DOI: 10.37863/umzh.v74i6.6949

УДК 512.55

Р. Бобоеску, К. Флаут (Університет Овідія в Констанці, Румунія)

СТРУКТУРА СКРУЧЕНОЇ ГРУПОВОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ АЛГЕБРИ, ОТРИМАНОЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОЦЕСУ КЕЛІ – ДІКСОНА

Starting from some ideas given in [J. W. Bales, *A tree for computing the Cayley – Dickson twist*, Missouri J. Math. Sci., **21**, № 2, 83 – 93 (2009)], in this paper we present an algorithm for computing the elements of the basis in an algebra obtained by the Cayley – Dickson process. As a consequence of this result, we prove that an algebra obtained by the Cayley – Dickson process is a twisted group algebra for the group $G = \mathbb{Z}_2^n, n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, over a field K with $\mathrm{char} K \neq 2$. We give some properties and applications of the quaternion nonassociative algebras.

Дотримуючись ідей Бейліса [J. W. Bales, *A tree for computing the Cayley – Dickson twist*, Missouri J. Math. Sci., **21**, № 2, 83 – 93 (2009)], у цій статті запропоновано алгоритм обчислення елементів базису алгебри, отриманої за допомогою процесу Келі – Діксона. Як наслідок доведено, що алгебра, отримана за допомогою процесу Келі – Діксона, є скрученою груповою алгеброю для групи $G = \mathbb{Z}_2^n$, $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$ над полем K з $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Наведено властивості і деякі застосування неасоціативних алгебр кватерніонів.

1. Вступ. Скрізь у цій статті K позначає комутативне поле з $\mathrm{char}\, K \neq 2$, а $\mathcal{E}$ — алгебру над полем K. Алгебра $\mathcal{E}$ називається *унітарною*, якщо в цій алгебрі є одиничний елемент щодо множення в алгебрі.

Множина

$$\mathcal{N}(\mathcal{E}) = \left\{ x \in \mathcal{E} / (x, a, b) = (a, x, b) = (a, b, x) = 0 \quad \text{для всіх} \quad a, b \in \mathcal{E} \right\}$$

називається *ядром* алгебри $\mathcal{E}$, де $(x, a, b) = (xa)b - x(ab)$.

Алгебра $\mathcal{E}$ називається *альтернативною*, якщо $x^2 y = x(xy)$ і $xy^2 = (xy)y$ при всіх $x, y \in \mathcal{E}$, і *гнучкою*, якщо $x(yx) = (xy)x = xyx$ при всіх $x, y \in \mathcal{E}$, а також *степенево асоціативною*, якщо підалгебра $\langle x \rangle$ з $\mathcal{E}$, породжена довільним елементом $x \in \mathcal{E}$, є асоціативною. Кожна альтернативна алгебра є гнучкою і степенево асоціативною. Унітарна алгебра $\mathcal{E} \neq K$, для кожного елемента x якої з $\alpha_x, \ \beta_x \in K$ виконується співвідношення $x^2 + \alpha_x x + \beta_x = 0$, називається *квадратичною алгеброю*. Скінченновимірна алгебра $\mathcal{E}$ є алгеброю з *діленням* тоді й лише тоді, коли $\mathcal{E}$ не містить дільників нуля (див. [5]).

Далі ми коротко опишемо *процес Келі – Діксона* і властивості алгебр, отриманих за допомогою цього процесу (див. [5, 6]).

Розглянемо скінченновимірну унітарну алгебру $\mathcal{E}$ над полем K зі *скалярною інволюцією*

$$^{-} \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad a \to \overline{a},$$

яка є лінійним відображенням з властивостями

$$\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}, \qquad \overline{\overline{a}} = a$$

і

$$a + \overline{a}, \qquad a\overline{a} \in K \cdot 1 \quad \text{для всіх} \quad a, b \in \mathcal{E}.$$

Елемент $\overline{a}$ називається *спряженим* до елемента a. Лінійна

$$\mathbf{t}\colon \mathcal{E} \to K, \quad \mathbf{t}(a) = a + \overline{a}$$

і квадратична

$$\mathbf{n}\colon \mathcal{E} \to K, \quad \mathbf{n}(a) = a\overline{a}$$

форми називаються відповідно *слідом* і *нормою* елемента a. Звідси випливає, що алгебра $\mathcal{E}$ зі скалярною інволюцією є квадратичною.

Розглянемо фіксований ненульовий елемент $\gamma \in K$. Розглянемо алгебраїчне множення на векторному просторі

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}\colon (a_1, a_2)(b_1, b_2) = \big(a_1 b_1 + \gamma \overline{b}_2 a_2, a_2 \overline{b_1} + b_2 a_1\big). \tag{1.1}$$

Отриману алгебраїчну структуру над $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}$ позначимо через $(\mathcal{E}, \gamma)$ і назвемо *алгеброю, отриманою з алгебри $\mathcal{E}$ за допомогою процесу Келі–Діксона*. Очевидно, що $\dim(\mathcal{E}, \gamma) = 2\dim \mathcal{E}$.

Нехай $x \in (\mathcal{E}, \gamma),\ x = (a_1, a_2)$. Відображення

$$^{-}\colon (\mathcal{E}, \gamma) \to (\mathcal{E}, \gamma), \quad x \to \bar{x} = (\overline{a}_1, -a_2)$$

є скалярною інволюцією алгебри $(\mathcal{E}, \gamma)$, що є продовженням інволюції $^{-}$ алгебри $\mathcal{E}$. Тоді

$$\mathbf{t}(x) = \mathbf{t}(a_1)$$

і

$$\mathbf{n}(x) = \mathbf{n}(a_1) - \gamma \mathbf{n}(a_2)$$

є відповідно *слідом* і *нормою* елемента $x \in (\mathcal{E}, \gamma)$.

Якщо ми розглянемо $\mathcal{E} = K$ і застосуємо цей процес $t,\ t \geq 1$ разів, то отримаємо алгебру над K:

$$\mathcal{E}_t = \left(\frac{\gamma_1, \ldots, \gamma_t}{K}\right).$$

За індукцією в цій алгебрі множина $\big\{1, f_1, \ldots, f_{n-1}\big\}$ при $n = 2^t$ утворює базис із властивостями

$$f_i^2 = \gamma_i 1, \qquad \gamma_i \in K, \quad \gamma_i \neq 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

і

$$f_i f_j = -f_j f_i = \beta_{ij} f_k, \qquad \beta_{ij} \in K, \qquad \beta_{ij} \neq 0, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

де β_{ij} і f_k визначаються однозначно через f_i і f_j (див. [6]).

При $t = 2$ отримуємо алгебру узагальнених кватерніонів, а при $t = 3$ — алгебру узагальнених октоніонів.

2. Структура скрученої групової алгебри для алгебри $\mathcal{E}_t$. В роботі [1] запропоновано скручене дерево для алгебри, отриманої за допомогою процесу Келі – Діксона у дійсному випадку при $\gamma_i = -1$ для всіх $i \in \{2, \ldots, n\}$. Як наслідок для згаданого часткового випадку запропоновано алгоритм для обчислення добутку двох елементів базису. Цю ж ідею була використано в роботі [2], в якій побудовано ліво-$\mathcal{E}_t$-гіперголоморфні функції. Далі ми доведемо, що алгебра $\mathcal{E}_t$ має структуру скрученої групової алгебри. Крім того, буде запропоновано алгоритм для обчислення добутку двох елементів базису в загальному випадку алгебри $\mathcal{E}_t$. Таким чином, на цьому шляху обчислення стають легшими для алгебри високої розмірності $\mathcal{E}_t$.

Означення 2.1 [4]. *Нехай $(G, \cdot)$ — скінченна група і K — поле. Скрученою груповою алгеброю для групи G над полем K є алгебра над полем K з базисом $\{a_g, g \in G\}$ таким, що*

$$a_g a_h = f(g,h) a_{g \cdot h}, \quad \textit{де} \quad g, h \in G, \quad f(g,h) \in K, \quad f(g,h) \neq 0.$$

***Зауваження* 2.1.** При $\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = -1$ і $K = \mathbb{R}$ в [1] описано, як базисні вектори перемножуються між собою в алгебрі $\mathcal{E}_t$ при $\dim \mathcal{E}_t = 2^t = n$. В [1] використано двійковий розклад нижніх індексів.

Нехай f_p, f_q — два вектори базису B і p, q — задані двійковим розкладом числа. Це означає, що p, q належать $\mathbb{Z}_2^n$ і справджуються рівності $f_p f_q = \alpha_t(p,q) f_{p \otimes q} = f_{pq}$, де:

i) $p \otimes q$ — сума p і q в групі $\mathbb{Z}_2^n$ або точніше „*винятковий або*” для двійкового розкладу чисел p і q;

ii) функція $\alpha_t : \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ називається *скрученим відображенням*.

Зауважимо, що елементи групи $\mathbb{Z}_2^n$ можна розглядати як цілі числа від 0 до $2^n - 1$ з множенням „*винятковий або*” для двійкових розкладів. Зрозуміло, що ця операція еквівалентна операції додавання в $\mathbb{Z}_2^n$.

Твердження 2.1. *Нехай $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множина натуральних чисел і $p, q, r, s, t \in \mathbb{N}$. Через $2p$ позначимо подвоєне число p, через (p) — двійковий розклад числа p, а через $(2p)(2q)$ і pq — „винятковий або” для двійкового розкладу чисел $2p$ і $2q$ і відповідно p і q. Тоді справедливі такі співвідношення:*

i) $(2p)(2q) = 2pq$;

ii) $(2p)(2q+1) = 2pq + 1$;

iii) $(2p+1)(2q) = 2pq + 1$;

iv) $(2p+1)(2q+1) = 2pq$;

v) *якщо* $p, q \leq 2^t - 1$, *то* $p(2^t + q) = 2^t + pq$;

vi) *якщо* $p, r \leq 2^t - 1$, *то* $(2^t + r)p = 2^t + rp$;

vii) *якщо* $r, s \leq 2^t - 1$, *то* $pq = (2^t + r)(2^t + s) = rs$.

Доведення проводиться безпосередніми обчисленнями з урахуванням того, що $(2p)$ є зміщенням на одну позицію вліво щодо (p), де (p) позначає двійковий розклад числа p.

Далі розглянемо алгебру $\mathcal{E}_t$ і довільні елементи $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in K$. Нехай $B = \{f_0, f_1, \ldots, f_{2^t-1}\}$ — базис алгебри $\mathcal{E}_t$. З його використанням базис алгебри $\mathcal{E}_{t+1}$ записуємо у вигляді

$$f_0 = 1 = (1,0), \quad f_1 = (f_1, 0), \ \ldots \ , f_{2^t-1} = (f_{2^t-1}, 0),$$

$$f_{2^t} = (0,1), \quad f_{2^t+1} = (0, f_1), \quad f_{2^t+2} = (0, f_2), \ldots,$$

$$f_{2^t+i} = (0, f_i), \ \ldots \ , f_{2^{t+1}-1} = (0, f_{2^t-1}).$$

Ми доведемо, що $\mathcal{E}_t$ є скрученою груповою алгеброю для групи $G = \mathbb{Z}_2^n$, $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, над полем K при $\operatorname{char} K \neq 2$.

***Приклад* 2.1.** При $t = 1$ маємо таку таблицю множення:

$\cdot$	1	f_1
1	1	f_1
f_1	f_1	γ_1

Зауважимо, що $\alpha_1(0,0) = 1, \alpha_1(0,1) = \alpha_1(1,0)$, $\alpha_1(1,1) = \gamma_1$. Крім того, $f_p f_q = \alpha_1(p,q) \times \times f_{p\otimes q} = f_{pq}$. Справді, оскільки $1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 1$ і $0 \otimes 0 = 0$, то $\mathcal{E}_t$ є скрученою алгеброю.

***Приклад* 2.2.** При $t = 2$ маємо таку таблицю множення:

$\cdot$	1	f_1	f_2	f_3
1	1	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	γ_1	f_3	$\gamma_1 f_2$
f_2	f_2	$-f_3$	γ_2	$-\gamma_2 f_1$
f_3	f_3	$-\gamma_1 f_2$	$\gamma_2 f_1$	$-\gamma_1\gamma_2$

Зауважимо, що $\alpha_2(i,j) = -\alpha_2(j,i)$при $i,j \in \{1,2,3\}$ і $\alpha_2(0,0) = \alpha_2(0,i) = \alpha_2(i,0) = = 1 = \alpha_2(1,2)$ при $i \in \{1,2,3\}$. Крім того, $\alpha_2(1,1) = \alpha_2(1,3) = \gamma_1, \alpha_2(2,2) = \alpha_2(3,2) = = \gamma_2, \alpha_2(3,3) = -\gamma_1\gamma_2$.

Твердження 2.2. *Для всіх $t \in \mathbb{N}$ визначимо скручене відображення $\alpha_t \colon \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to K$, $n = 2^t$, таке, що для двох векторів f_p, f_q з базису B, де pq — зображення „виняткoвий або" для індексів p і q, маємо $f_p f_q = \alpha_t(p,q) f_{pq}$. Для скрученого відображення α_t справедливі такі співвідношення*:

1) *якщо $p, q \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_t(p,q)$;*

2) *якщо $p \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}, q \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}, q = 2^t + r$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = = -\alpha_t(p,r)$ при $r \neq p$, $p \neq 0, r \neq 0$; якщо $r \neq p$ і $r = 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_t(p,0) = 1$; якщо $r = p \neq 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_t(p,p)$; якщо $p = r = 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_{t+1}(0, 2^t) = 1$;*

3) *якщо $p \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}, q \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}, p = 2^t + r$ і $r \neq q$, $q \neq 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = -\alpha_t(r,q)$; якщо $r = q \neq 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = -\alpha_t(r,r)$; якщо $q = 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_{t+1}(p,0) = 1$;*

4) *якщо $p \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}, q \in \big\{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^t - 1\big\}$ при $p = 2^t + r$, $q = 2^t + s$ і $r \neq s, r \neq 0, s \neq 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = \gamma_{t+1}\alpha_t(r,s)$; якщо $r = s \neq 0$, то $\alpha_{t+1}(p,p) = -\gamma_{t+1}\alpha_t(r,r)$; якщо $r = 0$, $s \neq 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = -\gamma_{t+1}\alpha_t(0,s) = -\gamma_{t+1}$; якщо $s = 0$, то $\alpha_{t+1}(p,q) = = \gamma_{t+1}\alpha_t(r,0) = \gamma_{t+1}$.*

Доведення. Використаємо індукцію по t. Припустимо, що твердження справедливі при t, і доведемо їх при $t + 1$.

Випадок 1: $p, q \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}$. У цьому випадку $f_p f_q = (f_p, 0)(f_q, 0) = (f_p f_q, 0) = = \big(\alpha_t(p,q) f_{pq}, 0\big) = \alpha_t(p,q)(f_{pq}, 0) = \alpha_t(p,q) f_{pq}$. Тому $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_t(p,q)$.

Випадок 2: $p \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}, q \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}$. Тут $q = 2^t + r$. Припускаючи, що $r \neq p$, $p \neq 0$, $r \neq 0$, маємо $f_p f_q = f_p f_{2^t + r} = (f_p, 0)(0, f_r) = (0, f_r f_p) = -(0, f_p f_r) = = -(0, \alpha_t(p,r) f_{pr}) = -\alpha_t(p,r)(0, f_{pr}) = -\alpha_t(p,r) f_{pq}$. Тоді $\alpha_{t+1}(p,q) = -\alpha_t(p,r)$.

Якщо $r \neq p$ і $r = 0$, то $f_p f_q = f_p f_{2^t} = (f_p, 0)(0, f_0) = (0, f_0 f_p) = \alpha_t(p,0)(0, f_p) = = \alpha_t(p,0) f_{2^t + p}$. Тому $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_t(p,0)$.

Якщо $r = p \neq 0$, то $f_p f_q = f_p f_{2^t + p} = (f_p, 0)(0, f_p) = (0, f_p f_p) = \alpha_t(p,p)(0,1) = \alpha_t(p,p) f_{2^t}$. Тому $\alpha_{t+1}(p,q) = \alpha_t(p,p)$.

Якщо $r \neq p$ і $r = 0$, то $f_pf_q = f_pf_{2^t} = (f_p, 0)(0, f_0) = (0, f_0f_p) = \alpha_t(p, 0)(0, f_p) = \alpha_t(p, 0)f_{2^t+p}$. Тоді $\alpha_{t+1}(p, q) = \alpha_t(p, 0)$.

Якщо $r = p \neq 0$, то $f_pf_q = f_pf_{2^t+p} = (f_p, 0)(0, f_p) = (0, f_pf_p) = \alpha_t(p, p)(0, 1) = \alpha_t(p, p)f_{2^t}$. Тому $\alpha_{t+1}(p, q) = \alpha_t(p, p)$.

Випадок 3: $p \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}, q \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}$. Тут $p = 2^t + r$.

Якщо $r \neq q$, то $f_pf_q = f_{2^t+r}f_q = (0, f_r)(f_q, 0) = (0, f_r\overline{f_q}) = -(0, f_rf_q) = -(0, \alpha_t(r, q)f_{rq}) = -\alpha_t(r, q)f_{pq}$. Тоді $\alpha_{t+1}(p, q) = -\alpha_t(r, q)$.

Якщо $r = q$, то $f_pf_q = f_{2^t+r}f_r = (0, f_r)(f_r, 0) = (0, f_r\overline{f_r}) = -\alpha_t(r, r)(0, 1) = -\gamma_rf_{2^t}$. Отже, $\alpha_{t+1}(p, q) = -\alpha_t(r, r)$.

Випадок 4: $p \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}$, $q \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}$ при $p = 2^t + r$ і $q = 2^t + s$.

Якщо $r \neq s$, $r \neq 0$, $s \neq 0$, то $f_pf_q = f_{2^t+r}f_{2^t+s} = (0, f_r)(0, f_s) = (\gamma_{t+1}\overline{f_s}f_r, 0) = \gamma_{t+1}(f_rf_s, 0) = \gamma_{t+1}\alpha_t(r, s)f_{rs}$. Тому $\alpha_{t+1}(p, q) = \gamma_{t+1}\alpha_t(r, s)$.

Якщо $r = s \neq 0$, то $f_pf_q = f_{2^t+r}f_{2^t+r} = (0, f_r)(0, f_r) = (\gamma_{t+1}\overline{f_r}f_r, 0) = -\gamma_{t+1}(f_rf_r, 0) = -\gamma_{t+1}\alpha_t(r, r)f_0$. Тоді $\alpha_{t+1}(p, p) = -\gamma_{t+1}\alpha_t(r, r)$.

Якщо $r = 0$, то $f_pf_q = f_{2^t}f_{2^t+s} = (0, f_0)(0, f_s) = (\gamma_{t+1}\overline{f_s}f_0, 0) = -\gamma_{t+1}\alpha_t(0, s)(f_s, 0) = -\gamma_{t+1}\alpha_t(0, s)f_s$. Тому $\alpha_{t+1}(p, q) = -\gamma_{t+1}\alpha_t(0, s)$.

Якщо $s = 0$, то $f_pf_q = f_{2^t+r}f_{2^t} = (0, f_r)(0, f_0) = (\gamma_{t+1}f_0f_r, 0) = \gamma_{t+1}\alpha_t(r, 0)f_{rs}$. Таким чином, $\alpha_{t+1}(p, q) = \gamma_{t+1}\alpha_t(r, 0)$.

Якщо $r = s = 0, \alpha_{t+1}(p, p) = \alpha_{t+1}(2^t, 2^t)$, то $f_pf_q = f_{2^t}f_{2^t} = (0, f_0)(0, f_0) = (\gamma_{t+1}f_0f_0, 0) = \gamma_{t+1}\alpha_t(0, 0) = \gamma_{t+1}$.

Твердження 2.3. *Для всіх* $t \in \mathbb{N}$ *визначимо відображення знака* $\theta_t\colon \mathbb{Z}_2^n \times \mathbb{Z}_2^n \to \{-1, 1\}$, $n = 2^t$, *таке, що для двох векторів* f_p, f_q *з базису* B *добутку* f_pf_q *відповідає знак* $\theta_t(p, q)$. *Для відображення знака* θ_t *справедливі такі співвідношення*:

1) *якщо* $p, q \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = \theta_t(p, q)$;

2) *якщо* $p \in \{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}, q \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}, q = 2^t + r$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = -\theta_t(p, r)$ *при* $r \neq p$, $p \neq 0, r \neq 0$; *якщо* $r \neq p$ *і* $r = 0$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = \theta_t(p, 0) = +1$; *якщо* $r = p \neq 0$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = \theta_t(p, p)$;

3) *якщо* $p \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}$, $q \in \{0, 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}, p = 2^t + r$ *і* $r \neq q$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = -\theta_t(r, q)$; *якщо* $r = q$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = -\theta_t(r, r)$;

4) *якщо* $p \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}$, $q \in \{2^t, 2^t + 1, \ldots, 2^{t+1} - 1\}$ *при* $p = 2^t + r$, $q = 2^t + s$ *і* $r \neq s$, $r \neq 0, s \neq 0$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = \theta_t(r, s)$; *якщо* $r = s \neq 0$, *то* $\theta_{t+1}(p, p) = -\theta_t(r, r)$; *якщо* $r = 0$, $s \neq 0$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = -\theta_t(0, s) = -1$; *якщо* $s = 0$, *то* $\theta_{t+1}(p, q) = \theta_t(r, 0) = +1$.

Доведення. Твердження випливає з твердження 2.2, якщо покласти $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{t+1} = 1$.

Теорема 2.1. *Алгебра* $\mathcal{E}_t$ *є скрученою груповою алгеброю для групи* $G = \mathbb{Z}_2^n$, $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, *над полем* K.

Доведення. Твердження теореми випливає з тверджень 2.2 і 2.3.

Зауваження **2.2.** 1. Нехай при позначеннях із наведених вище тверджень $(p) = i_ti_{t-1}\ldots i_1$ і $(q) = j_tj_{t-1}\ldots j_1$ — двійкові розклади індексів при векторах f_p, f_q з базису B. Коефіцієнти $\alpha_t(p, q)$ мають знак, який визначається з твердження 2.3, і дорівнюють добутку елементів із множини $\{1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t\}$. З формули множення (1.1) випливає, що елемент γ_m, $m \in \{1, 2, \ldots, t\}$, з'являється в алгебрі $\mathcal{E}_t$ на m-му кроці і є коефіцієнтом при добутку $f_pf_q = \alpha_t(p, q)f_{pq}$ тоді й лише тоді, коли $i_m = j_m = 1$. Справді, якщо $i_m = j_m = 1$, то множення на m-му кроці процесу Келі–Діксона має вигляд $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1 + \gamma_m\overline{b}_2a_2, a_2\overline{b_1} + b_2a_1)$.

Тобто $f_p f_q = f_{2^m+r} f_{2^m+s} = (0, f_r)(0, f_s) = (\gamma_m \overline{f_s} f_r, 0) = (\gamma_m f_r f_s, 0) = \gamma_m \alpha_{m-1}(r, s) f_{rs}$ при $r, s \leq 2^t - 1, r, s \in \mathbb{N}$.

2. Маємо $\theta_1(i, j) = +1$ при $i, j \in \{0, 1\}$.

Алгоритм. Нехай $B = \{f_0, f_1, \ldots, f_{2^t-1}\}$ — базис алгебри $\mathcal{E}_t$. Обчислимо $f_p f_q, p, q \in \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^t - 1\}$,

Нехай $(p) = i_t i_{t-1} \ldots i_1$ і $(q) = j_t j_{t-1} \ldots j_1$ — двійкові розклади індексів p і q, а $k_1, k_2, \ldots, k_z$ позначають такі індекси, що $i_{k_1} = j_{k_1} = 1, \ldots, i_{k_z} = j_{k_z} = 1$. Тому $f_p f_q = \theta_t(p, q)\gamma_{k_1}\gamma_{k_2} \ldots \ldots \gamma_{k_z} f_{pq}$, де знак $\theta_t(p, q)$ визначається твердженням 2.2.

***Приклад* 2.3.** i) Розглянемо алгебру узагальнених октоніонів з таблицею множення

$\cdot$	1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
1	1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1	f_1	γ_1	f_3	$\gamma_1 f_2$	f_5	$\gamma_1 f_4$	$-f_7$	$-\gamma_1 f_6$
f_2	f_2	$-f_3$	γ_2	$-\gamma_2 f_1$	f_6	f_7	$\gamma_2 f_4$	$\gamma_2 f_5$
f_3	f_3	$-\gamma_1 f_2$	$\gamma_2 f_1$	$-\gamma_1 \beta$	f_7	$\gamma_1 f_6$	$-\gamma_2 f_5$	$-\gamma_1\gamma_2 f_4$
f_4	f_4	$-f_5$	$-f_6$	$-f_7$	γ_3	$-\gamma_3 f_1$	$-\gamma_3 f_2$	$-\gamma_3 f_3$
f_5	f_5	$-\gamma_1 f_4$	$-f_7$	$-\gamma_1 f_6$	$\gamma_3 f_1$	$-\gamma_1\gamma_3$	$\gamma_3 f_3$	$\gamma_1\gamma_3 f_2$
f_6	f_6	f_7	$-\gamma_2 f_4$	$\gamma_2 f_5$	$\gamma_3 f_2$	$-\gamma_3 f_3$	$-\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_2\gamma_3 f_1$
f_7	f_7	$\gamma_1 f_6$	$-\gamma_2 f_5$	$\gamma_1\gamma_2 f_4$	$\gamma_3 f_3$	$-\gamma_1\gamma_3 f_2$	$\gamma_2\gamma_3 f_1$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

1. Обчислимо $f_3 f_5$. Двійкові розклади індексів 3 і 5 мають вигляд $(3) = 011$, $(5) = 101$. Таким чином, $i_1 = j_1 = 1 \to \gamma_1$ і $(3)(5) = 110 \to 6$. Для знака $\theta_3(3, 5)$ маємо $\theta_3(3, 5) = = -\theta_2(3, 1) = +\theta_1(1, 1) = +1$. Отже, $f_3 f_5 = \gamma_1 f_6$.

2. Обчислимо $f_6 f_7$. Двійкові розклади індексів 6 і 7 мають вигляд $(6) = 110$, $(7) = 111$. Таким чином, $i_2 = j_2 = 1 \to \gamma_2$, $i_3 = j_3 = 1 \to \gamma_3$ і $(6)(7) = 001 \to 1$. Для знака $\theta_3(6, 7)$ маємо $\theta_3(6, 7) = \theta_2(2, 3) = -\theta_1(0, 1) = -1$. Отже, $f_6 f_7 = -\gamma_2\gamma_3 f_1$.

3. Обчислимо $f_6 f_2$. Двійкові розклади індексів 6 і 2 мають вигляд $(6) = 110$, $(2) = 010$. Таким чином, $i_2 = j_2 = 1 \to \gamma_2$ і $(6)(2) = 100 \to 4$. Для знака $\theta_3(6, 2)$ маємо $\theta_3(6, 2) = = -\theta_2(2, 2) = -\theta_1(1, 1) = -1$. Отже, $f_6 f_2 = -\gamma_2 f_4$.

ii) Розглянемо алгебру узагальнених седеніонів з таблицею множення

$\cdot$	1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1	1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
f_1	f_1	γ_1	f_3	$\gamma_1 f_2$	f_5	$\gamma_1 f_4$	$-f_7$	$-\gamma_1 f_6$	f_9	$\gamma_1 f_8$	$-f_{11}$	$\gamma_1 f_{10}$	$-f_{13}$	$-\gamma_1 f_{12}$	f_{15}	$\gamma_1 f_{14}$
f_2	f_2	$-f_3$	γ_2	$-\gamma_2 f_1$	f_6	f_7	$\gamma_2 f_4$	$\gamma_2 f_5$	f_{10}	f_{11}	$\gamma_2 f_8$	$\gamma_2 f_9$	$-f_{14}$	$-f_{15}$	$-\gamma_2 f_{12}$	$-\gamma_2 f_{13}$
f_3	f_3	$-\gamma_1 f_2$	$\gamma_2 f_1$	$-\gamma_1 \beta$	f_7	$\gamma_1 f_6$	$-\gamma_2 f_5$	$-\gamma_1\gamma_2 f_4$	f_{11}	$\gamma_1 f_{10}$	$-\gamma_2 f_9$	$-\gamma_1\gamma_2 f_8$	$-f_{15}$	$-\gamma_1 f_{14}$	$\gamma_2 f_{13}$	$\gamma_1\gamma_2 f_{12}$
f_4	f_4	$-f_5$	$-f_6$	$-f_7$	γ_3	$-\gamma_3 f_1$	$-\gamma_3 f_2$	$-\gamma_3 f_3$	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	$\gamma_3 f_8$	$\gamma_3 f_9$	$\gamma_3 f_{10}$	$\gamma_3 f_{11}$
f_5	f_5	$-\gamma_1 f_4$	$-f_7$	$-\gamma_1 f_6$	$\gamma_3 f_1$	$-\gamma_1\gamma_3$	$\gamma_3 f_3$	$\gamma_1\gamma_3 f_2$	f_{13}	$\gamma_1 f_{12}$	f_{15}	$-\gamma_1 f_{14}$	$-\gamma_3 f_9$	$-\gamma_1\gamma_3 f_8$	$-\gamma_3 f_{11}$	$-\gamma_1\gamma_3 f_{10}$
f_6	f_6	f_7	$-\gamma_2 f_4$	$\gamma_2 f_5$	$\gamma_3 f_2$	$-\gamma_3 f_3$	$-\gamma_2\gamma_3$	$-\gamma_2\gamma_3 f_1$	f_{14}	f_{15}	$\gamma_2 f_{12}$	$-\gamma_2 f_{13}$	$-\gamma_3 f_{10}$	$\gamma_3 f_{11}$	$-\gamma_2\gamma_3 f_8$	$\gamma_2\gamma_3 f_9$
f_7	f_7	$\gamma_1 f_6$	$-\gamma_2 f_5$	$\gamma_1\gamma_2 f_4$	$\gamma_3 f_3$	$-\gamma_1\gamma_3 f_2$	$\gamma_2\gamma_3 f_1$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3$	f_{15}	$\gamma_1 f_{14}$	$\gamma_2 f_{13}$	$-\gamma_1\gamma_2 f_{12}$	$-\gamma_3 f_{11}$	$\gamma_1\gamma_3 f_{10}$	$-\gamma_2\gamma_3 f_9$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_3 f_8$
f_8	f_8	$-f_9$	$-f_{10}$	$-f_{11}$	$-f_{12}$	$-f_{13}$	$-f_{14}$	$-f_{15}$	γ_4	$-\gamma_4 f_1$	$-\gamma_4 f_2$	$-\gamma_4 f_3$	$-\gamma_4 f_4$	$-\gamma_4 f_5$	$-\gamma_4 f_6$	$-\gamma_4 f_7$
f_9	f_9	$-\gamma_1 f_8$	$-f_{11}$	$-\gamma_1 f_{10}$	$-f_{13}$	$-\gamma_1 f_{12}$	$-f_{15}$	$-\gamma_1 f_{14}$	$\gamma_4 f_1$	$-\gamma_1\gamma_4$	$\gamma_4 f_3$	$\gamma_1\gamma_4 f_2$	$\gamma_4 f_5$	$\gamma_1\gamma_4 f_4$	$-\gamma_4 f_7$	$-\gamma_1\gamma_4 f_6$
f_{10}	f_{10}	f_{11}	$-\gamma_2 f_8$	$\gamma_2 f_9$	$-f_{14}$	$-f_{15}$	$-\gamma_2 f_{12}$	$-\gamma_2 f_{13}$	$\gamma_4 f_2$	$-\gamma_4 f_3$	$-\gamma_2\gamma_4$	$-\gamma_2\gamma_4 f_1$	$\gamma_4 f_6$	$\gamma_4 f_7$	$\gamma_2\gamma_4 f_4$	$\gamma_2\gamma_4 f_5$
f_{11}	f_{11}	$-\gamma_1 f_{10}$	$-\gamma_2 f_9$	$\gamma_1\gamma_2 f_8$	$-f_{15}$	$\gamma_1 f_{14}$	$\gamma_2 f_{13}$	$\gamma_1\gamma_2 f_{12}$	$\gamma_4 f_3$	$-\gamma_1\gamma_4 f_2$	$\gamma_2\gamma_4 f_1$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_4$	$\gamma_4 f_7$	$\gamma_1\gamma_4 f_6$	$-\gamma_2\gamma_4 f_5$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_4 f_4$
f_{12}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	$-\gamma_3 f_8$	$\gamma_3 f_9$	$\gamma_3 f_{10}$	$\gamma_3 f_{11}$	$\gamma_4 f_4$	$-\gamma_4 f_5$	$-\gamma_4 f_6$	$-\gamma_4 f_7$	$-\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_3\gamma_4 f_1$	$-\gamma_3\gamma_4 f_2$	$\gamma_3\gamma_4 f_3$
f_{13}	f_{13}	$\gamma_1 f_{12}$	f_{15}	$\gamma_1 f_{14}$	$-\gamma_3 f_9$	$\gamma_1\gamma_3 f_8$	$-\gamma_3 f_{11}$	$-\gamma_1\gamma_3 f_{10}$	$\gamma_4 f_5$	$-\gamma_1\gamma_4 f_4$	$-\gamma_4 f_7$	$-\gamma_1\gamma_4 f_6$	$\gamma_3\gamma_4 f_1$	$\gamma_1\gamma_3\gamma_4$	$\gamma_3\gamma_4 f_3$	$\gamma_1\gamma_3\gamma_4 f_2$
f_{14}	f_{14}	$-f_{15}$	$\gamma_2 f_{12}$	$-\gamma_2 f_{13}$	$-\gamma_3 f_{10}$	$\gamma_3 f_{11}$	$\gamma_2\gamma_3 f_8$	$\gamma_2\gamma_3 f_9$	$\gamma_4 f_6$	$\gamma_4 f_7$	$-\gamma_2\gamma_4 f_4$	$\gamma_2\gamma_4 f_5$	$\gamma_3\gamma_4 f_2$	$-\gamma_3\gamma_4 f_3$	$\gamma_2\gamma_3\gamma_4$	$-\gamma_2\gamma_3\gamma_4 f_1$
f_{15}	f_{15}	$-\gamma_1 f_{14}$	$\gamma_2 f_{13}$	$-\gamma_1\gamma_2 f_{12}$	$-\gamma_3 f_{11}$	$\gamma_1\gamma_3 f_{10}$	$-\gamma_2\gamma_3 f_9$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3 f_8$	$\gamma_4 f_7$	$\gamma_1\gamma_4 f_6$	$-\gamma_2\gamma_4 f_5$	$\gamma_1\gamma_2\gamma_4 f_4$	$-\gamma_3\gamma_4 f_2$	$-\gamma_1\gamma_3\gamma_4 f_2$	$\gamma_2\gamma_3\gamma_4 f_1$	$-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$

1. Обчислимо $f_4 f_{12}$. Двійкові розклади індексів 4 і 12 мають вигляд $(4) = 0100$, $(12) = 1100$. Таким чином, $i_3 = j_3 = 1 \to \gamma_3$ і $(4)(7) = 1000 \to 8$. Для знака маємо $\theta_4(4, 12) = \theta_3(4, 4) = \theta_2(0, 0) = +1$. Отже, $f_4 f_{12} = \gamma_3 f_8$.

2. Обчислимо $f_{10} f_3$. Двійкові розклади індексів 10 і 3 мають вигляд $(10) = 1010$, $(3) = 0011$. Таким чином, $i_2 = j_2 = 1 \to \gamma_2$ і $(10)(3) = 1001 \to 9$. Для знака маємо $\theta_4(10, 3) = -\theta_3(2, 3) = -\theta_2(2, 3) = +\theta_1(0, 1) = +1$. Отже, $f_{10} f_3 = \gamma_2 f_9$.

3. Обчислимо $f_9 f_{14}$. Двійкові розклади індексів 9 і 14 мають вигляд $(9) = 1001$, $(14) = 1110$. Таким чином, $i_4 = j_4 = 1 \to \gamma_4$ і $(9)(14) = 0111 \to 7$. Для знака маємо $\theta_4(9, 14) = \theta_3(1, 6) = -\theta_2(1, 2) = -\theta_1(1, 1) = -1$. Отже, $f_9 f_{14} = -\gamma_4 f_7$.

3. Деякі зауваження щодо алгебр неасоціативних кватерніонів. Нехай далі K — довільне поле з $\operatorname{char} K \neq 2$. Алгебра неасоціативних кватерніонів є 4-вимірною K-алгеброю A з одиницею, ядро якої дорівнює сепарабельному квадратично розширеному полю E з K. Такі алгебри є алгебрами з діленням, не є квадратичними та степенево асоціативними. Також вони не є степенево асоціативними третього порядку (див. [3, 7]).

Нехай $K \subset E$ — сепарабельне квадратичне розширення поля з інволюцією $\sigma\colon E \to E$, $\sigma(x) = \overline{x}$, тобто автоморфізм з фіксованим K. Розглянемо $\gamma \in E - K$. На векторному просторі $\mathbf{H} = E \oplus E$ визначимо таке множення:

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = \big(a_1 b_1 + \gamma(\overline{b}_2 a_2), a_2 \overline{b_1} + b_2 a_1\big). \tag{L}$$

Тому $\mathbf{H} = E \oplus E$ стає алгеброю неасоціативних кватерніонів над K з $(1, 0)$ в якості одиничного елемента (див. [3]). Ядром цієї алгебри є E.

***Зауваження* 3.1.** Покладемо $\alpha \in K$. Нехай $E = K(\sqrt{\alpha})$ і $\gamma \in E - K$. Тоді $n(x) = x\sigma(x) = x\overline{x}, x \in E$. Якщо $x \in \mathbf{H}$ таке, що $xx^2 \neq x^2 x$, то $\mathbf{H}$ не є (третього порядку) степенево асоціативною і, відповідно, $\mathbf{H}$ є неасоціативною і не гнучкою алгеброю.

***Зауваження* 3.2.** Замість E розглянемо довільну унітарну алгебру A над полем K з інволюцією $\sigma\colon A \to A$. Нехай оборотний елемент $\gamma \in A$ такий, що $\sigma(\gamma) \neq \gamma$. Тоді на просторі з векторною структурою $\mathcal{A} = A \oplus A$ отримаємо алгебраїчну структуру з правилами множення

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = \big(a_1 b_1 + \gamma(\overline{b}_2 a_2), a_2 \overline{b_1} + b_2 a_1\big), \tag{L}$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = \big(a_1 b_1 + \overline{b}_2(\gamma a_2), a_2 \overline{b_1} + b_2 a_1\big), \tag{M}$$

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = \big(a_1 b_1 + (\overline{b}_2 a_2)\gamma, a_2 \overline{b_1} + b_2 a_1\big), \tag{R}$$

в залежності від того, де розташовано елемент γ у процесі подвоєння.

Таким чином, ми можемо продовжити процес подвоєння, отримуючи алгебри з розмірністю, що дорівнює подвійній розмірності A. Такі алгебри позначимо через $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_M$, $\mathcal{A}_R$ залежно від вибору множення. Ці алгебри не ізоморфні, неасоціативні, з діленням і не гнучкі (див. [3]).

Твердження 3.1. *При позначеннях, уведених у зауваженні* 3.1, *нехай* $\mathbf{H}$ — *алгебра неасоціативних кватерніонів з базисом* $\{1, f_1, f_2, f_3\}$ *й інволюцією* σ *такою, що* $f_i x = \sigma(x) f_i$, $i \in \{2, 3\}$, $\gamma \in E - K$ *при* $\sigma(\gamma) \neq \gamma$, *та таблицею множення*

$\cdot$	1	f_1	f_2	f_3
1	1	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	α	f_3	αf_2
f_2	f_2	$-f_3$	γ	$-\gamma f_1$
f_3	f_3	$-\alpha f_2$	γf_1	$-\alpha\gamma$

Тоді справедливі такі співвідношення:

i) $f_i^2 f_i \neq f_i f_i^2$ *для всіх* $i \in \{2, 3\}$;

ii) *елементи базису задовольняють правила гнучкості*

$$f_i(f_k f_i) = (f_i f_k) f_i \quad \text{для всіх} \quad i, k \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq k. \tag{F}$$

Доведення. i) Маємо $f_2^2 f_2 = \gamma f_2$ і $f_2 f_2^2 = f_2 \gamma = \sigma(\gamma) f_2$. У такий же спосіб отримуємо $f_3^2 f_3 = -\alpha\gamma f_3$ і $f_3 f_3^2 = -f_3 \alpha\gamma = -\alpha\sigma(\gamma) f_3$.

ii) Оскільки γ належить ядру $\mathbf{H}$, то

$$f_1(f_2 f_1) = f_1(-f_3) = -\alpha f_2 \quad \text{і} \quad (f_1 f_2) f_1 = f_3 f_1 = -\alpha f_2,$$

$$f_2(f_1 f_2) = f_2 f_3 = -\gamma f_1 \quad \text{і} \quad (f_2 f_1) f_2 = -f_3 f_2 = -\gamma f_1,$$

$$f_1(f_3 f_1) = f_1(-\alpha f_2) = -\alpha f_3 \quad \text{і} \quad (f_1 f_3) f_1 = \alpha f_2 f_1 = -\alpha f_3,$$

$$f_3(f_1 f_3) = f_3(\alpha f_2) = \alpha f_3 f_2 = \alpha\gamma f_1 \quad \text{і} \quad (f_3 f_1) f_3 = -\alpha f_2 f_3 = \alpha\gamma f_1,$$

$$f_2(f_3 f_2) = f_2(\gamma f_1) = \gamma f_2 f_1 = -\gamma f_1 f_2 \quad \text{і} \quad (f_2 f_3) f_2 = (-\gamma f_1) f_2,$$

$$f_3(f_2 f_3) = -\gamma f_3 f_1 \quad \text{і} \quad (f_3 f_2) f_3 = (\gamma f_1) f_3 = \gamma f_1 f_3 = -\gamma f_3 f_1.$$

***Приклад* 3.1.** Для $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ розглянемо на $A = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \oplus \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ таблицю множення, задану у твердженні 3.1. Тоді $i^2 = 2, j^2 = \sqrt{2}, k^2 = -2\sqrt{2}$, тобто A над $\mathbb{Q}$ є алгеброю неасоціативних кватерніонів з діленням і базисом $\{1, i, j, k\}$. Таким чином, отримуємо таку таблицю множення:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	2	k	$2j$
j	j	$-k$	$\sqrt{2}$	$-i\sqrt{2}$
k	k	$-2j$	$i\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$

Тут

$$k = ij = (i, 0)(0, 1) = (0, i),$$

$$ik = (i, 0)(0, i) = (0, i^2) = (0, 2) = 2j,$$

$$jk = (0, 1)(0, i) = (-i\sqrt{2}, 0) = -i\sqrt{2},$$

$$k^2 = (0, i)(0, i) = (\sqrt{2} i^2, 0) = -2\sqrt{2}.$$

Зауважимо, що $jj^2 \neq j^2 j$. Справді, оскільки $jx = \sigma(x) j$ при всіх $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, то $jj^2 = j\sqrt{2} = -\sqrt{2}j$ і $j^2 j = \sqrt{2} j$, тобто вони не рівні. Обчислимо $i\left(\sqrt{2} i\right) = -i(i\sqrt{2}) = i(jk)$ і $(i\sqrt{2})i = -(jk)\,i = i(jk)$. Отже, ми визначили алгебру $A = \left(\dfrac{2, \sqrt{2}}{\mathbb{Q}}\right)$. Таким чином, $A = \left(\dfrac{2, \sqrt{2}}{\mathbb{Q}}\right)$ є алгеброю неасоціативних кватерніонів з діленням.

Висновки. В цій роботі ми довели, що алгебра, отримана за допомогою процесу Келі – Діксона, є скрученою груповою алгеброю для групи $G = \mathbb{Z}_2^n$, $n = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$, над полем K з $\operatorname{char} K \neq 2$. Крім того, запропоновано алгоритм, що дозволяє легше знайти добуток двох елементів базису. Таким чином, обчислення стають легшими при збільшенні розмірності алгебри $\mathcal{E}_t$. В останньому пункті запропоновано деякі властивості і застосування алгебри неасоціативних кватерніонів. Оскільки алгебра неасоціативних кватерніонів застосовується недостатньо, ми вважаємо, що їх вивчення може надати можливість отримати нові хороші результати.

Література

1. J. W. Bales, *A tree for computing the Cayley – Dickson twist*, Missouri J. Math. Sci., **21**, № 2, 83 – 93 (2009).
2. C. Flaut, V. Shpakivskyi, *Holomorphic functions in generalized Cayley – Dickson algebras*, Adv. Appl. Clifford Algebras, **25**, № 1, 95 – 112 (2015).
3. S. Pumplün, *How to obtain division algebras from a generalized Cayley – Dickson doubling process*, J. Algebra, **402**, 406 – 434 (2014).
4. W. F. Reynolds, *Twisted group algebras over arbitrary fields*, Illinois J. Math., **3**, 91 – 103 (1971).
5. R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Acad. Press, New York (1966).
6. R. D. Schafer, *On the algebras formed by the Cayley – Dickson process,* Amer. J. Math., **76**, 435 – 446 (1954).
7. W. C. Waterhouse, *Nonassociative quaternion algebras*, Algebras, Groups and Geometries, **4**, 365 – 378 (1987).

Одержано 09.10.21