$$

Лема 5. *Для будь-якого $x \in X^{\mathrm{inv}} \cap X^c$ $\;h(x', \theta) = h(x, \theta)$.*

Крім того, нам знадобиться таке твердження.

Лема 6. *Якщо опуклий елемент x у ізотропному просторі X є сильно оборотним, то для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність* (1), *а нерівність* (3) *перетворюється на рівність.*

Доведення. Доведемо спочатку справедливість рівності (1). Якщо $\alpha \cdot \beta = 0$, то твердження є очевидним. Якщо $\alpha, \beta < 0$, то за лемою 2

$$\alpha x + \beta x = (-\alpha)x' + (-\beta)x' = (-\alpha - \beta)x' = (\alpha + \beta)x.$$

Якщо ж $\alpha \cdot \beta < 0$, то можемо вважати, що $\beta < 0 < \alpha$ і $\alpha + \beta \geq 0$. Тоді

$$h(\alpha x + \beta x, (\alpha + \beta)x) = h(\alpha x + (-\beta)x', (\alpha + \beta)x) =$$
$$= h(\alpha x, (\alpha + \beta)x + (-\beta)x) = h(\alpha x, (\alpha + \beta - \beta)x) = 0,$$

і рівність (1) доведено.

Доведемо тепер нерівність (3). За лемою 3 достатньо довести, що нерівність (3) перетворюється на рівність у випадку $\alpha \cdot \beta < 0$. Можемо вважати, що $\beta < 0 < \alpha$. Тоді

$$h(\alpha x, \beta x) = h(\alpha x, -\beta(-x)) = h(\alpha x, -\beta x') = h(\alpha x + (-\beta)x, \theta) =$$
$$= h((\alpha - \beta)x, \theta) = |\alpha - \beta| h(x, \theta),$$

що й потрібно було довести.

2.2. Інтегрування в L-просторах. Нехай $(S, \mathcal{F})$ — вимірний простір (тобто S — множина, а $\mathcal{F}$ — σ-алгебра її підмножин) з повною скінченною додатною мірою μ. Через $L_p(S)$, $1 \leq p \leq$ $\leq \infty$, позначимо простори функцій $f \colon S \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\|f\|_{L_p(S)}$.

Означення 6. *Нехай X — L-простір. Функція $f : S \to X$ називається вимірною, якщо для будь-якого елемента $x \in X$ дійснозначна функція $t \mapsto h(f(t), x)$ є вимірною.*

Для L-простору (X,h), позначимо через $L_p(S,X), 1\le p\le\infty$, простір вимірних функцій $f\colon S\to X$ таких, що $h(f(\cdot),\theta)\in L_p(S)$. Якщо $f,g\in L_p(S,X)$, то функція $h(f(\cdot),g(\cdot)))$ вимірна (див. [18], теорема 1.4.22) і належить простору $L_p(S,X)$. Отже, $h_{L_p(S,X)}(f,g) = \|h(f(\cdot),g(\cdot))\|_{L_p(S)}$ — метрика у просторі $L_p(S,X)$.

Наведемо означення і деякі властивості інтеграла Лебега для функцій $f\in L_1(S,X)$ (див. [19] і [11], підрозділ 5).

Означення 7. *Сюр'єктивний оператор $P: X\to X^c$ називається опуклюючим, якщо*

$$h(P(x),P(y))\le h(x,y) \text{ для всіх } x,y\in X,$$

$$P\circ P=P,$$

$$P(\alpha x+\beta y)=\alpha P(x)+\beta P(y) \text{ для всіх } x,y\in X \text{ і } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

Зауважимо, що для всіх $x\in X^c$ $P(x)=x$ (див., наприклад, [15], зауваження 4).

Оператор $\operatorname{conv}\colon\Omega(\mathbb{R}^m)\to\Omega(\mathbb{R}^m)$, який кожному $x\in\Omega(\mathbb{R}^m)$ ставить у відповідність його опуклу оболонку $\operatorname{conv}x$, є опуклюючим.

Нехай X — L-простір і P — опуклюючий оператор. Відображення $f\colon S\to X$ називається простим, якщо воно має не більш ніж зліченну множину значень $\{f_k\}$ на попарно неперетинних вимірних множинах S_k, об'єднання яких дорівнює S. Кажуть, що просте відображення інтегровне за Лебегом, якщо ряд $\sum_k h(P(f_k),\theta)\mu(S_k)$ збігається. Інтеграл Лебега простого відображення f визначається так:

$$\int\limits_S f(s)\,ds := \sum_k P(f_k)\mu(S_k),$$

де μ — міра Лебега.

Для простих f,g мають місце такі властивості:

1) для всіх $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_S(\alpha f(t)+\beta g(t))\,dt=\alpha\int\limits_S f(t)\,dt+\beta\int\limits_S g(t)\,dt;$$

2) функція $t\mapsto h(f(t),g(t))$ інтегровна і

$$h\left(\int\limits_S f(t)\,dt,\int\limits_S g(t)\,dt\right)\le\int\limits_S h(f(t),g(t))\,dt;$$

3) функція $P(f(\cdot))$ інтегровна і

$$\int\limits_S f(t)\,dt=P\left(\int\limits_S f(t)\,dt\right)=\int\limits_S P(f(t))\,dt;$$

4) для неперетинних вимірних множин S_1 і S_2 таких, що $S=S_1\cup S_2$,

$$\int\limits_S f(t)\,dt=\int\limits_{S_1} f(t)\,dt+\int\limits_{S_2} f(t)\,dt.$$

Функція $f \in L_1(S, X)$ називається інтегровною, якщо існує послідовність $\{f^k\}$ простих функцій, яка збігається до f у просторі $L_1(S, X)$. За означенням $\int_S f(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_S f^k(t)\,dt$. Наведене означення є коректним. Відомо, що довільне відображення $f \in L_1(S, X)$ є інтегровним (див. [11], теорема 9).

Зрозуміло, що властивості 1 – 4 інтеграла Лебега для простих функцій мають місце для довільних функцій із $L_1(S, X)$. Зазначимо, що у випадку, коли X — банаховий простір, розглядуваний інтеграл є інтегралом Бохнера (див. [20], підрозділи 3.7, 3.8); у випадку $X = \Omega(\mathbb{R}^m)$ цей інтеграл збігається з інтегралом Аумана (див. [11], теорема 12).

Нам також знадобиться таке твердження.

Лема 7. *Нехай $f \in L_1(S, \mathbb{R})$ і $a \in X$ є опуклим сильно оборотним елементом. Тоді*

$$\int\limits_S f(s) \cdot a ds = \left(\int\limits_S f(s) ds\right) \cdot a.$$

Доведення. Покладемо $S_\pm = \{s \in S\colon\ \pm f(s) > 0\}$. Тоді

$$\int\limits_S f(s) \cdot a ds = \int\limits_{S_+} f(s) \cdot a ds + \int\limits_{S_-} f(s) \cdot a ds =$$

$$= \left(\int\limits_{S_+} f(s) ds\right) \cdot a + \int\limits_{S_-} (-f(s)) \cdot a' ds = \left(\int\limits_{S_+} f(s) ds\right) a + \left(\int\limits_{S_-} (-f(s)) ds\right) a' =$$

$$= \left(\int\limits_{S_+} f(s) ds\right) a + \left(\int\limits_{S_-} f(s) ds\right) a = \left(\int\limits_S f(s) ds\right) a.$$

3. Оцінки відхилення інтегральних операторів. Як завжди, для $p \in [1, \infty]$ покладемо $p' = p/(p-1)$. Нехай Q — деяка множина і $(S, \mathcal{F})$ — описаний вище вимірний простір з мірою μ; $K, N : Q \times S \to \mathbb{R}$, $\phi\colon S \to X$. Розглянемо задачу про відхилення двох інтегральних операторів

$$(\widetilde{K}\phi)(t) = \int\limits_S K(t, s)\phi(s) d\mu(s),\ (\widetilde{N}\phi)(t) = \int\limits_S N(t, s)\phi(s) d\mu(s), \quad t \in Q. \tag{4}$$

Нехай $Q = S = [0, 2\pi]^d, d \in \mathbb{N}$, і μ — міра Лебега. Для просторів 2π-періодичних по кожній змінній функцій $\phi\colon \mathbb{R}^d \to X$ використовуватимемо позначення L_p^X замість $L_p([0, 2\pi]^d, X)$, $L_p = L_p^{\mathbb{R}}$. Важливим прикладом операторів (4) у просторах 2π-періодичних по кожній змінній функцій є оператори згортки, а саме, якщо $K(t, s) = \mathcal{K}(t-s)$ і $N(t, s) = \mathcal{N}(t-s)$, де $\mathcal{K}, \mathcal{N} \in L_1$, то оператори (4) перетворюються на оператори згортки

$$(\mathcal{K}*\phi)(t) = \int\limits_S \mathcal{K}(t-s)\phi(s) d\mu(s),\ (\mathcal{N}*\phi)(t) = \int\limits_S \mathcal{N}(t-s)\phi(s) d\mu(s),\ \ t \in Q.$$

Теорема 1. *Нехай* $p \in (1, \infty]$ *і функції* $K, N : Q \times S \to \mathbb{R}$ *є такими, що* $K(t, \cdot), N(t, \cdot) \in L_{p'}(S)$ *для кожного* $t \in Q$. *Тоді для довільної функції* $\phi \in L_p(S, X)$ *і кожного* $t \in Q$ *виконується нерівність*

$$h((\widetilde{K}\phi)(t), (\widetilde{N}\phi)(t)) \le \|K(t, \cdot) - N(t, \cdot)\|_{L_{p'}(S)} \|h(\phi, \theta)\|_{L_p(S)}. \tag{5}$$

Зокрема, для періодичних функцій і операторів згортки

$$h((\mathcal{K} * \phi)(t), (\mathcal{N} * \phi)(t)) \le \|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_{p'}} \|h(\phi, \theta)\|_{L_p(S)}. \tag{6}$$

Якщо простір X *є ізотропним і у множині* $X^c \cap X^{\rm inv}$ *знайдеться ненульовий сильно оборотний елемент* a, *то нерівність* (5) *непокращувана і перетворюється на рівність для довільної функції вигляду*

$$\phi_t(s) = \varphi_t(s) \cdot a, \quad t \in Q,$$

де $\varphi_t(s) = |K(t, s) - N(t, s)|^{p'-1} \operatorname{sgn}(K(t, s) - N(t, s))$, $s \in S$.

Доведення. Використовуючи властивості інтеграла, опуклюючого оператора, лему 3 і нерівність Гельдера, маємо

$$h((\widetilde{K}\phi)(t), (\widetilde{N}\phi)(t)) = h\left(\int_S K(t, s) P(\phi(s)) d\mu(s), \int_S N(t, s) P(\phi(s)) d\mu(s) \right) \le$$

$$\le \int_S h\left(K(t, s) P(\phi(s)), N(t, s) P(\phi(s))\right) d\mu(s) \le$$

$$\le \int_S |K(t, s) - N(t, s)| h\left(P(\phi(s)), \theta\right) d\mu(s) \le$$

$$\le \|K(t, \cdot) - N(t, \cdot)\|_{L_{p'}(S)} \|h(\phi, \theta)\|_{L_p(S)}.$$

Нерівність (5) доведено.

Нехай тепер простір X є ізотропним. Встановимо точність нерівності (5). Враховуючи лему 6, означення функції ϕ_t і той факт, що ця функція є опуклозначною, отримуємо

$$h((\widetilde{K}\phi_t)(s), (\widetilde{N}\phi_t)(s)) = h\left(\int_S K(t, s) \phi_t(s) d\mu(s), \int_S N(t, s) \phi_t(s) d\mu(s) \right) =$$

$$= h\left(\left[\int_S K(t, s) \varphi_t(s) d\mu(s) \right] a, \left[\int_S N(t, s) \varphi_t(s) d\mu(s) \right] a \right) =$$

$$= \left| \int_S (K(t, s) - N(t, s)) \varphi_t(s) d\mu(s) \right| h(a, \theta) = \int_S |K(t, s) - N(t, s)|^{p'} d\mu(s) h(a, \theta) =$$

$$= \|K(t, \cdot) - N(t, \cdot)\|_{L_{p'}(S)} \left(\int_S |K(t, s) - N(t, s)|^{(p'-1)p} d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} h(a, \theta) =$$

$$= \|K(t,\cdot) - N(t,\cdot)\|_{L_{p'}(S)} \|h(\phi_t(\cdot),\theta)\|_{L_p(S)}.$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо відхилення в інтегральній метриці. Для $p, q \in [1,\infty]$ позначимо через $L_{q,p}(Q \times \times S)$ сукупність функцій $K(\cdot,\cdot)$ таких, що

$$\big\| \|K(t,s)\|_{L_q(Q)} \big\|_{L_p(S)} = \|K(\cdot,\cdot)\|_{L_{q,p}(Q\times S)} < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай* $p, q \in [1,\infty)$ *і* $K, N \in L_{q,p'}(Q \times S)$. *Тоді для довільної функції* $\phi \in \in L_p(S,X)$

$$\|h(\widetilde{K}\phi, \widetilde{N}\phi)\|_{L_q(Q)} \le \|K - N\|_{L_{q,p'}(Q\times S)} \cdot \|h(\phi,\theta)\|_{L_p(S)}. \tag{7}$$

Зокрема, для періодичних за кожною змінною функцій

$$\|h(\mathcal{K} * \phi, \mathcal{N} * \phi)\|_{L_q} \le (2\pi)^{d/p'} \|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_q} \|h(\phi,\theta)\|_{L_p}. \tag{8}$$

Якщо простір X *ізотропний і у множині* $X^c \cap X^{\mathrm{inv}}$ *знайдеться ненульовий сильно оборотний елемент* a, *то при* $p = q = 1$ *нерівності* (7) *і* (8) *непокращувані.*

Доведення. Застосовуючи властивості метрики в X, інтеграла, узагальнену нерівність Мінковського, а також нерівність Гельдера, отримуємо

$$\|h(\widetilde{K}\phi, \widetilde{N}\phi)\|_{L_q(Q)} = \left\| h\left(\int_S K(\cdot,s)P(\phi(s))d\mu(s), \int_S N(\cdot,s)P(\phi(s))d\mu(s) \right) \right\|_{L_q(Q)} \le$$

$$\le \left\| \int_S |K(\cdot,s) - N(\cdot,s)|\, h(P(\phi(s)),\theta) d\mu(s) \right\|_{L_q(Q)} \le$$

$$\le \int_S h(P(\phi(s)),\theta) \|K(\cdot,s) - N(\cdot,s)\|_{L_q(Q)} d\mu(s) \le \|K - N\|_{L_{q,p'}(Q\times S)} \|h(\phi,\theta)\|_{L_p(S)}.$$

Нерівність (7) доведено. Нерівність (8) випливає з нерівності (7).

Встановимо непокращуваність нерівності (8) при $p = q = 1$. Для $\varepsilon > 0$ через F_ε позначимо функцію Стєклова для функції $F \in L_1$:

$$F_\varepsilon(t) = \frac{1}{(2\varepsilon)^d} \int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} F(t-s) d\mu(s).$$

Покладемо $\phi_{ae}(s) = 1/(2\varepsilon)^d \chi_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d}(s) \cdot a$, де $a \in X^c$ є сильно оборотним і таким, що $h(a,\theta) = = 1$. Враховуючи ізотропність простору X і лему 7, маємо

$$\left\| h\left(\int_{[0,2\pi]^d} \mathcal{K}(\cdot - s)\phi_{ae}(s)d\mu(s), \int_{[0,2\pi]^d} \mathcal{N}(\cdot - s)\phi_{ae}(s)d\mu(s) \right) \right\|_{L_1} =$$

$$= 1/(2\varepsilon)^d \left\| h\left(\int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} \mathcal{K}(\cdot - s) a d\mu(s), \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} \mathcal{N}(\cdot - s) a d\mu(s) \right) \right\|_{L_1} =$$

$$= 1/(2\varepsilon)^d \left\| h\left(\left[\int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} \mathcal{K}(\cdot - s) d\mu(s) \right] a, \left[\int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} \mathcal{N}(\cdot - s) d\mu(s) \right] a \right) \right\|_{L_1} =$$

$$= 1/(2\varepsilon)^d \left\| \left| \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]^d} (\mathcal{K}(\cdot - s) - \mathcal{N}(\cdot - s)) d\mu(s) \right| \cdot h(a,\theta) \right\|_{L_1} = \|\mathcal{K}_h - \mathcal{N}_h\|_{L_1}.$$

Оскільки $\|h(\phi_{ae},\theta)\|_{L_1} = 1$ і $\|\mathcal{K}_\varepsilon - \mathcal{N}_\varepsilon\|_{L_1} \to \|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_1}$ при $\varepsilon \to 0$, то нерівність (8) при $p = q = 1$ є непокращуваною.

Теорему 2 доведено.

4. Застосування. ***4.1. Тригонометричні наближення.*** Якщо ядро $\mathcal{N}$ оператора згортки є тригонометричним поліномом, то для довільної функції $\phi \in L_1^X$ згортка $\mathcal{N} * \phi$ буде узагальненим тригонометричним поліномом з коефіцієнтами із простору X. Як видно з оцінок (6) і (8), з оцінок наближення ядра $\mathcal{K}$ поліномом $\mathcal{N}$ випливають оцінки наближення функції $\mathcal{K} * \phi$ узагальненими тригонометричними поліномами вигляду $\mathcal{N} * \phi$, $\phi \in L_1^X$. Величини $\|\mathcal{K} - \mathcal{N}\|_{L_p}$ досліджувались багатьма математиками, і у багатьох випадках відомі точні, асимптотично точні або порядкові оцінки цих величин. Багато результатів у цьому напрямку, а також відповідні посилання можна знайти у монографіях [1 – 7].

Нижче ми детальніше зупинимось на одновимірному випадку. Покладемо $\Phi_p^X := \{\phi \in L_p^X : \|h(\phi,\theta)\|_{L_p} \le 1\}$. Замість $\Phi_p^{\mathbb{R}}$ писатимемо Φ_p. Нехай також $\mathcal{N} \in L_1$ — задане дійснозначне ядро. Будемо розглядати питання наближення класів $\mathcal{K} * \Phi_p^X = \{f = \mathcal{K} * \phi \colon \phi \in \Phi_p^X\}$. Зазначимо, що функції з $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ є опуклозначними. Відомо (див., наприклад, [1, 21 – 24]), що велика кількість важливих класів числових функцій є класами типу $\mathcal{K} * \Phi_p$.

Нехай $f \in L_p^X$ і $H \subset L_p^X$. Покладемо

$$E(f,H)_{L_p^X} = \inf_{\tau \in H} \|h(f,\tau)\|_{L_p}, \quad E(\mathcal{K} * \Phi_p^X, H)_{L_p^X} = \sup_{\phi \in \Phi_p^X} E(\mathcal{K} * \phi, H)_{L_p^X}. \tag{9}$$

Величини (9) називаються найкращим наближенням функції f і класу $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ множиною H у метриці простору L_p^X.

Якщо задано відображення $A \colon L_p^X \to H$, покладемо

$$U(\mathcal{K} * \Phi_p^X, A)_{L_p} = \sup_{\phi \in \Phi_p^X} \|h(\mathcal{K} * \phi, A\phi)\|_{L_p}.$$

Величина $U(\mathcal{K} * \Phi_p^X, A)_{L_p}$ називається похибкою наближення класу $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ заданим методом наближення.

Для заданої сукупності $\mathcal{A}$ відображень $A \colon L_p^X \to H$ найкращим $\mathcal{A}$-наближенням класу $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ множиною H називатимемо величину

$$\mathcal{E}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, \mathcal{A})_{L_p} = \inf_{A \in \mathcal{A}} U(\mathcal{K} * \Phi_p^X, A)_{L_p}.$$

Позначимо через $H_{2n-1}^{T,X}$ ($n = 1, 2, \ldots, H_{2n-1}^{T,\mathbb{R}} = H_{2n-1}^{T}$) множину узагальнених тригонометричних поліномів $T(t)$ порядку не вищого за $n-1$, тобто множину функцій вигляду

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad a_k, b_k \in X.$$

У даному підпункті в якості $\mathcal{A}$ будемо використовувати сукупність відображень вигляду $T * \phi$, $T \in H_{2n-1}^{T}$, $\phi \in L_p^X$.

Означення 8 (С. М. Нікольський [21]). *Нехай $\varphi_n(t) := \operatorname{sgn} \sin nt$. Будемо казати, що ядро $\mathcal{K}$ задовольняє умову N_n^*, якщо існують поліном $T^* \in H_{2n-1}^{T}$ і точка $\theta \in [0, \pi/n]$ такі, що майже для всіх t*

$$(\mathcal{K}(t) - T^*(t))\varphi_n(t - \theta) \geq 0.$$

Відомо, що майже всі важливі для теорії наближень ядра задовольняють умову N_n^* (див. [21 – 24]).

Якщо ядро $\mathcal{K}$ задовольняє умову N_n^*, то [21]

$$E(\mathcal{K}, H_{2n-1}^{T})_{L_1} = \|\mathcal{K} - T^*\|_{L_1} = \|\mathcal{K} * \varphi_n\|_{L_\infty}.$$

Звідси і з теорем 1, 2 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Якщо $p = \infty$ або $p = 1$ і ядро $\mathcal{K}$ задовольняє умову N_n^*, то*

$$E(\mathcal{K} * \Phi_p^X, H_{2n-1}^{T})_{L_p} \leq \mathcal{E}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, \mathcal{A})_{L_p} = \|\mathcal{K} - T^*\|_{L_1} = \|\mathcal{K} * \varphi_n\|_{L_\infty},$$

де $T^* \in H_{2n-1}^{T}$ — поліном найкращого L_1-наближення для ядра $\mathcal{K}$.

З нерівності (6) отримуємо наступне узагальнення теореми 1 з роботи [25].

***Наслідок* 2.** *Нехай $p > 1$ і $\mathcal{K} \in L_{p'}$. Тоді*

$$E(\mathcal{K} * \Phi_p^X, H_{2n-1}^{T,X})_{L_\infty} \leq \mathcal{E}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, \mathcal{A})_{L_\infty} = E(\mathcal{K}, H_{2n-1}^{T})L_{p'}.$$

Випадки точності оцінок найкращих наближень, які випливають з наведених наслідків, ми плануємо розглянути в іншій роботі. Тут зазначимо тільки, що оцінка, яка міститься у наслідку 1, є точною у випадку $X = \Omega(\mathbb{R}^d)$ (див. [26]), а також у випадку, коли X — банахів простір.

4.2. Похибки наближеного інтегрування. Застосовуючи теорему 1 до інтегральних операторів з ядрами

$$K'(t,s) = \int_Q K(u,s) d\mu(u) \text{ і } N'(t,s) = \sum_{j=1}^{n} c_j K(t_j, s),$$

де $t_j \in Q$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, отримуємо наступні оцінки похибки формул наближеного інтегрування функцій вигляду $(\widetilde{K}\phi)(t)$.

***Наслідок* 3.** *Нехай $p \in (1, \infty]$ і $t_j \in Q$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Тоді для довільної функції $\phi \in L_p(S, X)$ такої, що $\|h(\phi, \theta)\|_{L_p(S)} \leq 1$,*

$$h\left(\int_Q (\widetilde{K}\phi)(t) d\nu(t), \sum_{j=1}^{n} c_j (\widetilde{K}\phi)(t_j)\right) \leq \left\| \int_Q K(t, \cdot) d\nu(t) - \sum_{j=1}^{n} c_j K(t_j, \cdot) \right\|_{L_{p'}(S)}.$$

Якщо простір X ізотропний і у множині $X^c \cap X^{\mathrm{inv}}$ знайдеться ненульовий сильно оборотний елемент a, то нерівність непокращувана.

Проілюструємо застосування цього наслідку до задач оптимізації формул наближеного інтегрування на класах періодичних функцій однієї змінної. Для $\overline{t} = \{t_1, \ldots, t_n\} \in [0, 2\pi)$, $\overline{c} = \{c_1, \ldots, c_n\} \in \mathbb{R}^n$ і неперервної функції f покладемо $M_{\overline{t},\overline{c}}(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(t_j)$. Нехай

$$R(f, M_{\overline{t},\overline{c}}) = \int\limits_0^{2\pi} f(t) d\mu(t) - M_{\overline{t},\overline{c}}(f),$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, M_{\overline{t},\overline{c}}) = \sup_{f \in \mathcal{K} * \Phi_p^X} |R(f, M_{\overline{t},\overline{c}})| \text{ і } \mathcal{R}_n(\mathcal{K} * \Phi_p^X) = \inf_{\overline{t},\overline{c}} \mathcal{R}(\mathcal{K} * \Phi_p^X, M_{\overline{t},\overline{c}}).$$

Задача про найкращу на класі $\mathcal{K} * \Phi_p^X$ квадратурну формулу полягає в знаходженні величини $\mathcal{R}_n(\mathcal{K} * \Phi_p^X)$ і наборів $\overline{t}, \overline{c}$, які реалізують інфімум у правій частині останньої рівності.

Для числових функцій цю задачу добре досліджено (див., наприклад, [7, 27]). Зокрема, у багатьох випадках було знайдено точне значення величини $\left\| \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(t) d\mu(t) - \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{K}(t_j - \cdot) \right\|_{L_{p'}}$, що за наслідком 3 дає оцінки і для величини $\mathcal{R}_n(\mathcal{K} * \Phi_p^X)$.

4.3. Похибки відновлення функцій. Якщо застосувати теорему 1 до інтегральних операторів з ядрами $K(t, s)$ і $N(t, s) = \sum_{j=1}^{n} c_j K(t_j, s)$, то ми отримаємо наступні оцінки похибки формул наближеного відновлення значення функції вигляду $(\widetilde{K}\phi)(t)$ в точці t за її значеннями в точках t_j.

***Наслідок* 4.** *Нехай* $p \in (1, \infty]$ *і* $t_j \in Q$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. *Тоді для довільної функції* $\phi \in L_p(S, X)$ *такої, що* $\|h(\phi, \theta)\|_{L_p(S)} \leq 1$, *і довільного* $t \in Q$

$$h\left((\widetilde{K}\phi)(t), \sum_{j=1}^{n} c_j (\widetilde{K}\phi)(t_j) \right) \leq \left\| K(t, \cdot) - \sum_{j=1}^{n} c_j K(t_j, \cdot) \right\|_{L_{p'}(S)}.$$

Розглянемо ще задачу відновлення функції $\widetilde{K}\phi$ за її значеннями в n точках $t_j \in Q$ в інтегральних метриках. Метод відновлення задамо таким чином. Виберемо n функцій $c_j : Q \to \mathbb{R}$ і покладемо $\Phi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)(\widetilde{K}\phi)(t_j)$. Застосовуючи теорему 2 до інтегральних операторів з ядрами $K(t, s)$ $N(t, s) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) K(t_j, s)$, отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 5.** *Нехай* $p, q \in [1, \infty)$ *і* $t_j \in Q$, $c_j \in L_\infty(Q)$, $j = 1, \ldots, n$. *Тоді для довільної функції* $\phi \in L_p(S, X)$ *такої, що* $\|h(\phi, \theta)\|_{L_p(S)} \leq 1$,

$$\left\| h\left((\widetilde{K}\phi)(\cdot), \sum_{j=1}^{n} c_j(\cdot) (\widetilde{K}\phi)(t_j) \right) \right\|_{L_q(Q)} \leq \left\| K(\cdot, \cdot) - \sum_{j=1}^{n} c_j(\cdot) K(t_j, \cdot) \right\|_{L_{q,p'}(Q \times S)}.$$

Задача відновлення функцій і операторів за неповною інформацією є важливою як з теоретичної, так і з практичної точки зору. Важливою також є відповідна оптимізаційна задача. Загальні підходи до таких задач, а також конкретні результати їх розв'язання див. у монографіях [28, 29]. Оптимальне відновлення операторів у L-просторах розглянуто у роботах [13 – 15, 17]. Подальше обговорення цих задач у напівлінійних метричних просторах ми продовжимо в окремій роботі.

Література

1. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближений*, Наука, Москва (1987).
2. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*, Наука, Москва (1977).
3. V. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2018).
4. А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, Праці Ін-ту математики НАН України, **93** (2012).
5. А. И. Степанец, *Равномерные приближения тригонометрическими полиномами*, Наук. думка, Киев (1981).
6. А. И. Степанец, *Методы теории приближений*, в 2 ч., ч. 1, Ин-т математики НАН Украины, Киев (2002).
7. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наук. думка, Киев (1992).
8. N. Dyn, E. Farkhi, A. Mokhov, *Approximation of set-valued functions: adaptation of classical approximation operators*, World Sci. Publ. Co. (2014).
9. G. A. Anastassiou, *Fuzzy mathematics: approximation theory*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer (2010).
10. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, *Multivalued mappings*, J. Sov. Math., **24**, № 6, 719 – 791 (1984).
11. С. М. Асеев, *Квазилинейные операторы и их применение в теории многозначных отображений*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **167**, 25 – 52 (1985).
12. P. Diamond, P. Kloeden, *Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications*, World Sci. Publ. Co. (1994).
13. V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, *Korneichuk – Stechkin lemma, Ostrowski and Landau inequalities, and optimal recovery problems for L-space valued functions*; https://arxiv.org/abs/2006.14581.
14. V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, *Optimal recovery of monotone operators in partially ordered L-spaces*, Numer. Funct. Anal. and Optim., **41** № 11, 1373 – 1397 (2020).
15. V. Babenko, V. Babenko, O. Kovalenko, M. Polishchuk, *Optimal recovery of operators in function L-spaces*, Anal. Math., **47**, 13 – 32 (2021).
16. V. Babenko, *Calculus and nonlinear integral equations for functions with values in L-spaces*, Anal. Math., **45**, 727 – 755 (2019).
17. V. F. Babenko, V. V. Babenko, *Best approximation, optimal recovery, and Landau inequalities for derivatives of Hukuhara-type in function L-spaces*, J. Appl. and Numer. Optim., **1**, 167 – 182 (2019).
18. J. Warga, *Optimal control of differential and functional equations*, Acad. Press (1972).
19. С. А. Вахрамеев, *Интегрирование в L-пространствах*, Прикладная математика и математическое обеспечение ЭВМ, Изд-во Моск. гос. ун-та (1980).
20. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. (1957).
21. С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **10**, № 3, 207 – 256 (1946).
22. В. К. Дзядык, *О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер*, Мат. заметки, **16**, № 5, 691 – 701 (1974).
23. В. Ф. Бабенко, *Приближение классов сверток*, Сиб. мат. журн., **28**, № 5, 6 – 21 (1987).
24. В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Развитие исследований по точному решению экстремальных задач теории наилучшего приближения*, Укр. мат. журн., **42**, № 1, 4 – 17 (1990).
25. В. Ф. Бабенко, С. А. Пичугов, *О наилучшем линейном приближении некоторых классов дифференцируемых периодических функций*, Мат. заметки, **27**, № 5, 683 – 689 (1980).
26. В. Ф. Бабенко, В. В. Бабенко, М. В. Полищук, *Приближение некоторых классов многозначных периодических функций обобщенными тригонометрическими полиномами*, Укр. мат. журн., **68**, № 4, 449 – 459 (2016).
27. С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, Наука, Москва (1988).
28. А. А. Женсыкбаев, *Проблемы восстановления операторов*, Институт компьют. исслед., Ижевск (2003).
29. Д. Трауб, Х. Вожняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, Москва (1983).

Одержано 21.02.22