DOI: 10.37863/umzh.v74i6.6968

УДК 517.957

С. С. Харібегашвілі (Грузин. техн. ун-т, Тбілісі),
Б. Г. Мідодашвілі (Тбіл. держ. ун-т ім. І. Джавахішвілі, Грузія)

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

We investigate a boundary problem for a class of nonlinear systems of partial differential equations of higher orders. For this problem, the existence, uniqueness, and absence of solutions is established.

Досліджено крайову задачу для одного класу нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними високого порядку. Вивчено питання існування, єдиності та відсутності розв'язків цієї задачі.

1. Постановка задачі. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ змінних $x=(x_1,\ldots,x_n)$ і t розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$L_f := \frac{\partial^{4k}u}{\partial t^{4k}} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + f(u) = F, \tag{1.1}$$

де $f=(f_1,\ldots,f_N),\ F=(F_1,\ldots,F_N)$ — задані, а $u=(u_1,\ldots,u_N),\ N\geq 2,$ — шукана вектор-функції; A_{ij} — задані квадратні матриці порядку N, до того ж $A_{ij}=A_{ji},\ i,j=1,\ldots,n,\ n\geq 2,$ k — натуральне число.

Для системи (1.1) розглянемо крайову задачу в такій постановці: в циліндричній області $D_T := \Omega\times(0,T)$, де Ω — відкрита ліпшицева область $\mathbb{R}^n$, знайти розв'язок $u=u(x,t)$ системи (1.1) за крайовими умовами

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + Bu\right)\bigg|_{\Gamma} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\bigg|_{\partial\Omega_0\cup\Omega_T} = 0, \quad i=0,\ldots,2k-1, \tag{1.3}$$

де $\Gamma := \partial\Omega\times(0,T)$ — бічна частина межі циліндричної області D_T, $\Omega_0 : x\in\Omega,\ t=0$ і $\Omega_T :$ $x\in\Omega,\ t=T$ — відповідно нижня й верхня основи цього циліндра, $B:\overline{\Gamma}\to\mathbb{R}^{N\times N}$ — задана неперервна квадратна матриця порядку N; $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\nu_j$, до того ж у скалярному випадку збігається з похідною в напрямку конормалі, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n,\nu_{n+1})$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до ∂D_T і $\nu_{n+1}|_\Gamma = 0$.

Зауважимо, що в скалярному випадку, тобто коли $N=1$, у роботі [1] для рівняння (1.1) у циліндричній області D_T розглянуто крайову задачу з умовами (1.3) й однорідною умовою Діріхле $u|_\Gamma=0$ замість (1.2). Вивченню початкових і мішаних задач для напівлінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними високого порядку, що мають структуру, відмінну від (1.1), присвячено багато робіт (див., наприклад, [2 – 12] і наведену там бібліографію).

Позначимо через $C^{2,4k}(\bar{D}_T)$ простір неперервних у $\bar{D}_T$ вектор-функцій $u = (u_1, \ldots, u_N)$, що мають неперервні в $\bar{D}_T$ частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dfrac{\partial^l u}{\partial t^l}, \ i, j = 1, \ldots, n, \ l = 1, \ldots, 4k.$ Покладемо

$$C_0^{2,4k}(\bar{D}_T) := \left\{ u \in C^{2,4k}(\bar{D}_T) : \left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{\Omega_0 \cup \Omega_T} = 0, \ i = 0, \ldots, 2k-1 \right\}.$$

Введемо гільбертів простір $W_0^{1,2k}(D_T)$, який одержано поповненням за нормою

$$\|u\|^2_{W_0^{1,2k}(D_T)} = \int\limits_{D_T} \left[u^2 + \sum_{i=1}^{2k} \left(\frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] dx\, dt \tag{1.4}$$

класичного простору $C_0^{2,4k}(\bar{D}_T), \ u^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2$.

***Зауваження* 1.1.** Із (1.4) випливає, що $u \in W_2^1(D_T)$ і $\dfrac{\partial^i u}{\partial t^i} \in L_2(D_T), \ i = 1, \ldots, 2k$, якщо $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$. Тут $W_2^1(D_T)$ — відомий простір Соболєва, що складається з елементів $L_2(D_T)$, які мають узагальнені частинні похідні першого порядку з $L_2(D_T)$ [13, с. 56].

Далі на нелінійну вектор-функцію $f = (f_1, \ldots, f_N)$ із (1.1) накладемо такі вимоги:

$$f \in C\big(\mathbb{R}^N\big), \qquad |f(u)| \leq M_1 + M_2 |u|^\alpha, \quad u \in \mathbb{R}^N, \tag{1.5}$$

де $|\cdot|$ — норма у просторі $\mathbb{R}^N, \ M_i = \mathrm{const} \geq 0, \ i = 1, 2$, і

$$0 \leq \alpha = \mathrm{const} < \frac{n+1}{n-1}. \tag{1.6}$$

***Зауваження* 1.2.** Оператор вкладення $i \colon W_2^1(d_t) \to L_q(D_T)$ є лінійним і неперервним компактним оператором у випадку $1 < q < \dfrac{2(n+1)}{n-1}$, $n > 1$ [13, с. 81]. Водночас оператор Немицького $K \colon L_q(D_T) \to L_2(D_T)$, що діє за формулою $Ku = f(u)$, де $u = (u_1, \ldots, u_N) \in L_q(D_T)$ і вектор-функція $f = (f_1, \ldots, f_N)$ задовольняє умову (1.5), є неперервним і обмеженим при $q \geq 2\alpha$ [14, с. 66, 67]. Тому якщо $\alpha < \dfrac{n+1}{n-1}$, то існує таке число q, що $1 < q < \dfrac{2(n+1)}{n-1}$ і $q \geq 2\alpha$. Отже, в цьому випадку оператор

$$K_0 = KI \colon W_2^1(D_T) \to L_2(D_T) \tag{1.7}$$

є неперервним і компактним. Тому з того, що $u \in W_2^1(D_T)$, випливає, що $f(u) \in L_2(D_T)$, і якщо $u^m \to u$ в просторі $W_2^1(D_T)$, то $f(u^m) \to f(u)$ в $L_2(D_T)$.

Тут і далі належність вектор-функції $v = (v_1, \ldots, v_N)$ деякому простору X означає, що кожна компонента $v_i, \ 1 \leq i \leq N$, цього вектора належить простору X.

***Зауваження* 1.3.** Нехай $A_{ij} = A_{ij}(x) \in C^1(\Omega), \ i, j = 1, \ldots, n$, і $u \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T)$ — розв'язок задачі (1.1) – (1.3). Множачи обидві частини системи (1.1) скалярно на довільну вектор-функцію $\varphi \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T)$ й інтегруючи отриману рівність частинами по області D_T, отримуємо

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] dx\, dt +$$

$$+\int\limits_{\Gamma} Bu\cdot\varphi d\Gamma+\int\limits_{D_T} f(u)\cdot\varphi\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{D_T} F\cdot\varphi\,dx\,dt\quad\forall\varphi\in C_0^{2,4k}(\bar D_T),\tag{1.8}$$

де символом $\eta\cdot\xi$ позначено скалярний добуток N-вимірних векторів, тобто $\sum_{i=1}^{N}\eta_i\cdot\xi_i$. Ми візьмемо рівність (1.8) за основу визначення слабкого узагальненого розв'язку задачі (1.1) – (1.3).

Означення 1.1. *Нехай вектор-функція f задовольняє умови* (1.5), (1.6) *і* $F\in L_2(D_T)$. *Вектор-функція $u\in W_0^{1,2k}(D_T)$ називається слабким узагальненим розв'язком задачі* (1.1) – (1.3), *якщо інтегральна рівність* (1.8) *справджується для будь-якої вектор-функції $\varphi\in\in W_0^{1,2k}(D_T)$, тобто*

$$\int\limits_{D_T}\left[\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}}+\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right]dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{\Gamma} Bu\cdot\varphi d\Gamma+\int\limits_{D_T} f(u)\cdot\varphi\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{D_T} F\cdot\varphi\,dx\,dt\quad\forall\varphi\in W_0^{1,2k}(D_T).\tag{1.9}$$

Зазначимо, що згідно із зауваженням 1.2 інтеграл $\int_{D_T} f(u)\cdot\varphi\,dx\,dt$ в рівності (1.9) визначено коректно, оскільки з належності $u\in W_0^{1,2k}(D_T)$ випливає, що $f(u)\in L_2(D_T)$ і, отже, $f(u)\cdot\varphi\in\in L_1(D_T)$.

Неважко перевірити, що якщо розв'язок u задачі (1.1) – (1.3) в сенсі визначення 1.1 належить класу $C_0^{2,4k}(\overline{D}_T)$, то він також буде класичним розв'язком цієї задачі.

2. Розв'язність задачі (1.1) – (1.3). Далі припустимо, що оператор

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\tag{2.1}$$

є сильно еліптичним [15, с. 96], тобто

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge c_0\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\quad\forall x\in\Omega\quad\text{i}\quad\xi_1,\ldots,\xi_n\in\mathbb{R}^N,\tag{2.2}$$

де $c_0=\mathrm{const}>0$.

Зауважимо, що в скалярному випадку при виконанні умови (2.2) оператор із (2.1) є звичайним рівномірно еліптичним оператором і в цьому випадку лінійна частина оператора L_f із (1.1), тобто L_0 при кожному фіксованому $x\in\Omega$, є семіеліптичним [16, с. 142].

Якщо разом із умовою (2.2) виконано умову

$$B(x)\eta \cdot \eta \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma, \quad \eta \in \mathbb{R}^N, \tag{2.3}$$

то у просторі $C_0^{2,4k}(\bar{D}_T)$ поряд зі скалярним добутком

$$(u, v)_0 = \int\limits_{D_T} \left[u \cdot v + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \frac{\partial^i v}{\partial t^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dx\, dt \tag{2.4}$$

з нормою $\| \cdot \|_0 = \| \cdot \|_{W_0^{1,2k}(D_T)}$, визначеною правою частиною рівності (1.4), можна ввести такий скалярний добуток:

$$(u, v)_1 = \int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} v}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dx\, dt + \int\limits_{\Gamma} Bu \cdot v d\Gamma \tag{2.5}$$

з нормою

$$\|u\|_1^2 = \int\limits_{D_T} \left[\left(\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dx\, dt + \int\limits_{\Gamma} Bu \cdot u d\Gamma, \tag{2.6}$$

де $u, v \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T)$.

Лема 2.1. *При виконанні умов* (2.2), (2.3) *виконуються нерівності*

$$c_1 \|u\|_0 \leq \|u\|_1 \leq c_2 \|u\|_0 \quad \forall u \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T) \tag{2.7}$$

з додатними сталими c_1 *і* c_2, *не залежними від* u.

Доведення. Якщо $u \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T)$, то $u(x, 0) = 0,\ x \in \Omega$, і, отже,

$$u(x, t) = \int\limits_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} d\tau, \quad (x, t) \in D_T,$$

звідки стандартними міркуваннями отримуємо [13, с. 69]

$$\int\limits_{D_T} u^2\, dx\, dt \leq T \int\limits_{D_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx\, dt. \tag{2.8}$$

Тепер оцінимо норми $\left\| \dfrac{\partial^i u}{\partial t^i} \right\|_{L_2(D_T)}$, $i = 1, \ldots, 2k-1$, через норму $\left\| \dfrac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}} \right\|_{L_2(D_T)}$. Оскільки $u \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T)$ задовольняє рівності (1.3), то, як легко бачити,

$$\frac{\partial^i u(\cdot\,, t)}{\partial t^i} = \frac{1}{(2k - i - 1)!} \int\limits_0^t (t - \tau)^{2k-i-1} \frac{\partial^{2k} u(\cdot\,, \tau)}{\partial t^{2k}} d\tau, \quad i = 1, \ldots, 2k - 1. \tag{2.9}$$

Із (2.9), використовуючи нерівність Коші, одержуємо

$$\left(\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i}\right)^2 \le \frac{1}{((2k-i-1)!)^2}\int\limits_0^t (t-\tau)^{2(2k-i-1)}d\tau \int\limits_0^t \left(\frac{\partial^{2k} u(\cdot\,,t)}{\partial t^{2k}}\right)^2 d\tau =$$

$$= \frac{t^{4k-2i-1}}{((2k-i-1)!)^2\,(4k-2i-1)}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial^{2k} u(\cdot\,,t)}{\partial t^{2k}}\right)^2 d\tau \le$$

$$\le T^{4k-2i-1}\int\limits_0^T \left(\frac{\partial^{2k} u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}\right)^2 d\tau,$$

звідки випливає, що

$$\int\limits_0^T \left(\frac{\partial^i u(\cdot\,,t)}{\partial t^i}\right)^2 d\tau \le T^{4k-2i}\int\limits_0^T \left(\frac{\partial^{2k} u(\cdot\,,\tau)}{\partial t^{2k}}\right)^2 d\tau, \quad i = 1,\ldots,2k-1. \tag{2.10}$$

Оскільки $A_{ij} = A_{ij}(x) \in C(\overline{\Omega})$, $i,j = 1,\ldots,n$, то елементи цих матриць обмежені в $\overline{\Omega}$ і, отже,

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\cdot\xi_j \le \tilde{c}_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \quad \forall x\in\overline{\Omega} \quad \text{і} \quad \xi_1,\ldots,\xi_n \in \mathbb{R}^N \tag{2.11}$$

з додатною сталою $\tilde{c}_0$, не залежною від $x \in \overline{\Omega}$ і $\xi_1,\ldots,\xi_n \in \mathbb{R}^N$.

Із (2.2) і (2.11) випливає, що для довільного $u \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T)$

$$c_0 \int\limits_{D_T} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt \le \int\limits_{D_T} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dxdt \le$$

$$\le \tilde{c}_0 \int\limits_{D_T} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dxdt. \tag{2.12}$$

Згідно з (2.3) і теоремою вкладення для сліду $v|_\Gamma$ вектор-функції $v \in W_2^1(D_T)$ маємо [13, с. 72]

$$0 \le \int\limits_\Gamma B(x)v\cdot v d\Gamma \le \tilde{c}_3 \int\limits_{D_T}\left[v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right] dx\,dt \tag{2.13}$$

з додатною сталою $\tilde{c}_3$, не залежною від v.

Зрештою, з (1.4), (2.4), (2.6), (2.8), (2.12), (2.13) легко випливає (2.7).

Лему 2.1 доведено.

***Зауваження* 2.1.** Згідно з лемою 2.1, якщо поповнити простір $C_0^{2,2k}(\bar{D}_T)$ за нормою (2.5), то, зважаючи на (2.4), одержуємо той самий гільбертів простір $W_0^{1,2k}(D_T)$ з еквівалентними скалярними добутками (2.4), (2.5).

Розглянемо умову

$$\lim_{|u|\to\infty} \inf \frac{u\cdot f(u)}{u^2} \ge 0. \tag{2.14}$$

Лема 2.2. *Нехай $F \in L_2(D_T)$ і виконано умови* (1.5), (1.6), (2.2), (2.3) *і* (2.14). *Тоді для будь-якого слабкого узагальненого розв'язку $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ задачі* (1.1)–(1.3) *має місце апріорна оцінка*

$$\|u\|_0 = \|u\|_{W_0^{1,2k}(D_T)} \leq c_3 \|F\|_{L_2(D_T)} + c_4 \tag{2.15}$$

зі сталими $c_3 > 0$ і $c_4 \geq 0$, не залежними від u і F.

Доведення. Оскільки $f \in C(\mathbb{R}^N)$, то з (2.14) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $M_\varepsilon \geq 0$, що

$$u \cdot f(u) \geq -M_\varepsilon - \varepsilon u^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^N. \tag{2.16}$$

Вважаючи, що $\varphi = u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ в рівності (1.9), і беручи до уваги (2.16), (2.6), для будь-якого $\varepsilon > 0$ маємо

$$\|u\|_1^2 = -\int\limits_{D_T} u \cdot f(u)\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} F \cdot u\,dx\,dt \leq$$

$$\leq M_\varepsilon \,\mathrm{mes} D_T + \varepsilon \int\limits_{D_T} u^2\,dx\,dt + \int\limits_{D_T} \left(\frac{1}{4\varepsilon}F^2 + \varepsilon u^2\right) dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + M_\varepsilon \,\mathrm{mes} D_T + 2\varepsilon \|u\|^2_{L_2(D_T)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + M_\varepsilon \,\mathrm{mes} D_T + 2\varepsilon \|u\|^2_0. \tag{2.17}$$

Згідно з (2.7) із (2.17) випливає, що

$$c_1^2 \|u\|_0^2 \;\leq\; \|u\|_1^2 \;\leq\; \frac{1}{4\varepsilon}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + M_\varepsilon \,\mathrm{mes} D_T + 2\varepsilon \|u\|_0^2,$$

звідки при $\varepsilon = \dfrac{1}{4}c_1^2$ одержуємо

$$\|u\|_0^2 \;\leq\; 2c_1^{-4}\|F\|^2_{L_2(D_T)} + \; 2c_1^{-2} M_\varepsilon \,\mathrm{mes} D_T.$$

Із останньої нерівності випливає (2.15), де $c_3^2 = 2c_1^{-4}$ і $c_4^2 = 2c_1^{-2} M_\varepsilon \,\mathrm{mes} D_T$ при $\varepsilon = \dfrac{1}{4}c_1^2$.

Лему 2.2 доведено.

***Зауваження* 2.2.** До того, як розглянути питання про розв'язність задачі (1.1)–(1.3) у нелінійному випадку, розглянемо відповідну (1.1)–(1.3) лінійну задачу, тобто коли $f = 0$. У цьому випадку для $F \in L_2(D_T)$ аналогічним чином вводимо означення слабкого узагальненого розв'язку $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ цієї задачі, для якого має місце інтегральна рівність

$$(u,\varphi)_1 = \int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\frac{\partial^{2k}\varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} Bu \cdot \varphi d\Gamma = \int\limits_{D_T} F \cdot \varphi\,dx\,dt \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2k}(D_T). \tag{2.18}$$

З урахуванням (1.4), (2.4) і (2.7) отримуємо

$$\left|\int\limits_{D_T} F\cdot\varphi\,dx\,dt\right| \le \|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_{L_2(D_T)} \le$$

$$\le \|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_0 \le c_1^{-1}\|F\|_{L_2(D_T)}\|\varphi\|_1. \tag{2.19}$$

Згідно із зауваженням 2.1, (2.18) і (2.19) із теореми Рісса випливає існування єдиної вектор-функції $u\in \overset{\circ}{W}{}^{1,2k}_0(D_T)$, яка задовольняє рівність (2.18) для будь-якої $\varphi\in W_0^{1,2k}(D_T)$ і для норми якої справедливою є оцінка

$$\|u\|_1 \le c_1^{-1}\|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.20}$$

Завдяки (2.7) із (2.20) маємо

$$\|u\|_0 = \|u\|_{W_0^{1,2k}(D_T)} \le c_1^{-2}\|F\|_{L_2(D_T)}. \tag{2.21}$$

Таким чином, вводячи позначення $u = L_0^{-1}F$, переконуємося, що лінійній задачі, що відповідає (1.1) – (1.3), тобто при $f = 0$, відповідає лінійний обмежений оператор

$$L_0^{-1}: L_2(D_T)\to W_0^{1,2k}(D_T),$$

для норми якого згідно з (2.21) має місце оцінка

$$\|L_0^{-1}\|_{L_2(D_T)\to W_0^{1,2k}(D_T)} \le c_1^{-2}. \tag{2.22}$$

Беручи до уваги означення 1.1 і зауваження 2.2, записуємо інтегральну тотожність (1.9), еквівалентну задачі (1.1) – (1.3), у вигляді функціонального рівняння

$$u = L_0^{-1}\left[-f(u)+F\right] \tag{2.23}$$

у гільбертовому просторі $W_0^{1,2k}(D_T)$.

***Зауваження* 2.3.** Оскільки згідно з (1.4) і зауваженням 1.1 простір $W_0^{1,2k}(D_T)$ неперервно вкладений у простір $W_2^1(D_T)$, з огляду на (1.7) і зауваження 1.2 при виконанні умов (1.5), (1.6) оператор

$$K_1 = KI I_1: W_0^{1,2k}(D_T)\to L_2(D_T),$$

де $I_1: W_0^{1,2k}(D_T)\to W_2^1(D_T)$ — оператор вкладення, також є неперервним і компактним.

Запишемо рівняння (2.23) у вигляді

$$u = Au := L_0^{-1}(K_1u+F). \tag{2.24}$$

Беручи до уваги (2.23) і зауваження 2.3, робимо висновок, що оператор $A: W_0^{1,2k}(D_T)\to$ $\to W_0^{1,2k}(D_T)$ з (2.24) є неперервним і компактним. Водночас, враховуючи схему доведення апріорної оцінки (2.15), в якій $c_3^2 = 2c_1^{-4}$ і $c_4^2 = 2c_1^{-2}M_\varepsilon\,\mathrm{mes}D_T$, $\varepsilon = \dfrac{1}{4}c_1^2$, легко бачити, що для будь-якого значення параметра $\tau\in[0,1]$ і будь-якого розв'язку $u\in W_0^{1,2k}(D_T)$ рівняння $u = \tau Au$ справедлива та сама апріорна оцінка (2.15) з тими ж сталими $c_3 > 0$ і $C_4 \ge 0$, не залежними від u, F і τ. Тому згідно з теоремою Лере – Шаудера про нерухому точку [16, с. 375] рівняння (2.24), а отже і задача (1.1) – (1.3), має хоча б один слабкий узагальнений розв'язок u в просторі $W_0^{1,2k}(D_T)$. Таким чином, справджується така теорема.

Теорема 2.1. *Нехай виконано умови* (1.5), (1.6), (2.2), (2.3) *і* (2.14). *Тоді для будь-якого* $F \in L_2(D_T)$ *задача* (1.1) – (1.3) *має хоча б один слабкий узагальнений розв'язок* u *в просторі* $W_0^{1,2k}(D_T)$.

3. Єдиність розв'язку задачі (1.1) – (1.3). Розглянемо умову монотонності оператора Немицького

$$K(u) = f(u) \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N,$$

тобто

$$(K(u) - K(v))(u - v) \geq 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1}$$

***Зауваження* 3.1.** Легко перевірити, що умову (3.1) буде виконано, якщо $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \in C^1\big(\mathbb{R}^N\big)$ і матриця $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ є невід'ємно визначеною, тобто

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(u)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N), \quad u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Теорема 3.1. *Нехай вектор-функція* f *задовольняє умови* (1.5), (1.6), *а відповідний оператор Немицького* $K(u) = f(u) \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ *є монотонним. Нехай також виконано умови* (2.2) *і* (2.3). *Тоді для будь-якої вектор-функції* $f \in L_2(D_T)$ *задача* (1.1) – (1.3) *не може мати більше одного слабкого узагальненого розв'язку в просторі* $W_0^{1,2k}(D_T)$.

Доведення. Нехай $f \in L_2(D_T)$ і u_1, u_2 — два слабкі узагальнені розв'язки задачі (1.1) – (1.3) у просторі $W_0^{1,2k}(D_T)$, тобто згідно з (1.9) мають місце рівності

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} u_i}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} B u_i \cdot \varphi d\Gamma + \int\limits_{D_T} f(u_i) \cdot \varphi\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_{D_T} F \cdot \varphi\, dx\, dt \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2k}(D_T), \quad i = 1,\, 2. \tag{3.2}$$

Із (3.2) для різниці $v = u_2 - u_1$ маємо

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} v}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] dx\, dt + \int\limits_{\Gamma} B v \cdot \varphi d\Gamma =$$

$$= - \int\limits_{D_T} (f(u_2) - f(u_1)) \cdot \varphi\, dx\, dt \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2k}(D_T). \tag{3.3}$$

Покладаючи $\varphi = v \in W_0^{1,2k}(D_T)$ в рівності (3.3), згідно з (2.6) отримуємо

$$\|v\|_1 = -\int\limits_{D_T} \left(f(u_2) - f(u_1)\right)(u_2 - u_1)\,dx\,dt. \tag{3.4}$$

Оскільки оператор Немицького $K(u) = f(u)\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ за умовою теореми задовольняє нерівність (3.1), то з (3.4) з урахуванням (2.7) одержуємо

$$c_1\|v\|_0 \le \|v\|_1 \le 0,$$

звідки знаходимо, що $v = 0$, тобто $u_2 = u_1$.

Теорему 3.1 доведено.

З теорем 2.1 і 3.1 випливає така теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконано умови* (1.5), (1.6), (2.2), (2.3), (2.14) *і* (3.1). *Тоді для будь-якого $F \in L_2(D_T)$ задача* (1.1) – (1.3) *має єдиний слабкий узагальнений розв'язок u в просторі $W_0^{1,2k}(D_T)$.*

4. Випадки відсутності розв'язку задачі (1.1) – (1.3). Далі розглянемо окремий випадок системи (1.1), коли вона розщеплена в головній частині, тобто $A_{ij} = a_{ij} I_N$, де I_N — одинична матриця порядку N, а $a_{ij} = a_{ij}(x)$ — такі скалярні функції, що оператор $\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$ є еліптичним. Припустимо також, що в крайовій умови (1.2) $B = bI_N$, де b — невід'ємне число.

Розглянемо таку умову, накладену на вектор-функцію f: існують числа $l_1, \ldots, l_N$, $\sum_{i=1}^{N} |l_i| \ne 0$, такі, що

$$\sum_{i=1}^{N} l_i f_i(u) \le -\Big|\sum_{i=1}^{N} l_i u_i\Big|^{\beta} \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad 1 < \beta = \mathrm{const} < \frac{n+1}{n-1}. \tag{4.1}$$

Для простоти викладу розглянемо випадок, коли $\Omega : |x| < 1$.

Теорема 4.1. *Нехай вектор-функція f задовольняє умови* (1.5), (1.6) *і* (4.1), $F^0 = (F_1^0, \ldots, F_N^0) \in L_2(D_T)$, $G = \sum_{i=1}^{N} l_i F_i^0 \ge 0$ *і* $\|G\|_{L_2(D_T)} \ne 0$. *Тоді існує таке число $\mu_0 = \mu_0(G, \beta) > 0$, що для $\mu > \mu_0$ задача* (1.1) – (1.3) *не може мати слабкого узагальненого розв'язку в просторі $W_0^{1,2k}(D_T)$ для $F = \mu F_0$.*

Доведення. Припустимо, що умови теореми виконано і слабкий узагальнений розв'язок $u \in W_0^{1,2k}(D_T)$ задачі (1.1) – (1.3) існує для будь-якого фіксованого $\mu > 0$. Припустимо також, що $\varphi = (l_1\varphi_0, \ldots, l_N\varphi_0)$ у рівності (1.9), де φ_0 — скалярна функція, що задовольняє умови

$$\varphi_0 \in C_0^{2,4k}(\bar{D}_T), \qquad \varphi_0\big|_{\Gamma} = 0, \ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \varphi_0\big|_{D_T} > 0. \tag{4.2}$$

Простір $C_0^{2,4k}(\bar{D}_T) \subset W_0^{1,2k}(D_T)$ було введено у вступі. Тут за функцію φ_0 можна взяти функцію $\varphi_0(x,t) = \left[(1 - |x|^2)t(T - t)\right]^{2k}$.

Вважаючи $v = \sum_{i=1}^{N} l_i u_i$, беручи до уваги розщепленість системи (1.1) у головній частині і $B = BI_N$, з (1.9) отримуємо

$$\int\limits_{D_T} \left[\frac{\partial^{2k} v}{\partial t^{2k}} \frac{\partial^{2k} \varphi_0}{\partial t^{2k}} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}\right] dx\,dt + \int\limits_{\Gamma} b v \varphi_0 d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{D_T} \left(-\sum_{i=1}^{N} l_i f_i(u) \right) \varphi_0 \, dx \, dt + \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt. \tag{4.3}$$

Із (4.3) згідно з (4.2) і тим, що $V \in W_0^{1,2k}(D_T)$, в результаті інтегрування частинами маємо

$$\int\limits_{D_T} \left(-\sum_{i=1}^{N} l_i f_i(u) \right) \varphi_0 \, dx \, dt + \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt =$$

$$= \int\limits_{D_T} v \left[\frac{\partial^{2k} \varphi_0}{\partial t^{2k}} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} \right) \right] dx \, dt = \int\limits_{D_T} v L_0 \varphi_0 \, dx \, dt, \tag{4.4}$$

де L_0 — скалярний оператор, що відповідає оператору з (1.1) при $f = 0$.

Із (4.1) і (4.4) випливає, що

$$\int\limits_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 \, dx \, dt \le \int\limits_{D_T} v L_0 \, \varphi_0 \, dx \, dt - \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt. \tag{4.5}$$

Далі ми скористаємося методом пробних функцій [18, с. 10 – 12]. Якщо в нерівності Юнга з параметром $\varepsilon > 0$

$$ab \le \frac{\varepsilon}{\beta} a^{\beta} + \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} b^{\beta'}, \quad a, b \ge 0, \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta - 1},$$

покладемо $a = |u| \varphi_0^{1/\beta}, \; b = |L_0 \varphi_0| \Big/ \varphi_0^{1/\beta}$, то, взявши до уваги, що $\beta'/\beta = \beta' - 1$, матимемо

$$|v L_0 \varphi_0| = |v| \varphi_0^{1/\beta} \frac{|L_0 \varphi_0|}{\varphi_0^{1/\beta}} \le \frac{\varepsilon}{\beta} |v|^{\beta} \varphi_0 + \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \frac{|L_0 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}. \tag{4.6}$$

Із (4.5), (4.6) випливає, що

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{\beta} \right) \int\limits_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 \, dx \, dt = \frac{1}{\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \int\limits_{D_T} \frac{|L_0 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} \, dx \, dt - \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt,$$

звідки при $\varepsilon < \beta$ одержуємо

$$\int\limits_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 \, dx \, dt \le \frac{\beta}{(\beta - \varepsilon) \beta' \varepsilon^{\beta'-1}} \int\limits_{D_T} \frac{|L_0 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} \, dx \, dt - \frac{\beta \mu}{\beta - \varepsilon} \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt. \tag{4.7}$$

Враховуючи рівності $\beta' = \dfrac{\beta}{\beta - 1}$, $\beta = \dfrac{\beta'}{\beta' - 1}$, а також $\min_{0<\varepsilon<\beta} \dfrac{\beta}{(\beta - \varepsilon)\beta' \varepsilon^{\beta'-1}} = 1$, який досягається при $\varepsilon = 1$, із (4.7) знаходимо

$$\int\limits_{D_T} |v|^{\beta} \varphi_0 \, dx \, dt \le \int\limits_{D_T} \frac{|L_0 \varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}} \, dx \, dt - \beta' \mu \int\limits_{D_T} G\varphi_0 \, dx \, dt. \tag{4.8}$$

Неважко показати існування такої пробної функції φ_0, щоб поряд з (4.2)

$$\kappa_0 = \int\limits_{D_T} \frac{|L_0\varphi_0|^{\beta'}}{\varphi_0^{\beta'-1}}\, dx\, dt < \infty. \tag{4.9}$$

Справді, легко перевірити, що функція

$$\varphi_0(x,t) = \big[(1-|x|^2)t(T-t)\big]^m$$

для достатньо великого додатного m задовольняє умову (4.9).

Оскільки за умовою теореми $G \in L_2(D_T),\ \|G\|_{L_2(D_T)} \neq 0,\ G \geq 0$, і $\operatorname{mes} D_T < +\infty$, то, беручи до уваги, що $\varphi_0\,|_{D_T} > 0$, одержуємо

$$0 < \kappa_1 = \int\limits_{D_T} G\varphi_0\, dx\, dt < +\infty. \tag{4.10}$$

Позначимо через $g(\mu)$ праву частину нерівності (4.8), яка є лінійною функцією щодо μ. Тоді згідно з (4.9), (4.10) отримаємо

$$g(\mu) < 0 \qquad \text{при} \qquad \mu > \mu_0 \quad \text{і} \qquad g(\mu) > 0 \qquad \text{при} \quad \mu < \mu_0, \tag{4.11}$$

де

$$g(\mu) = \kappa_0 - \beta'\mu\kappa_1, \qquad \mu_0 = \frac{\kappa_0}{\beta'\kappa_1} > 0.$$

Згідно з (4.11) при $\mu > \mu_0$ права частина нерівності (4.8) є від'ємною, тоді як ліва частина цієї нерівності невід'ємна. Отримана суперечність доводить теорему.

Зазначимо, що при виконанні умови (4.1) умову (2.14) буде порушено. Справді, в цьому випадку достатньо взяти $u = \lambda(l_1, \ldots, l_N)$ при $\lambda \to +\infty$.

***Зауваження* 4.1.** В теоремі 4.1 для простоти припустили, що $\Omega: |x| < 1$. Проте ця теорема залишається справедливою в більш загальному випадку, коли Ω є достатньо гладкою областю. Це припущення обумовлено конструкцією пробної функції φ_0, що задовольняє умову (4.9) згідно з формулою

$$\varphi_0(x,t) = [(1-|x|^2)t(T-t)]^m \tag{4.12}$$

для достатньо великого додатного m. Якщо межу області Ω задано рівнянням $\partial\Omega: \omega(x) = 0$, де $\nabla_x\omega|_{\partial\Omega} \neq 0,\ \omega|_\Omega > 0,\ \nabla_x = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ і $\omega \in C^2(\mathbb{R}^n)$, то пробну функцію, задану рівнянням (4.12), потрібно замінити на

$$\varphi_0(x,t) = \big[\omega(x)t(T-t)\big]^m,$$

де m — достатньо велике додатне число. В цьому випадку теорема 4.1 теж залишається справедливою.

***Зауваження* 4.2.** При доведенні теореми 4.1 умову (4.1) можна замінити більш загальною умовою

$$\sum_{i=1}^{N} l_i f_i(u) \leq -d_0 \left| \sum_{i=1}^{N} l_i u_i \right|^{\beta} \quad \forall u \in \mathbb{R}^N, \quad 1 < \beta = \text{const} < \frac{n+1}{n-1}, \tag{4.13}$$

де $d_0 = \text{const} > 0$. Справді, випадок (4.13) зводиться до випадку (4.1), якщо від l_i перейти до $\tilde{l}_i$ згідно з формулою $l_i = \lambda \tilde{l}_i$, де $\lambda = d_0^{\frac{1}{1-\beta}}$. В результаті отримаємо (4.1), в якому замість l_i буде записано $\tilde{l}_i$. Тепер наведемо один клас вектор-функцій f, які задовольняють умову (4.13):

$$f_i(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} |u_j|^{\beta_{ij}} + b_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4.14}$$

де сталі числа a_{ij}, β_{ij} і b_i задовольняють нерівності

$$a_{ij} > 0, \quad 1 < \beta_{ij} < \frac{n+1}{n-1}, \qquad \sum_{i=1}^{N} b_i > 0, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{4.15}$$

У цьому випадку в (4.13) потрібно покласти $l_1 = \ldots = l_N = -1$. Справді, згідно з (4.15) виберемо сталі числа α_0 і β так, щоб

$$0 < a_0 \leq \min_{i,j} a_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \geq 0, \qquad 1 < \beta < \beta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, N. \tag{4.16}$$

Легко перевірити, що $|s|^{\beta_{ij}} \geq |s|^{\beta} - 1 \ \forall s \in (-\infty, \infty)$. Використовуючи відому нерівність [19, с. 302]

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i|^{\beta} > N^{1-\beta} \left| \sum_{i=1}^{N} y_i \right|^{\beta} \quad \forall y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \qquad \beta = \text{const} > 1,$$

згідно з (4.14) і (4.15) маємо

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(u_1, \ldots, u_N) \geq a_0 \sum_{i,j=1}^{N} |u_j|^{\beta_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} b_i \geq a_0 \sum_{i,j=1}^{N} (|u_j|^{\beta} - 1) + \sum_{i=1}^{N} b_i \geq$$
$$\geq a_0 N \sum_{j=1}^{N} |u_j|^{\beta} - a_0 N^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i \geq a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} b_i - a_0 N^2 \geq a_0 N^{2-\beta} \left| \sum_{j=1}^{N} u_j \right|^{\beta}. \tag{4.17}$$

Згідно з (4.17) робимо висновок, що при виконанні умов (4.14), (4.15) виконується нерівність (4.13), у якій $l_1 = \ldots = l_N = -1$ і $d_0 = a_0 N^{2-\beta}$.

Література

1. S. Kharibegashvili, B. Midodashvili, *A boundary value problem for higher-order semilinear partial differential equations*, Complex Var. and Elliptic Equat., **64**, № 5, 766 – 776 (2019).
2. S. Kharibegashvili, B. Midodashvili, *On the existence, uniqueness and nonexistence of solutions of one boundary value problem for a semilinear hyperbolic equation*, Ukr. Mat. Zh., **71**, № 8, 1123 – 1182 (2019).
3. S. Kharibegashvili, B. Midodashvili, *Solvability of characteristic boundary-value problems for nonlinear equations with iterated wave operator in the principal part*, Electron. J. Different. Equat., № 72, 1 – 12 (2008).
4. S. Kharibegashvili, B. Midodashvili, *On one boundary value problem for a nonlinear equation with iterated wave operator in the principal part*, Georgian Math. J., **15**, № 3, 541 – 554 (2008).
5. S. Kharibegashvili, *Boundary value problems for some classes of nonlinear wave equations*, Mem. Different. Equat. Math. Phys., **46**, 1 – 114 (2009); DOI: 10.1186/1687-1847-2013-220.
6. C. Xiangying, *Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear evolution equation of fourth order*, Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B., **16**, № 3, 251 – 258 (2001).
7. C. J. Budd, V. A. Galaktionov, J. F. Williams, *Self-similar blow-up in higher-order semilinear parabolic equations*, SIAM J. Appl. Math., **64**, № 5, 1775 – 1809 (2004).
8. A. B. Aliev, B. H. Lichaei, *Existence and nonexistence of global solutions of the Cauchy problem for higher order semilinear pseudohyperbolic equations*, J. Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl., **72**, № 7-8, 3275 – 3288 (2010).
9. Y. Z. Wang, Y. X. Wang, *Existence and nonexistence of global solutions for a class of nonlinear wave equations of higher order*, J. Nonlinear Anal.: Theory, Methods & Appl., **72**, № 12, 4500 – 4507 (2010).
10. V. A. Galactionov, E. L. Mitidieri, S. I. Pohozhaev, *Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schrodinger equations*, Chapman & Hall/CRC Monogr. and Research Notes Math. (2014).
11. T. Ma, J. Gu, L. Li, *Asymptotic behaviour of solutions to a class of fourth-order nonlinear evolution equations with dispersive and dissipative terms*, J. Inequal. and Appl., **5**, Article 318, 1 – 7 (2016).
12. G. Lin, Y. Gao, Y. Sun, *On local existence and blow-up solutions for nonlinear wave equations of higher-order Kirchhoff type with strong dissipation*, Internat. J. Modern Nonlinear Theory and Appl., **6**, № 1, 11 – 25 (2017).
13. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, Москва (1973).
14. Ф. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва (1988).
15. W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press (2000).
16. Л. Хермандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, Москва (1965).
17. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1993).
18. Э. Митидиери, С. И. Похожаев, *Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных*, Тр. Мат. ин-та РАН, **234** (2001).
19. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. 1, Москва (1969).

Одержано 26.10.21