DOI: 10.37863/umzh.v74i6.6955

УДК 517.983

С. Л. Гефтер*, **О. Л. Півень** (Харьків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна)

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ В МОДУЛІ ФОРМАЛЬНИХ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ТА У КІЛЬЦІ ФОРМАЛЬНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

We obtain the general form of continuous linear mappings acting in the module of formal generalized functions over a commutative ring and commuting with the differentiation or shift operator. We also prove that a continuous linear mapping acting in the ring of formal power series over the valuation ring of a complete non-Archimedian field and commuting with the differentiation is a differential operator of infinite order.

Одержано загальний вигляд неперервних лінійних відображень, що діють у модулі формальних узагальнених функцій над комутативним кільцем та комутують з оператором диференціювання або зсуву. Доведено, що неперервне лінійне відображення, яке діє у кільці формальних степеневих рядів над кільцем нормування повного неархімедового поля та комутує з оператором диференціювання, є диференціальним оператором нескінченного порядку.

1. Вступ. Нехай K — довільне комутативне кільце з одиницею, $K[x]$ і $K\big[[x]\big]$ — кільце поліномів та кільце формальних степеневих рядів із коефіцієнтами з K і $K[x]'$ — модуль формальних узагальнених функцій (див. означення 1). У даній статті вивчаються диференціальні оператори нескінченного порядку вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$ у модулі $K[x]'$ і кільці $K\big[[x]\big]$ (див. пункти 3, 4). Диференціальні оператори нескінченного порядку вивчались з різних точок зору у багатьох роботах. Наприклад, у книзі [1] (гл. 6, §1, п. 1) показано, що будь-який лінійний оператор у кільці поліномів, що комутує із зсувами, є диференціальним оператором нескінченного порядку. Історичні відомості про диференціальні оператори нескінченного порядку в різних просторах цілих та голоморфних функцій можна знайти у [2, 3].

У пункті 2 наведено основні відомості про формальні узагальнені функції над комутативним кільцем (див. також [4]). У теоремах 3 і 4 з пункту 3 отримано деякий алгебраїчний аналог класичних характеризацій трансляційно-інваріантних лінійних операторів (див., наприклад, [1, 5 – 7]).

У пункті 4 розглядається питання про диференціальні оператори нескінченного порядку у кільці $R\big[[x]\big]$ формальних степеневих рядів, де R — кільце нормування повного неархімедового поля. Важливим прикладом є випадок, коли $R = \mathbb{Z}_p$ — кільце цілих p-адичних чисел (див. [8], гл. 1, §3). Як, зокрема, випливає з леми 4, диференціальний оператор $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \dfrac{d^n}{dx^n}$ нескінченного порядку з цілими коефіцієнтами b_n є коректно визначеним, як оператор з кільця $\mathbb{Z}\big[[x]\big]$ у кільце $\mathbb{Z}_p\big[[x]\big]$ (див. також [9], теорема 3.1). Проте цей оператор не завжди можна застосувати до формальних степеневих рядів з $\mathbb{Q}\big[[x]\big]$. Наприклад, диференціальний оператор $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{d^n}{dx^n}$ не визначено на формальному степеневому ряду $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \in \mathbb{Q}\big[[x]\big]$. Основним результатом пункту 4 є теорема 7 про загальний вигляд неперервного лінійного

* Підтримано Національним фондом досліджень України (проєкт 2020.02/0096).

відображення у кільці $R\big[[x]\big]$, що комутує з оператором диференціювання. Доведено, що цей оператор є диференціальним оператором нескінченного порядку вигляду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$.

2. Попередні відомості.

Означення 1. *Формальною узагальненою функцією над кільцем K будемо називати K-лінійний функціонал, визначений на кільці $K[x]$, тобто гомоморфізм з модуля $K[x]$ у кільце K.*

Модуль формальних узагальнених функцій над K будемо позначати через $K[x]'$. Таким чином, $T \in K[x]'$ тоді й лише тоді, коли $T\colon K[x] \to K$ та T має властивість K-лінійності: $T(ap+bq) = aT(p)+bT(q)$ для всіх $p, q \in K[x]$ та $a, b \in K$. Якщо $T \in K[x]'$ і $p \in K[x]$, то для значення T на p будемо використовувати позначення (T, p). Формальну узагальнену функцію $T \in K[x]'$ будемо також записувати у вигляді $T(x)$, розуміючи під x аргумент поліномів $p(x) \in K[x]$, на які діє K-лінійне відображення T. У цьому випадку результат застосування T до p будемо записувати у вигляді $(T(x), p(x))$. Якщо $a \in K$ і $T \in K[x]'$, то множення $aT \in K[x]'$ визначається формулою

$$(aT, p) = a(T, p), \quad p \in K[x].$$

Нехай $p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \in K[x]$. Для будь-якого $x \in K$ розглянемо поліном $p(x+h) \in \in K[h]$:

$$p(x+h) = \sum_{n=0}^{m} p_n(x) h^n,$$

де $p_n(x) \in K$. Оскільки у випадку поля нульової характеристики $p_n(x) = \dfrac{p^{(n)}(x)}{n!}$, будемо вважати, що за означенням $\dfrac{p^{(n)}(x)}{n!} = p_n(x)$, $n = 0, \ldots, m$, і для будь-якого комутативного кільця K. При $n > m$ вважаємо, що $\dfrac{p^{(n)}(x)}{n!} = 0$.

Означення 2. *Похідна T' формальної узагальненої функції $T \in K[x]'$ визначається, як і в класичному випадку, формулою*

$$(T', p) = -(T, p'), \quad p \in K[x].$$

Звідси можна одержати такий вираз для похідної n-го порядку:

$$(T^{(n)}, p) = (-1)^n \Big(T, p^{(n)}\Big), \quad p \in K[x].$$

Тому

$$(T^{(n)}, p) = 0, \qquad T \in K[x]', \quad p \in K[x], \quad n > \deg p.$$

За допомогою рівності

$$\left(\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} T, p\right) = \left(\frac{T^{(n)}}{n!}, p\right) = (-1)^n \left(T, \frac{p^{(n)}}{n!}\right), \quad p \in K[x],$$

для будь-яких $T \in K[x]'$ і $n \in \mathbb{N}$ коректно визначено формальні узагальнені функції $\dfrac{T^{(n)}}{n!}$.

***Приклад* 1.** Формальна узагальнена δ-функція визначається формулою

$$(\delta, p) = p(0), \quad p \in K[x].$$

Знайдемо похідну n-го порядку формальної узагальненої δ-функції:

$$(\delta^{(n)}, p) = (-1)^n (\delta, p^{(n)}) = (-1)^n p^{(n)}(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

***Приклад* 2.** Нехай $K = \mathbb{R}$ і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — така інтегровна за Лебегом функція, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)| dx < +\infty, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тоді f породжує регулярну формальну узагальнену функцію [10]

$$(f, p) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}[x].$$

Зауважимо, що в цьому випадку, на відміну від класичної теорії, всі формальні узагальнені функції є регулярними [4].

Наступна лема встановлює зв'язок між комутативністю K-лінійного відображення $G\colon K[x]' \to K[x]'$ з оператором диференціювання $\dfrac{d}{dx}$ і комутативністю цього відображення з операторами $\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Лема 1. *Нехай кільце K є $\mathbb{Z}$-модулем без скруту* [11] (*гл.* VII, § 2) *і $G\colon K[x]' \to K[x]'$ — K-лінійне відображення, що комутує з оператором диференціювання $\dfrac{d}{dx}$. Тоді при кожному $n \in \mathbb{N}$ відображення G комутує з оператором $\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$.*

Доведення. Оскільки відображення G комутує з оператором диференціювання $\dfrac{d}{dx}$, то $G(T^{(n)}) = (G(T))^{(n)}$ для будь-якої формальної узагальненої функції $T \in K[x]'$. З іншого боку, $T^{(n)} = n!\left(\dfrac{T^{(n)}}{n!}\right)$. Тому

$$G(T^{(n)}) = n! G\left(\frac{T^{(n)}}{n!}\right), \qquad (G(T))^{(n)} = n!\left(\frac{(G(T))^{(n)}}{n!}\right).$$

Отже, для будь-якої формальної узагальненої функції $T \in K[x]'$ і полінома $p \in K[x]$ маємо

$$n!\left(G\left(\frac{T^{(n)}}{n!}\right) - \left(\frac{(G(T))^{(n)}}{n!}\right), p\right) = 0.$$

Оскільки кільце K є $\mathbb{Z}$-модулем без скруту, то

$$\left(G\left(\frac{T^{(n)}}{n!}\right) - \left(\frac{(G(T))^{(n)}}{n!}\right), p\right) = 0,$$

тобто $G\left(\dfrac{T^{(n)}}{n!}\right)=\dfrac{(G(T))^{(n)}}{n!}$.

Лему доведено.

Наступний приклад показує, що без додаткової умови на кільце K твердження леми стає хибним навіть у випадку, коли K — поле.

***Приклад* 3.** Нехай $K=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Кільце K є полем характеристики 2, тобто $2x=0,\ x\in K$. Тому це поле не є $\mathbb{Z}$-модулем без скруту. Розглянемо K-лінійне відображення $G\colon K[x]'\to\to K[x]'$, що діє за правилом

$$(G(T),1)=(T,x^2),\qquad (G(T),x)=(T,x^3),\qquad (G(T),x^k)=0,\quad k=2,3,\ldots,$$

для будь-якої формальної узагальненої функції $T\in K[x]'$. Безпосередньо перевіряється, що відображення G комутує з оператором диференціювання. Проте

$$\left(\frac{(G(T))''}{2},1\right)=0,\qquad \left(G\left(\frac{T''}{2}\right),1\right)=\left(\frac{T''}{2},x^2\right)=(T,1)\quad \text{для всіх}\quad T\in K[x]'.$$

Звідси випливає, що відображення G не комутує з оператором $\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}$.

Розглянемо тепер питання про збіжність у модулі $K[x]'$. Будемо розглядати на кільці K дискретну топологію, а на модулі формальних узагальнених функцій $K[x]'$ — топологію поточкової збіжності. Збіжність послідовності $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ до T в $K[x]'$ означає, що для кожного полінома $p\in K[x]$ існує такий номер $n_0\in\mathbb{N}$, що

$$(T_n,p)=(T,p),\quad n=n_0,n_0+1,n_0+2,\ldots.$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}T_n$ збігається в $K[x]'$, якщо збігається в $K[x]'$ послідовність його частинних сум $\sum_{n=0}^{N}T_n$.

З означення збіжності в модулі $K[x]'$ одержуємо таке твердження [12].

Теорема 1. *Нехай $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність елементів з K і $T\in K[x]'$. Тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\dfrac{T^{(n)}}{n!}$ збігається в $K[x]'$ і*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{T^{(n)}}{n!}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{T^{(n+1)}}{n!}.$$

Наступне твердження показує можливість розвинення довільної формальної узагальненої функції в ряд за системою $\left\{\dfrac{\delta^{(n)}}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Лема 2. *Нехай $T\in K[x]'$. Тоді*

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(T,x^n)\frac{\delta^{(n)}}{n!}. \tag{1}$$

Доведення. За теоремою 1 ряд у правій частині рівності (1) збігається в $K[x]'$ і

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(T,x^n)\frac{\delta^{(n)}}{n!},x^k\right)=(-1)^k(T,x^k)\left(\frac{\delta^{(k)}}{k!},x^k\right)=(T,x^k),\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Лему доведено.

***Зауваження* 1.** Рівність (1) пов'язана з властивостями операторів у кільці $K[x]$, що комутують зі зсувами [1] (гл. 6, §1, п. 1), оскільки будь-яка формальна узагальнена функція T породжує трансляційно-інваріантний оператор в $K[x]$ (див. зауваження 3).

Наступна теорема встановлює загальний вигляд K-лінійного неперервного відображення з $K[x]'$ в себе.

Теорема 2. *Нехай $G\colon K[x]' \to K[x]'$ — неперервне K-лінійне відображення. Тоді для будь-якого полінома $p \in K[x]$ існує єдиний поліном $q \in K[x]$ такий, що*

$$\big(G(T), p\big) = (T, q) \quad \forall T \in K[x]'. \tag{2}$$

Відображення $G^*\colon K[x] \to K[x]$, яке діє за правилом $G^*p = q$, є K-лінійним.

Доведення. За теоремою 1 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\delta^{(n)}}{n!}$ збігається в $K[x]'$. Оскільки G — неперервне відображення, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} G\left(\dfrac{\delta^{(n)}}{n!}\right)$ також є збіжним, і для будь-якого полінома $p \in K[x]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left(G\left(\dfrac{\delta^{(n)}}{n!}\right), p\right)$ є збіжним у дискретній топології кільця K. Тому існує таке число $n_0 = n_0(p) \in \mathbb{N}$, що

$$\left(G\left(\frac{\delta^{(n)}}{n!}\right),\, p\right) = 0, \quad n > n_0. \tag{3}$$

За лемою 2 будь-яка формальна узагальнена функція $T \in K[x]'$ допускає зображення (1). Звідси, враховуючи рівність (3), одержуємо

$$\big(G(T), p\big) = \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n (T, x^n)\left(G\left(\frac{\delta^{(n)}}{n!}\right), p\right). \tag{4}$$

Тепер покладемо

$$q(x) = \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n \left(G\left(\frac{\delta^{(n)}}{n!}\right), p\right) x^n \in K[x].$$

Використовуючи рівність (4), отримуємо

$$(T, q) = \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n (T, x^n)\left(G\left(\frac{\delta^{(n)}}{n!}\right),\, p\right) = \big(G(T), p\big).$$

Звідси випливає рівність (2). Поліном, що задовольняє рівність (2), визначається єдиним чином, а відображення $G^*\colon K[x] \to K[x]$, що діє за правилом

$$G^*p(x) = q(x) = \sum_{n=0}^{n_0} (-1)^n \left(G\left(\frac{\delta^{(n)}}{n!}\right), p\right) x^n$$

є K-лінійним.

Теорему доведено.

З теореми 2 випливає, що $\big(G(T), p\big) = (T, G^* p)$ для всіх $T \in K[x]'$ і $p \in K[x]$.

Розглянемо тепер диференціальний оператор нескінченного порядку

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}, \tag{5}$$

де $a_n \in K$. Цей оператор діє на формальну узагальнену функцію $T \in K[x]'$ за правилом: якщо $p \in K[x]$ і $m = \deg\, p$, то

$$(\mathcal{F}(T), p) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{T^{(n)}}{n!}, p \right) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n \left(T, \frac{p^{(n)}}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{m} a_n \left(\frac{T^{(n)}}{n!}, p \right).$$

Таким чином, оператор $\mathcal{F} \colon K[x]' \to K[x]'$ коректно визначено, тобто він є застосовним до модуля $K[x]'$. Для будь-якого полінома p степеня не вищого за m є справедливою рівність

$$(\mathcal{F}(T), p) = \left(\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{T^{(n)}}{n!}, p \right). \tag{6}$$

Неважко бачити, що будь-які два диференціальних оператори $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ нескінченного порядку комутують, тобто $\mathcal{FG} = \mathcal{GF}$. Наступна лема встановлює властивість неперервності диференціального оператора $\mathcal{F}$.

Лема 3. *Диференціальний оператор $\mathcal{F} \colon K[x]' \to K[x]'$ є неперервним K-лінійним відображенням.*

Доведення. Нехай послідовність формальних узагальнених функцій $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$ збігається до T в $K[x]'$. Тоді існує таке $k_0 = k_0(p) \in \mathbb{N}$, що виконується рівність $(T_k, p) = (T, p)$ при всіх $k \geq k_0(p)$. Нехай $m = \deg\, p$ и $s(p) = \max\big\{k_0(p), k_0(p'), \ldots, k_0(p^{(m)})\big\}$. Тоді на підставі рівності (6) одержуємо

$$(\mathcal{F}(T_k), p) = \left(\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{T_k^{(n)}}{n!}, p \right) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n \left(T_k, \frac{p^{(n)}}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n \left(T, \frac{p^{(n)}}{n!} \right) =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{m} a_n \frac{T^{(n)}}{n!}, p \right) = (\mathcal{F}(T), p), \quad k \geq s(p),$$

тобто послідовність $\big\{\mathcal{F}(T_k)\big\}_{k=0}^{\infty}$ збігається до $\mathcal{F}(T)$.

Лему доведено.

Введемо тепер поняття зсуву для формальної узагальненої функції [4, 10]. Для будь-яких $h \in K$ і $p \in K[x]$ визначимо поліном $p(x+h) \in K[x]$ за допомоги формули Тейлора:

$$p(x+h) = \sum_{n=0}^{m} \frac{p^{(n)}(x)}{n!} h^n, \tag{7}$$

де $m = \deg\, p$. Тепер для $T(x) \in K[x]'$ визначимо формальну узагальнену функцію $T(x+h)$ формулою

$$\big(T(x+h), p\big) = \big(T, p(x-h)\big).$$

Це означення узгоджується з означенням зсуву в класичній теорії узагальнених функцій. Очевидно, що операції зсуву та диференціювання комутують:

$$\big(T(x+h)\big)' = T'(x+h).$$

Оскільки на підставі формули (7)

$$p(x-h) = \sum_{n=0}^{m} (-h)^n \frac{p^{(n)}(x)}{n!},$$

то

$$(T(x+h), p) = \left(T, \sum_{n=0}^{m} (-h)^n \frac{p^{(n)}(x)}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{m} (-h)^n \left(T, \frac{p^{(n)}(x)}{n!}\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{m} h^n \left(\frac{T^{(n)}}{n!}, p\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \left(\frac{T^{(n)}}{n!}, p\right),$$

тобто зсув породжує диференціальний оператор нескінченного порядку:

$$\tau_h = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}. \tag{8}$$

За лемою 3 оператор $\tau_h : K[x]' \to K[x]'$ є неперервним. Цей оператор будемо називати *оператором зсуву на* h.

***Зауваження* 2.** Диференціальний оператор

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{d^n}{dx^n}, \quad b_n \in K, \tag{9}$$

є диференціальним оператором нескінченного порядку вигляду (5): якщо $a_n = n! b_n$, то $a_n \in K$ і

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{d^n}{dx^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}.$$

Проте не завжди диференціальний оператор нескінченного порядку (5) можна зобразити у вигляді (9). Справді, нехай $K = \mathbb{Z}$ і $\mathcal{F} = \tau_1$ — оператор зсуву на 1. Припустимо, що існують коефіцієнти $b_n \in \mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, такі, що для будь-якої формальної узагальненої функції $T \in \mathbb{Z}[x]'$ є справедливим зображення

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{(n)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T^{(n)}. \tag{10}$$

Тоді у полі $\mathbb{Q}$ справджуються рівності $b_n = \dfrac{1}{n!}$, $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$. Зокрема, $b_2 = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Таким чином, зображення (10) не є можливим.

Означення 3. *Якщо* $p \in K[x]$ *і* $T \in K[x]'$ *— формальна узагальнена функція, то природним чином визначається їх згортка* $T * p$*:*

$$(T * p)(x) = \big(T(y), p(x-y)\big) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (T, y^k) \frac{p^{(k)}(x)}{k!}, \tag{11}$$

де $m = \deg p$*. Таким чином,* $T * p$ *є поліномом з коефіцієнтами з* K*, тобто* $T * p \in K[x]$.

***Приклад* 4.** За формулою (11) маємо $\delta * p = p$.

***Зауваження* 3.** Згідно з означенням 3 кожна формальна узагальнена функція T породжує лінійний оператор у кільці $K[x]$, а саме, оператор згортки з T. Цей оператор згортки комутує із зсувами і є диференціальним оператором нескінченного порядку (див. [1], гл. 6, §1, п. 1). Якщо тепер в рівність (11) підставити замість полінома $p(x)$ поліном $p(-x)$, то при $x = 0$ отримаємо рівність (1).

Означення 4. *Нехай* $T_1, T_2 \in K[x]'$*, тобто* T_1, T_2 *— формальні узагальнені функції. Визначимо їх згортку* [13] (гл. 1, § 7). *Якщо* $p \in K[x]$ *і* $p(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n$*, то*

$$(T_1 * T_2, p) = \big(T_1 \otimes T_2, p(x+y)\big) = \sum_{n=0}^{m} \left(T_1(x), \frac{p^{(n)}(x)}{n!}\right) (T_2(y), y^n)$$

(*див. також* [4, 10]).

Зауважимо, що $T_1 * T_2 \in K[x]'$, до того ж $T_1 * T_2 = T_2 * T_1$.

***Приклад* 5.** Обчислимо згортку $\delta * T$ для $T \in K[x]'$. Нехай $p \in K[x]$ і $\deg\, p = m$. Тоді

$$(\delta * T, p) = \sum_{n=0}^{m} \left(\delta, \frac{p^{(n)}(x)}{n!}\right) (T, y^n) = \sum_{n=0}^{m} \frac{p^{(n)}(0)}{n!} (T, y^n) = (T, p).$$

Таким чином, $\delta * T = T$.

***Зауваження* 4.** Якщо $T_1 * T_2 = 0$ для всіх $T_2 \in K[x]'$, то $T_1 = 0$. Справді, достатньо покласти $T_2 = \delta$, і тоді $T_1 = T_1 * \delta = 0$.

3. Диференціальні оператори нескінченного порядку у модулі формальних узагальнених функцій. Наступна теорема дає загальний опис неперервного K-лінійного відображення $G\colon K[x]' \to K[x]'$, що комутує з оператором диференціювання або зсуву.

Теорема 3. *Нехай* K *— нескінченна область цілісності, що є* $\mathbb{Z}$*-модулем без скруту, та* $G :$ $K[x]' \to K[x]'$ *— неперервне* K*-лінійне відображення. Тоді такі умови є еквівалентними*:

1) *відображення* G *комутує з будь-яким оператором зсуву* τ_h, $h \in K$;

2) *відображення* G *комутує з оператором диференціювання* $\frac{d}{dx}$;

3) *існує єдина формальна узагальнена функція* S *така, що* $G(T) = S * T$ *для будь-якого* $T \in K[x]'$*, до того ж* $S = G(\delta)$;

4) *відображення* G *являє собою диференціальний оператор нескінченного порядку вигляду* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n}$*, де* $a_n \in K$.

Доведення. $1) \Rightarrow 2)$. Нехай $p \in K[x]$ — довільний поліном, $m = \deg p$ і $s = \deg G^*p$. Нагадаємо, що $\tau_h : K[x]' \to K[x]'$ — диференціальний оператор нескінченного порядку, що має вигляд (8). З неперервності відображень τ_h і G отримуємо

$$(G(\tau_h(T)), p) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \left(G\left(\frac{T^{(n)}}{n!} \right), p \right) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \left(\frac{T^{(n)}}{n!}, G^*p \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{s} h^n \left(\frac{T^{(n)}}{n!}, G^*p \right) = \sum_{n=0}^{s} h^n \left(G\left(\frac{T^{(n)}}{n!} \right), p \right)$$

і

$$(\tau_h(G(T)), p) = \sum_{n=0}^{m} h^n \left(\frac{(G(T))^{(n)}}{n!}, p \right).$$

Звідси з урахуванням комутативності відображень G і τ_h одержуємо рівність

$$\sum_{n=0}^{s} \left(G\left(\frac{T^{(n)}}{n!} \right), p \right) h^n = \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{(G(T))^{(n)}}{n!}, p \right) h^n, \quad h \in K.$$

Оскільки K — нескінченна область цілісності, то, прирівнюючи коефіцієнти цих поліномів при h, одержуємо рівність K-лінійних відображень $G\dfrac{d}{dx} = \dfrac{d}{dx}G$.

$2) \Rightarrow 3)$. Нехай $T \in K[x]'$ — довільна формальна узагальнена функція, а $p \in K[x]$ — поліном степеня m. Застосуємо до обох частин рівності (1) відображення G. З урахуванням леми 1, неперервності відображення G і його комутативності з оператором диференціювання маємо

$$\big(G(T), p\big) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \left(G\left(\frac{\delta^{(n)}}{n!} \right), p \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \left(\frac{(G(\delta))^{(n)}}{n!}, p \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n (T, x^n) \left(\frac{(G(\delta))^{(n)}}{n!}, p \right) = \sum_{n=0}^{m} (T, x^n) \left(G(\delta), \frac{p^{(n)}}{n!} \right) = \big(G(\delta) * T, p\big).$$

Таким чином, $G(T) = G(\delta) * T$. Єдиність формальної узагальненої функції S випливає із зауваження 4.

$3) \Rightarrow 4)$. Припустимо, що існує формальна узагальнена функція $S \in K[x]'$ така, що $G(T) = S * T$ для будь-якого $T \in K[x]'$. Тоді $G(T) = T * S$ і для будь-якого полінома $p \in K[x]$ степеня m отримуємо

$$(T * S, p) = \sum_{n=0}^{m} \left(T(x), \frac{p^{(n)}(x)}{n!} \right) (S(y), y^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(T(x), \frac{p^{(n)}(x)}{n!} \right) (S(y), y^n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (S(y), y^n) \left(\frac{T^{(n)}(x)}{n!}, p(x) \right).$$

Звідси одержуємо необхідне зображення для G:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (S, y^n)\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}.$$

$4) \Rightarrow 1)$. Очевидно, оскільки диференціальні оператори нескінченного порядку τ_h і G комутують.

Теорему доведено.

***Зауваження* 5.** Із зауваження 2 випливає, що твердження 4 теореми 3 не можна замінити твердженням: відображення G *являє собою диференціальний оператор вигляду* (9).

***Зауваження* 6.** Відображення G з прикладу 3 комутує з оператором диференціювання $\dfrac{d}{dx}$, але не комутує з оператором $\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dx^2}$. Неважко перевірити, що воно є неперервним. Тому таке відображення не може бути диференціальним оператором нескінченного порядку вигляду (5). Цей приклад показує, що обмеження на кільце K в умові теореми 3 є суттєвими: кільце $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ не є $\mathbb{Z}$-модулем без скруту.

***Приклад* 6.** Нехай виконано умови теореми 3, $f \in K[x]'$ — формальна узагальнена функція і $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{d^n}{dx^n}$ — диференціальний оператор нескінченного порядку, де $a_n \in K$. Припустимо, що a_0 є оборотним елементом кільця K. Розглянемо в модулі $K[x]'$ диференціальне рівняння

$$\mathcal{F}u = f. \tag{12}$$

Маємо таке зображення оператора $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} = a_0 I + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{d^n}{dx^n} = a_0\left(I - \frac{d}{dx}\mathcal{G}\right), \tag{13}$$

де I — тотожне відображення, а $\mathcal{G} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_0^{-1} a_n \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$. Для будь-якої формальної узагальненої функції $f \in K[x]'$ і полінома $p \in K[x]$ степеня m маємо $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^n \dfrac{d^n f}{dx^n}, p\right) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n (\mathcal{G}^n f, p^{(n)})$. Тому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^n \dfrac{d^n}{dx^n} f(x)$ збігається для будь-якої формальної узагальненої функції $f \in K[x]'$, оператор $I - \dfrac{d}{dx}\mathcal{G} \colon K[x]' \to K[x]'$ є бієктивним, а його обернений має вигляд

$$\left(I - \frac{d}{dx}\mathcal{G}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^n \frac{d^n}{dx^n}.$$

З (13) випливає оборотність оператора $\mathcal{F}$, до того ж $\mathcal{F}^{-1} = a_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^n \dfrac{d^n}{dx^n}$, і диференціальне рівняння (12) має єдиний розв'язок $u = \mathcal{F}^{-1}(f)$. Оскільки оператор $\mathcal{F}^{-1}$ комутує з оператором диференціювання $\dfrac{d}{dx}$, то за теоремою 3 $\mathcal{F}^{-1}$ є оператором вигляду згортки: $\mathcal{F}^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}(\delta) * f$. Таким чином, єдиний розв'язок рівняння (12) має вигляд $u = \mathcal{E} * f$, де формальну узагальнену функцію $\mathcal{E} = \mathcal{F}^{-1}(\delta)$ природно назвати *фундаментальним розв'язком рівняння* (12).

Будемо розглядати на $K[x]$ дискретну топологію. Наступна теорема дає загальний опис неперервного K-лінійного відображення G з модуля формальних узагальнених функцій $K[x]'$ у кільце поліномів $K[x]$, що комутує з оператором диференціювання або зсуву.

Теорема 4. *Нехай K — нескінченна область цілісності, що є $\mathbb{Z}$-модулем без скруту, а $G\colon K[x]' \to K[x]$ — неперервне K-лінійне відображення. Тоді такі умови є еквівалентними*:

1) *відображення G комутує з будь-яким оператором зсуву, тобто*

$$G(\tau_h(T)) = (G(T))(x+h), \qquad h \in K, \quad T \in K[x]'; \tag{14}$$

2) *відображення G комутує з оператором диференціювання $\dfrac{d}{dx}$;*

3) *існує єдиний поліном $p \in K[x]$ такий, що $G(T) = T * p$ для будь-якого $T \in K[x]'$, до того ж $p = G(\delta)$.*

Доведення. $1) \Rightarrow 2)$. Нехай $T \in K[x]'$. За формулою Тейлора

$$(G(T))(x+h) = \sum_{n=0}^{m} h^n \frac{(G(T))^{(n)}}{n!}, \tag{15}$$

де $m = \deg G(T)$. За теоремою 1 $\dfrac{T^{(n)}}{n!} \to 0$ в топології $K[x]'$. Оскільки G — неперервне відображення, то $G\left(\dfrac{T^{(n)}}{n!}\right) \to 0$ в дискретній топології кільця $K[x]$. Тому існує такий номер $m_0 \in \mathbb{N}$, що $G\left(\dfrac{T^{(n)}}{n!}\right) = 0$ при всіх $n > m_0$. Нагадаємо, що $\tau_h\colon K[x]' \to K[x]'$ є диференціальним оператором нескінченного порядку, що має вигляд (8). Тому, застосовуючи до цієї рівності неперервне відображення G, одержуємо

$$G(\tau_h(T)) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n G\left(\frac{T^{(n)}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{m_0} h^n G\left(\frac{T^{(n)}}{n!}\right). \tag{16}$$

Тепер з рівностей (14)–(16) отримуємо рівність

$$\sum_{n=0}^{m_0} G\left(\frac{T^{(n)}}{n!}\right) h^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{(G(T))^{(n)}}{n!} h^n, \quad h \in K. \tag{17}$$

Оскільки K — область цілісності, то $K[x]$ також є областю цілісності. З рівності (17) випливає, що два поліноми з $K[x][h]$ збігаються на нескінченній множині $K \subset K[x]$. Отже, вони мають рівні коефіцієнти. Зокрема, збігаються коефіцієнти при h, тобто $G(T') = (G(T))'$. Це означає рівність K-лінійних відображень $G\dfrac{d}{dx}$ і $\dfrac{d}{dx}G$.

$2) \Rightarrow 3)$. Нехай $T \in K[x]'$ — довільна формальна узагальнена функція. Застосуємо до обох частин рівності (1) відображення G. З урахуванням леми 1, неперервності відображення G і його комутативності з оператором диференціювання маємо

$$G(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) G\left(\frac{\delta^{(n)}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T, x^n) \frac{(G(\delta))^{(n)}}{n!} = T * G(\delta).$$

Таким чином, $G(T) = T * G(\delta)$. Єдиність полінома p випливає з рівності $\delta * q = q$ для всіх $q \in K[x]$.

3) $\Rightarrow$ 1). Оскільки існує поліном $p \in K[x]$ степеня m такий, що $G(T) = T*p$ для будь-якого $T \in K[x]'$, то при всіх $h \in K$ отримуємо

$$(G(T))(x+h) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k (T, y^k) \frac{p^{(k)}(x+h)}{k!} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k (T, y^k) \sum_{n=0}^{m-k} \frac{(n+k)!}{n!k!} \frac{p^{(n+k)}(x)}{(n+k)!} h^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k (T, y^k) \sum_{n=0}^{m-k} C_{n+k}^k \frac{p^{(n+k)}(x)}{(n+k)!} h^n = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k (T, y^k) \sum_{n=k}^{m} C_n^k \frac{p^{(n)}(x)}{n!} h^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} h^{n-k} C_n^k (-1)^k (T, y^k) \frac{p^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} h^k C_n^k (-1)^{n-k} (T, y^{n-k}) \frac{p^{(n)}(x)}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} (-1)^n h^k \left(\frac{T^{(k)}}{k!}, y^n\right) \frac{p^{(n)}(x)}{n!} = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n (\tau_h(T), y^n) \frac{p^{(n)}(x)}{n!} = \tau_h(T) * p = G(\tau_h(T)).$$

Звідси випливає формула (14).

Теорему доведено.

4. Диференціальні оператори у модулі формальних степеневих рядів над кільцем нормування неархімедового поля. В цьому пункті розглядаються диференціальні оператори нескінченного порядку у кільці формальних степеневих рядів. Спочатку розглянемо випадок, коли коефіцієнти рядів належать довільному дискретному комутативному кільцю K. В цьому випадку на кільці формальних степеневих рядів $K\big[[x]\big]$ будемо розглядати топологію Крулля (див. [14], гл. 1, § 3, п. 4), тобто топологію покоефіцієнтної стабілізації. Так само, як і в пункті 2, можна показати, що в кільці $K\big[[x]\big]$ є коректно визначений оператор $\dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Диференціальний оператор нескінченного порядку (5), де $a_n \in K$, можна було б визначити таким чином: якщо $g \in K\big[[x]\big]$, то

$$(\mathcal{F}g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{n!} g^{(n)}(x), \tag{18}$$

де збіжність ряду у правій частині розуміється в топології Крулля. Варто зазначити, що у випадку такого визначення диференціальний оператор (5) є застосовним у кільці $K\big[[x]\big]$ тоді й лише тоді, коли він є оператором скінченного порядку.

Теорема 5. *Нехай оператор* $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$ *є коректно визначеним* K*-лінійним відображенням з* $K\big[[x]\big]$ *у* $K\big[[x]\big]$. *Тоді існує такий номер* $n_0 \in \mathbb{N}$, *що* $a_n = 0$ *при всіх* $n \geq n_0$.

Доведення. Нехай $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Тоді $\dfrac{d^n}{dx^n} g(x)\Big|_{x=0} = n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Оскільки ряд (18) збігається у топології Крулля, то ряд $(\mathcal{F}g)(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається у дискретній топології кільця K. Тому $a_n = 0$, починаючи з деякого номера $n = n_0$.

Теорему доведено.

Нехай тепер S — поле нульової характеристики з неархімедовим нормуванням $|\cdot|$ [15] (п. 1.2) і $R = \{s \in S : |s| \leq 1\}$ — кільце нормування поля S [16] (гл. XII, § 4). Припустимо, що поле S є повним щодо нормування $|\cdot|$. В подальшому будемо розглядати на R топологію, що породжується нормуванням $|\cdot|$. Зауважимо, що R є замкненим підкільцем в S. Будемо також розглядати на кільці $R\big[[x]\big]$ топологію покоефіцієнтної збіжності [14] (гл. 1, § 0, п. 4). Якщо $g \in R\big[[x]\big]$ і $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$, $a_n \in R$, то під результатом дії оператора $\mathcal{F}$ на ряд g будемо розуміти суму ряду (18) за умови його збіжності у топології покоефіцієнтної збіжності.

Наступна лема дає умови коректної визначеності диференціального оператора $\mathcal{F}$ (18), як оператора у кільці $R\big[[x]\big]$, а також його зображення у зручному для нас вигляді.

Лема 4. *Нехай $a_n \in R$, $n = 0,1,2,\ldots$, і $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ в топології кільця R. Тоді диференціальний оператор $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$ визначено на всьому кільці $R\big[[x]\big]$ і $\mathcal{F}\big(R\big[[x]\big]\big) \subset R\big[[x]\big]$. При цьому*

$$(\mathcal{F}u)(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k-j}u_k C_k^j\right)x^j, \quad \text{де} \quad u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \in R\big[[x]\big]. \tag{19}$$

Навпаки, нехай лінійне відображення $\mathcal{F}\colon R\big[[x]\big] \to R\big[[x]\big]$ допускає зображення (19) *для деякої послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ елементів кільця R такої, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ в топології R. Тоді $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$.*

Доведення. Нехай $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \in R\big[[x]\big]$, $a_n \in R$, $n = 0,1,2,\ldots$, і $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тоді для будь-якого $j = 0,1,2,\ldots$ ряд $\sum_{k=j}^{\infty} C_k^j a_{k-j}u_k$ збігається в топології R. Тому ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k-j}C_k^j u_k\right)x^j$ є коректно визначеним елементом кільця $R\big[[x]\big]$. Оскільки

$$\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dx^j}u(x) = \sum_{k=j}^{\infty} C_k^j u_k x^{k-j}, \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

і $C_k^j = C_k^{k-j}$, то ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{1}{j!}\dfrac{d^j}{dx^j}u(x)$ збігається у топології покоефіцієнтної збіжності і

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dx^j}u(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k-j}C_k^j u_k\right)x^j.$$

Тому оператор $\mathcal{F}$ визначено на всьому $R\big[[x]\big]$, $\mathcal{F}\colon R\big[[x]\big] \to R\big[[x]\big]$ і є правильним зображення (19). Навпаки, нехай лінійне відображення $\mathcal{F}\colon R\big[[x]\big] \to R\big[[x]\big]$ допускає зображення (19) для деякої послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ елементів кільця R такої, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ в топології R. Для послідовності $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ розглянемо диференціальний оператор $\mathcal{F}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$. Як вже було доведено, $\mathcal{F}_1$ є коректно визначеним диференціальним оператором нескінченного порядку, і для $\mathcal{F}_1$ є правильним зображення (19), тобто $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$.

Лему доведено.

Наступна теорема встановлює неперервність диференціального оператора $\mathcal{F}$ вигляду (5).

Теорема 6. *В умовах леми* 4 *диференціальний оператор $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$ є неперервним відображенням з $R\big[[x]\big]$ у $R\big[[x]\big]$.*

Доведення. Нехай послідовність $u_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i^{(k)} x^i$ елементів з $R\big[[x]\big]$ збігається в топології покоефіцієнтної збіжності кільця $R\big[[x]\big]$ до 0 при $k \to \infty$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} u_i^{(k)} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

в топології кільця R. З урахуванням зображення (19) потрібно довести, що

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=j}^{\infty} u_i^{(k)} C_i^j a_{i-j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

в топології R. Оскільки $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, що $|a_i| < \varepsilon$ для всіх $i > m_\varepsilon$. Тоді $|a_{i-j}| < \varepsilon$ для всіх $j = 0, 1, 2, \ldots$ й $i > m_\varepsilon + j$. Звідси на підставі неархімедовості норми $|\cdot|$ і нерівності $|s| \le 1, s \in R$, маємо

$$\left|\sum_{i=j}^{\infty} u_i^{(k)} C_i^j a_{i-j}\right| \le \sup_{i=j,j+1,\ldots} \left|u_i^{(k)} C_i^j a_{i-j}\right| \le \sup_{i=j,j+1,\ldots} \min\left\{|u_i^{(k)}|, |a_{i-j}|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{|u_j^{(k)}|, |u_{j+1}^{(k)}|, \ldots, |u_{j+m_\varepsilon}^{(k)}|, \varepsilon\right\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Оскільки за рівностями (20) існує таке число $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, що

$$\max\left\{|u_j^{(k)}|, |u_{j+1}^{(k)}|, \ldots, |u_{j+m_\varepsilon}^{(k)}|\right\} < \varepsilon$$

для будь-якого $k \ge k_0(\varepsilon)$, то

$$\left|\sum_{i=j}^{\infty} u_i^{(k)} C_i^j a_{i-j}\right| \le \varepsilon.$$

Звідси випливають граничні рівності (21).

Теорему доведено.

Наступна теорема показує, що будь-яке неперервне лінійне відображення $\mathcal{F}\colon R\big[[x]\big] \to \to R\big[[x]\big]$, що комутує з оператором диференціювання, є диференціальним оператором вигляду (5).

Теорема 7. *Нехай $\mathcal{F}\colon R\big[[x]\big] \to R\big[[x]\big]$ — довільне неперервне лінійне відображення, що комутує з оператором диференціювання $\dfrac{d}{dx}$. Тоді існує послідовність $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ елементів кільця R така, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ в топології R і $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$.*

Доведення. Позначимо $v_k(x) = \mathcal{F}(x^k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тоді $v_k(x) \in R\big[[x]\big]$. Оскільки $\mathcal{F}$ комутує з оператором диференціювання, то

$$v_k'(x) = \mathcal{F}((x^k)') = k\mathcal{F}(x^{k-1}) = kv_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

і $v_0'(x) = \mathcal{F}(0) = 0$. Тому $v_k(x)$ — поліном степеня не вищого за k, тобто $v_k(x) = \sum_{j=0}^{k} v_j^{(k)} x^j$, $v_j^{(k)} \in R$. Підставляючи $v_k(x)$ у рівняння (22), одержуємо

$$\sum_{j=0}^{k-1}(j+1)v_{j+1}^{(k)}x^j = k\sum_{j=0}^{k-1}v_j^{(k-1)}x^j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому, прирівнюючи коефіцієнти при степенях x, отримуємо співвідношення

$$(j+1)v_{j+1}^{(k)} = kv_j^{(k-1)}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad j = 0, \ldots, k-1.$$

Оскільки S — поле нульової характеристики, то

$$v_j^{(k)} = \frac{k}{j}v_{j-1}^{(k)} = \frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{j!}v_0^{(k-j)} = C_k^j v_0^{(k-j)}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

до того ж $C_k^j v_0^{(k-j)} \in R$. Таким чином, $v_k(x) = \sum_{j=0}^{k} C_k^j v_0^{(k-j)} x^j$. Тепер доведемо, що $\lim_{k\to\infty} v_0^{(k)} = 0$. Справді, $x^k \to 0$, $k \to \infty$, у топології $R\big[[x]\big]$, тому й $\mathcal{F}(x^k) = v_k(x) \to 0$, $k \to \infty$. Звідси випливає, що $\lim_{k\to\infty} v_0^{(k)} = 0$. Таким чином,

$$\mathcal{F}\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=j}^{\infty} a_{k-j} C_k^j u_k\right) x^j,$$

де $a_k = v_0^{(k)} \in R$ і $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. За лемою 4 $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{1}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$.

Теорему доведено.

***Приклад* 7.** Нехай p — просте число і $R = \mathbb{Z}_p$. Розглянемо диференціальний оператор $\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{p^n}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$. Тоді за лемою 4 для будь-якого формального степеневого ряду $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k \in \mathbb{Z}\big[[x]\big]$ маємо $(\mathcal{F}u)(x) \in \mathbb{Z}_p\big[[x]\big]$, оскільки $\lim_{n\to\infty} p^n = 0$ в $\mathbb{Z}_p$. Зазначимо, що оператор $\mathcal{F}$ можна зобразити у вигляді $e^{p\frac{d}{dx}}$, а ряд $(\mathcal{F}u)(x)$ можна розглядати як зсув ряду $u(x)$ на p: $u(x+p) = (\mathcal{F}u)(x)$. При цьому, якщо $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, то $(\mathcal{F}u)(0) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \dfrac{1}{1-p}$ в $\mathbb{Z}_p$ і $(\mathcal{F}u)(0) \notin \mathbb{Z}$ при $p \neq 2$. Таким чином, $\mathcal{F}u \notin \mathbb{Z}\big[[x]\big]$, якщо $p \neq 2$.

Зауважимо, що можна визначити зсуви формального степеневого ряду $u(x) \in \mathbb{Z}\big[[x]\big]$ і на будь-яке складене натуральне число m, що ділиться на прості числа $p_1, \ldots, p_j$. Ці зсуви будуть належати кільцям $\mathbb{Z}_{p_1}\big[[x]\big], \ldots, \mathbb{Z}_{p_j}\big[[x]\big]$. Водночас, якщо $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, то $u(x+1) = \sum_{k=0}^{\infty}(x+1)^k$ не є коректно визначеним елементом кільця $\mathbb{Z}_p\big[[x]\big]$ для будь-якого простого числа p.

Покажемо, що так само, як і в пункті 2 (див. зауваження 2), ми не можемо гарантувати, що відображення $\mathcal{F}$ з твердження теореми 7 буде мати вигляд (9), де $b_n \in R$.

***Приклад* 8.** Нехай $R = \mathbb{Z}_2$. Розглянемо диференціальний оператор $\mathcal{F} = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}$, де $a_n = 2^{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$. Припустимо, що цей оператор допускає зображення (9) з деякими коефіцієнтами $b_n \in \mathbb{Z}_2$. Тоді має місце рівність

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{n!}\frac{d^n}{dx^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{d^n}{dx^n}.$$

Отже, у полі $\mathbb{Q}_2$ 2-адичних чисел справджуються рівності $b_n = \dfrac{2^{n-2}}{n!}$, $n = 2, 3, \ldots$. Зокрема, $b_2 = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}_2$.

Література

1. Н. Бурбаки, *Элементы математики. Функции действительного переменного. Элементарная теория*, Наука, Москва (1965).
2. Ю. Ф. Коробейник, *Операторы сдвига на числовых семействах*, Изд-во Рост. ун-та, Ростов-на-Дону (1983).
3. В. В. Городецький, *Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку*, Рута, Чернівці (2005).
4. S. L. Gefter, A. L. Piven', *Implicit linear differential-difference equations in the module of formal generalized functions over a commutative ring*, J. Math. Sci., **255**, № 4, 409 – 422 (2021).
5. G. Godefroy, J. H. Shapiro, *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal., **98**, № 2, 229 – 269 (1991).
6. А. С. Кривошеев, В. В. Напалков, *Комплексный анализ и операции свертки*, Успехи мат. наук, **47**, № 6, 3 – 58 (1992).
7. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1998).
8. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, Москва (1985).
9. S. L. Gefter, *Differential operators of infinite order in the space of formal Laurent series and in the ring of power series with integer coefficients*, J. Math. Sci., **239**, № 3, 282 – 291 (2019).
10. S. L. Gefter, T. E. Stulova, *Fundamental solution of the simplest implicit linear differential equation in a vector space*, J. Math. Sci., **207**, № 2, 166 – 175 (2015).
11. Н. Бурбаки, *Алгебра. Модули, кольца, формы*, Наука, Москва (1966).
12. S. L. Gefter, A. L. Piven', *Linear partial differential equations in module of formal generalized functions over commutative ring*, J. Math. Sci., **257**, № 5, 579 – 596 (2021).
13. M. Morimoto, *An introductions to Sato's hyperfunctions*, AMS Providence, Rhode Island (1993).
14. Г. Грауэрт, Р. Реммерт, *Аналитические локальные алгебры*, Наука, Москва (1988).
15. C. Perez-Garcia, W. H. Schikhof, *Locally convex spaces over non-Archimedian valued fields*, Cambridge Univ. Press (2010).
16. S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag, New York (2002).

Одержано 18.10.21