DOI: 10.37863/umzh.v74i6.6821

УДК 517.925

В. М. Євтухов, Н. В. Шарай (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

АСИМПТОТИКА ШВИДКО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ З ШВИДКО ЗМІННОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

For binomial essentially nonlinear nonautonomous differential equations of the third order with rapidly varying nonlinearity, we establish necessary and sufficient conditions of existence of rapidly varying solutions and their asymptotic representations for $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$.

Для двочленних істотно нелінійних неавтономних диференціальних рівнянь третього порядку з швидко змінною нелінійністю встановлено необхідні і достатні умови існування та асимптотичні при $t \uparrow \omega$ $(\omega \leq +\infty)$ зображення швидко змінних розв'язків.

1. Вступ. Будемо розглядати диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1.1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a,\omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta_{Y_0} \longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$ — двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$\varphi'(y) \neq 0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi(y)\varphi''(y)}{\varphi'^{\,2}(y)} = 1, \tag{1.2}$$

Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — деякий однобічний окіл Y_0.

З умови (1.2) безпосередньо випливає, що

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} \sim \frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0 \ \ (y \in \Delta_{Y_0}) \quad \text{і} \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \pm\infty. \tag{1.3}$$

За цими умовами функція φ та її похідна першого порядку є (див. монографію [1, с. 91, 92], гл. 3, § 3.4, леми 3.2, 3.3) швидко змінними функціями при $y \to Y_0$.

Для диференціальних рівнянь другого порядку з правою частиною такою ж, як і в (1.1), асимптотична поведінка розв'язків досліджувалась в [1 – 6].

У роботі [7] для диференціального рівняння (1.1) було досліджено питання про існування і асимптотику так званих $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язків при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; 1; \dfrac{1}{2}\right\}$.

Означення 1.1. *Розв'язок y диференціального рівняння* (1.1) *називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє умови*

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \textit{або} & 0, \\ \textit{або} & \pm\infty, \end{cases} \quad k = 1, 2, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''^2(t)}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0.$$

Метою даної статті є встановлення асимптотики $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-розв'язків диференціального рівняння (1.1) в особливому випадку, коли $\lambda_0 = 1$. Для кожного такого розв'язку згідно з апріорними асимптотичними властивостями $P_\omega(Y_0,1)$-розв'язків (див. [8], розд. 3, § 10) мають місце співвідношення

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \frac{y'''(t)}{y''(t)} \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \tag{1.4}$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{якщо} \quad \omega = +\infty. \end{cases}$$

Звідси, зокрема, випливає, що $P_\omega(Y_0,1)$-розв'язок рівняння (1.1) та його похідна першого порядку є швидко змінними функціями при $t\uparrow\omega$.

2. Деякі допоміжні твердження. В монографії [9, с. 174 – 180] (п. 3.10) достатньо детально були досліджені функції з класу Γ.

Означення 2.1 [9, с.175]. *Клас* Γ *складається з вимірних неспадних і неперервних праворуч функцій* $f\colon [b,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$, *для кожної з яких існує вимірна функція* $g\colon [b,+\infty[\longrightarrow$ $\longrightarrow]0,+\infty[$, *доповнювальна для функції* f, *така, що*

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{f\left(y+ug(y)\right)}{f(y)} = e^u \quad \textit{для будь-якого} \quad u\in\mathbb{R}.$$

Припустимо тепер, що Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — деякий однобічний окіл Y_0, і розглянемо неперервну функцію $f\colon \Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$. При цьому тут і скрізь далі, не обмежуючи загальності, будемо вважати, що

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(y_0), \quad \text{де} \quad \Delta_{Y_0}(y_0) = \begin{cases} [y_0, Y_0[, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} - \text{лівий окіл} \quad Y_0, \\ ]Y_0, y_0], & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} - \text{правий окіл} \quad Y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

де $y_0\in\Delta_{Y_0}$ таке, що $|y_0|<1$ при $Y_0=0$ і $y_0>1$ $(y_0<-1)$ при $Y_0=+\infty$ (при $Y_0=-\infty$).

Зазначимо, що якщо $f\colon \Delta_{Y_0}\longrightarrow]0,+\infty[$ — неперервна монотонна функція, яка задовольняє умову

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}(b)}} f(y) = Z_0 \in \{0;+\infty\}, \tag{2.2}$$

то неперервною і неспадною на деякому проміжку $[b,+\infty[$, а також прямуючою до $+\infty$ при $y\to+\infty$ буде:

1) функція $f_0(y) = \dfrac{1}{f(y)}$ при $Y_0=+\infty$ і $Z_0=0$;

2) функція $f_0(y) = f(-y)$ при $Y_0=-\infty$ і $Z_0=+\infty$;

3) функція $f_0(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ при $Y_0=0$, $\Delta_{Y_0}=]0,y_0]$ і $Z_0=+\infty$;

4) функція $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}$ при $Y_0=0$, $\Delta_{Y_0}=]0,y_0]$ і $Z_0=0$;

5) функція $f_0(y) = f\left(-\dfrac{1}{y}\right)$ при $Y_0 = 0,\ \Delta_{Y_0} = [y_0, 0[$ і $Z_0 = +\infty$;

6) функція $f_0(y) = \dfrac{1}{f\left(-\dfrac{1}{y}\right)}$ при $Y_0 = 0,\ \Delta_{Y_0} = [y_0, 0[$ і $Z_0 = 0$;

7) функція $f_0(y) \equiv f(y)$ при $Y_0 = +\infty$ і $Z_0 = +\infty$.

Означення 2.2. *Класом* $\Gamma(Y_0, Z_0)$ *будемо називати множину неперервних і монотонних функцій* $f\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$, *що задовольняють умову* (2.2), *для кожної з яких відповідна до неї неперервна і неспадна функція* f_0, *яка визначена в пп.* $1-7$, *належить класу* Γ.

З використанням властивостей функцій з класу Γ в роботі [8] встановлено такі твердження для функцій із класу $\Gamma(Y_0, Z_0)$.

Лема 2.1. *Якщо* $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$, *то існує неперервна функція* $g\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *яка називається доповнювальною для* f, *така, що*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f(y+ug(y))}{f(y)} = e^u \quad \textit{для будь-якого} \quad u \in \mathbb{R},$$

до того ж доповнювальна функція визначається однозначно з точністю до еквівалентних при $y \to Y_0$ *функцій, в якості однієї з яких можна вибрати функцію*

$$\frac{\displaystyle\int_{Y}^{y} f(x)\,dx}{f(y)}, \quad \textit{де} \quad Y = \begin{cases} y_0, & \textit{якщо} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = +\infty, \\ Y_0, & \textit{якщо} \quad \lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y) = 0. \end{cases}$$

Лема 2.2. 1. *Якщо* $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$, *то вона є швидко змінною при* $y \to Y_0$, *а доповнювальна для неї функція* g *задовольняє умову* $\lim\limits_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \dfrac{g(y)}{y} = 0$. 2. *Якщо* $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ *з доповнювальною функцією* g, *то для будь-якої неперервної функції* $u\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R}$, *яка задовольняє умови*

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} u(y) = u_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} f(y + u(y)g(y)) = Z_0,$$

має місце граничне співвідношення

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{f\left(y + u(y)g(y)\right)}{f(y)} = e^{u_0}.$$

Лема 2.3. *Якщо* $f \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ *з доповнювальною функцією* g *і є строго монотонною, то обернена до неї функція* $f^{-1}\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$ *є повільно змінною при* $z \to Z_0$ *і задовольняє граничне співвідношення*

$$\lim_{\substack{z\to Z_0\\ z\in\Delta_{Z_0}}} \frac{f^{-1}(\lambda z) - f^{-1}(z)}{g(f^{-1}(z))} = \ln\lambda \quad \textit{при кожному} \quad \lambda > 0,$$

до того ж для кожного $\Lambda > 1$ *дане граничне співвідношення виконується рівномірно по* $\lambda \in \left[\dfrac{1}{\Lambda}, \Lambda\right]$.

Лема 2.4. *Якщо функція* $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ *є двічі неперервно диференційовною і задовольняє умови*

$$f'(y) \neq 0, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} f(y) = Z_0 \in \{0; +\infty\}, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{f''(y) f(y)}{f'^2(y)} = 1,$$

то функції f *і* $f'(y)$ *належать класу* $\Gamma(Y_0, Z_0)$ *з доповнювальною функцією* g, *яка визначається однозначно з точністю до еквівалентних при* $y \to Y_0$ *функцій, і в якості однієї з них можна вибрати одну з функцій*

$$\frac{\int_Y^y f(x)\, dx}{f(y)} \sim \frac{f(y)}{f'(y)} \sim \frac{f'(y)}{f''(y)},$$

де Y *визначено у лемі* 2.1.

Як доповнення до цих лем наведемо також твердження, які відносяться до теорії повільно, правильно і швидко змінних функцій (див., наприклад, монографію [1, с. 117], додаток, твердження 10).

Лема 2.5. *Якщо* $f_0 : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *— неперервно диференційовна функція і*

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y f_0'(y)}{f_0(y)} = \sigma, \tag{2.3}$$

то функція f_0 *при* $y \to Y_0$ *є у випадках* $\sigma = 0,\ 0 < |\sigma| < +\infty$ *і* $\sigma = +\pm\infty$ *відповідно повільно змінною, правильно змінною порядку* σ *і швидко змінною.*

З приводу повільно, правильно і швидко змінних функцій, а також їхніх властивостей див. монографії [1, 8, 9]. Зокрема, відомо, що для кожної знакосталої правильно змінної при $y \to Y_0$ функції $f : \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ порядку σ має місце зображення

$$f(y) = |y|^\sigma L(t),$$

де $L\colon \Delta_{Y_0} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — повільно змінна функція при $y \to Y_0$, й існує еквівалентна до неї при $y \to Y_0$ неперервно диференційовна функція f_0 (яку називають нормалізованою правильно змінною функцією порядку σ), для якої виконується умова (2.3).

Окрім того, в подальшому буде потрібно ще одне твердження про існування зникаючих розв'язків системи квазілінійних диференціальних рівнянь

$$v_i' = h_i(t) \left[f_i(t) + \sum_{k=1}^{3} c_{ik}(t) v_k + V_i(t, v_1, v_2, v_3) \right], \quad i = 1, 2, 3, \tag{2.4}$$

в якій функції $h_i,\ f_i : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3,\ c_{ik} : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R},\ i, k = 1, 2, 3,$ неперервні і такі, що

$$h_i(t) \neq 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} f_i(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} c_{ik}(t) = c_{ik}^0 = \mathrm{const}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

а функції V_i неперервні на множині $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_b[$, де $\mathbb{R}_b = \{y \in \mathbb{R} \colon |y| \leq b,\ b > 0\}$, і задовольняють умови

$$\lim_{|v_1| + |v_2| + |v_3| \to 0} \frac{V_i(t, v_1, v_2, v_3)}{|v_1| + |v_2| + |v_3|} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{рівномірно по} \quad t \in [t_0, \omega[.$$

З теореми 2.2 работи [11] випливає таке твердження.

Лема 2.6. *Якщо для деякої неперервної функції* $h_0 : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *виконуються умови*

$$h_i(t) \sim h_0(t) \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \quad \int\limits_{t_0}^{\omega} h_0(t)\, dt = \pm\infty$$

і характеристичне рівняння матриці $C_0 = (c^0_{ik})^3_{i,k=1}$ *не має коренів з нульовою дійсною частиною, то система диференціальних рівнянь* (2.4) *має хоча б один розв'язок* $(v_i)^3_{i=1} : [t_1, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}_b,\ t_1 \in [t_0, \omega[$, *який прямує до нуля при* $t \uparrow \omega$, *до того ж існує* m $(1 \le m \le 3)$-*параметрична сім'я таких розв'язків, якщо серед коренів характеристичного рівняння матриці* C_0 *є* m *коренів* (*з урахуванням кратних*), *дійсні частини яких мають знак, протилежний знаку функції* $h_0(t)$.

3. Основні результати. Введемо необхідні для подальшого викладу допоміжні позначення. Будемо вважати, що область визначення функції φ у рівнянні (1.1) визначена формулою (2.1). Далі, покладемо

$$\mu_0 = \operatorname{sign} \varphi'(y), \quad \nu_0 = \operatorname{sign} y_0, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ -1, & \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases}$$

і введемо функції

$$J_0(t) = \int\limits_{A_0}^{t} p_0^{\frac{1}{3}}(\tau)\, d\tau, \quad \Phi(y) = \int\limits_{B}^{y} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(s)},$$

де $p_0 : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервна або неперервно диференційовна функція така, що $p(t) \sim \sim p_0(t)$ при $t \uparrow \omega$,

$$A_0 = \begin{cases} \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_a^\omega p_0^{\frac{1}{3}}(\tau)\, d\tau < +\infty, \\ a, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_a^\omega p_0^{\frac{1}{3}}(\tau)\, d\tau = +\infty, \end{cases} \qquad B = \begin{cases} Y_0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(s)} = \text{const}, \\ y_0, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{y_0}^{Y_0} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

З огляду на означення 1.1 зазначимо, що числа ν_0, ν_1 і α_0 визначають знаки кожного $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язку, першої і третьої похідних (відповідно) в деякому лівому околі ω. При цьому умови

$$\nu_0 \nu_1 < 0, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = 0, \quad \text{і} \quad \nu_0 \nu_1 > 0, \quad \text{якщо} \quad Y_0 = \pm\infty,$$

є необхідними для існування таких розв'язків. І навіть більше, внаслідок (1.1), означення 1.1 і (1.4) необхідно також, щоб виконувались нерівності

$$\alpha_0 \nu_1 > 0, \quad \nu_0 \operatorname{sign} y''(t) > 0.$$

Тепер акцентуємо увагу на деяких властивостях функції Φ. Вона зберігає знак на проміжку Δ_{Y_0}, прямує або до нуля, або до $\pm\infty$ при $y \to Y_0$ і є зростаючою на Δ_{Y_0}, оскільки на цьому проміжку $\Phi'(y) = y^{-\frac{2}{3}} \varphi^{-\frac{1}{3}}(y) > 0$. Тому для неї існує обернена функція $\Phi^{-1} : \Delta_{Z_0} \longrightarrow \Delta_{Y_0}$, де на підставі другої з умов (1.2) і монотонного зростання Φ^{-1}

$$Z_0 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(y) = \begin{cases} \text{або} \quad 0, \\ \text{або} \quad +\infty, \end{cases}$$
$$\Delta_{Z_0} = \begin{cases} [z_0, Z_0[, \quad \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} = [y_0, Y_0[, \\ ]Z_0, z_0], \quad \text{якщо} \quad \Delta_{Y_0} =]Y_0, y_0], \end{cases} \qquad z_0 = \Phi(y_0). \tag{3.1}$$

Далі, зазначимо, що

$$\left(\frac{\varphi^{\frac{2}{3}}(y)}{y^{\frac{2}{3}} \varphi'(y)} \right)' = \frac{1}{y^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(y)} \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\varphi(y)}{y \varphi'(y)} - \frac{\varphi''(y) \varphi(y)}{\varphi'^2(y)} \right].$$

Звідси з урахуванням умов (1.2), (1.3) одержимо співвідношення

$$\left(\frac{\varphi^{\frac{2}{3}}(y)}{y^{\frac{2}{3}} \varphi'(y)} \right)' = \frac{1}{y^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(y)} \left[-\frac{1}{3} + o(1) \right] \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від y_0 до y і враховуючи правило вибору межі інтегрування B у функції Φ, приходимо до висновку, що

$$\Phi(y) = -\frac{3\varphi^{\frac{2}{3}}(y)}{y^{\frac{2}{3}} \varphi'(y)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to Y_0. \tag{3.2}$$

Звідси з урахуванням знака φ' також випливає, що

$$\operatorname{sign} \Phi(y) = -\mu_0 \quad \text{при} \quad y \in \Delta_{Y_0}. \tag{3.3}$$

На підставі (3.2) і (1.3) маємо

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \frac{y^{-\frac{2}{3}} \varphi^{-\frac{1}{3}}(y)}{\Phi(y)} \sim -\frac{\varphi'(y)}{3\varphi(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0,$$
$$\frac{\Phi''(y)\Phi(y)}{\Phi'^2(y)} = -\frac{1}{3} \frac{y^{-\frac{1}{3}} \varphi^{-\frac{5}{3}} \varphi'(y) \left[\dfrac{\varphi(y)}{y \varphi'(y)} + 1 \right] \Phi(y)}{|y|^{-1} \varphi^{-1}(y)} \sim 1 \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Тому $\Phi \in \Gamma_{Y_0}(Z_0)$ і відповідно до леми 2.1 в якості доповнювальної для неї можна вибрати одну з еквівалентних функцій

$$\frac{\Phi'(y)}{\Phi''(y)} \sim \frac{\Phi(y)}{\Phi'(y)} \sim -\frac{3\varphi(y)}{\varphi'(y)} \quad \text{при} \quad y \to Y_0.$$

Оскільки

$$\lim_{z \to Z_0} \frac{z \left(\varphi(\Phi^{-1}(z)) \right)'}{\varphi(\Phi(z))} = \lim_{z \to Z_0} \frac{z (\varphi'(\Phi^{-1}(z))) |\Phi(z)|^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(\Phi^{-1}(z))}{\varphi(\Phi^{-1}(z))} =$$
$$= \lim_{y \to Y_0} \frac{\Phi(y) \varphi'(y) y^{\frac{2}{3}}}{\varphi^{\frac{2}{3}}(y)} = -3,$$

то згідно з лемою 2.4 функція $\varphi(\Phi^{-1}(z))$ є правильно змінною функцією порядку –3 при $z \to Z_0$, тобто для неї має місце зображення

$$\varphi(\Phi^{-1}(z)) = |z|^{-3}L(z),$$

де $L\colon \Delta_{Z_0} \longrightarrow]0,+\infty[$ — повільно змінна функція при $z \to Z_0$.

Аналогічно можна показати, що функція $\varphi'(\Phi^{-1}(z))$ також є правильно змінною функцією порядку –3 при $z \to Z_0$. Окрім вказаних вище позначень введемо також допоміжні функції:

$$q(t) = \frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'}{\alpha_0 J_2(t)}, \quad H(t) = \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)},$$

$$J_1(t) = \int\limits_{A_1}^{t} p_0(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(\tau))\right) d\tau, \quad J_2(t) = \int\limits_{A_2}^{t} J_1(\tau)d\tau,$$

де

$$A_1 = \begin{cases} t_1, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{t_1}^{\omega} p_0(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(\tau))\right) d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{t_1}^{\omega} p_0(\tau)\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(\tau))\right) d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad t_1 \in [a,\omega],$$

$$A_2 = \begin{cases} t_1, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{t_1}^{\omega} J_1(\tau)d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \displaystyle\int_{t_1}^{\omega} J_1(\tau)d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Для рівняння (1.1) справедливі такі твердження.

Теорема 3.1. *Для існування $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків диференціального рівняння* (1.1) *необхідно, щоб виконувались нерівності*

$$\alpha_0 \nu_1 > 0, \quad \alpha_0 \mu_0 J_0(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a,\omega[, \tag{3.4}$$

$$\nu_0 \alpha_0 < 0, \quad \textit{якщо} \quad Y_0 = 0, \quad \nu_0 \alpha_0 > 0, \quad \textit{якщо} \quad Y_0 = \pm\infty, \tag{3.5}$$

і умови

$$\frac{\alpha_0 J_2(t)}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} \sim \frac{J_1(t)}{J_2(t)} \sim \frac{J_1'(t)}{J_1(t)} \sim \frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.6}$$

$$\alpha_0 \lim_{t\uparrow\omega} J_0(t) = Z_0, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} = \pm\infty, \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)} = \pm\infty. \tag{3.7}$$

І навіть більше, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = \Phi^{-1}\left(\alpha_0 J_0(t)\right)\left[1 + \frac{o(1)}{H(t)}\right], \tag{3.8}$$

$$y'(t) = \alpha_0 J_2(t)[1 + o(1)], \quad y''(t) = \alpha_0 J_1(t)[1 + o(1)]. \tag{3.9}$$

Теорема 3.2. *Нехай* $p_0 : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — *неперервно диференційовна функція і поряд з* (3.4) – (3.7) *виконуються умови*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{q'(t) H^{\frac{1}{3}}(t) J_2(t)}{J_2'(t)} = 0, \qquad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2} \left(\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^{\frac{2}{3}} = 0. \tag{3.10}$$

Тоді диференціальне рівняння (1.1) *містить при* $\alpha_0 \mu_0 > 0$ *двопараметричну, а при* $\alpha_0 \mu_0 < < 0$ *однопараметричну сім'ю* $P_\omega(Y_0, 1)$-*розв'язків, які допускають при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні зображення* (3.8), *до того ж таких, похідні першого і другого порядку яких задовольняють при* $t \uparrow \omega$ *асимптотичні співвідношення*

$$y'(t) = \alpha_0 J_2(t) \left[q(t) + o\left((H(t))^{-\frac{2}{3}} \right) \right], \quad y''(t) = \alpha_0 J_1(t) \left[q(t) + o\left((H(t))^{-\frac{1}{3}} \right) \right]. \tag{3.11}$$

***Зауваження* 3.1.** В асимптотичних співвідношеннях (3.6)

$$\frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} = \alpha_0 \left(\frac{p_0(t) \varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3.12}$$

Тому з (3.6) випливає, що

$$J_2(t) = \left(p_0(t) \left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)^2 \varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right) \right)^{\frac{1}{3}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$J_1(t) = \alpha_0 \left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)^{\frac{1}{3}} \left(p_0(t) \varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right) \right)^{\frac{2}{3}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Ці співвідношення дозволяють асимптотичні співвідношення (3.10) записати без інтегралів.

***Зауваження* 3.2.** В роботі [6] (див. доведення теореми 3.2) було показано, що при виконанні умови існування скінченної або рівної $\pm\infty$ границі, яка стоїть у лівій частині другого з граничних співвідношень (3.10), цією границею може бути лише нуль.

***Зауваження* 3.3.** У випадку існування скінченної або рівної $\pm\infty$ границі, яка стоїть у лівій частині першого з граничних співвідношень (3.10), ця границя дорівнює нулю, якщо

$$\int_{y_0}^{Y_0} \left(\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{y} = \pm\infty. \tag{3.13}$$

Справді, на підставі умов (3.6), (3.12), (3.2), (3.4) і з урахуванням того, що $\varphi'\left(\Phi^{-1}(z)\right)$ — правильно змінна при $z \to Z_0$ функція порядку –3, маємо

$$\frac{q'(t) H^{\frac{1}{3}}(t) J_2(t)}{J_2'(t)} \sim q'(t) \frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'} \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) \varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} \right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \alpha_0 q'(t) \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}{p_0(t) \varphi(\alpha_0 J_0(t))} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) \varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} \right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{\alpha_0 q'(t)}{p_0^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Якщо тепер припустити, що границя при $t \uparrow \omega$ для виразу, який стоїть у лівій частині, дорівнює відмінній від нуля сталій, то відповідно викладеному вище будемо мати

$$q'(t) = \alpha_0 p_0^{\frac{1}{3}}(t) \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)\right)^{-\frac{1}{3}} \xi(t),$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} \xi(t) = \begin{cases} \text{або} & \text{const} \neq 0, \\ \text{або} & \pm\infty. \end{cases}$$

Якщо зінтегрувати це співвідношення на проміжку від t_0 до t і врахувати, що на підставі першої з умов (3.7), другої з умов (3.4), умов (3.1), вигляду функції Φ і умови (3.13)

$$\int\limits_{t_0}^{\omega} \alpha_0 p_0^{\frac{1}{3}}(t) \left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)\right)^{-\frac{1}{3}} dt =$$

$$= \int\limits_{z(t_0)}^{Z_0} \left(\frac{\Phi^{-1}(z)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(z)\right)} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\varphi'\left(\Phi^{-1}(z)\right)\right)^{-\frac{1}{3}} dz = \int\limits_{y(t_0)}^{Y_0} \left(\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} \right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{y} = \pm\infty,$$

то одержимо

$$\lim_{t\uparrow\omega} q(t) = \pm\infty.$$

Однак це неможливо, оскільки згідно з (3.6) $q(t) \longrightarrow 1$ при $t \uparrow \omega$. Таким чином, при умові існування границі, яка міститься зліва у першому з граничних співвідношень (3.10), і виконанні умов (3.13) цією границею може бути лише нуль.

***Доведення теореми* 3.1.** Нехай $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ — довільний $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язок диференціального рівняння (1.1). Тоді даний розв'язок і його похідні першого, другого і третього порядків зберігають знаки на деякому проміжку $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, до того ж для цих знаків ν_0, ν_1, ν_2, ν_3 (відповідно) у відповідності з (1.1), (1.4) маємо

$$\nu_3 = \alpha_0, \quad \nu_1 = \alpha_0, \quad \nu_2 = \nu_0,$$

і тому виконується перша з нерівностей (3.4) і згідно з (3.1) — умова (3.5). Окрім того, для цього розв'язку відповідно до (1.4) має місце асимптотичне співвідношення

$$y'''(t) = \frac{y'''(t)}{y''(t)} \frac{y''(t)}{y'(t)} \frac{y'(t)}{y(t)} y(t) \sim \left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^3 y(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

На підставі цього співвідношення з (1.1) випливає, що

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)} \right)^3 = \alpha_0 p_0(t) \frac{\varphi(y(t))}{y(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

і тому

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha_0 p_0^{\frac{1}{3}}(t) \left(\frac{\varphi(y(t))}{y(t)} \right)^{\frac{1}{3}} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega, \tag{3.14}$$

або

$$\frac{y'(t)}{y^{\frac{2}{3}(t)} \varphi^{\frac{1}{3}}(y(t))} = \alpha_0 p_0^{\frac{1}{3}}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Інтегруючи це співвідношення на проміжку від t_1 до t, одержуємо

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(s)} = \alpha_0 \int\limits_{t_1}^{t} p_0^{\frac{1}{3}}(\tau)[1 + o(1)]\, d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Оскільки згідно з означенням $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язку $y(t) \longrightarrow Y_0$ при $t \uparrow \omega$, то звідси випливає, що невласні інтеграли

$$\int\limits_{y(t_1)}^{Y_0} \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}} \varphi^{\frac{1}{3}}(s)} \quad \text{і} \quad \int\limits_{t_1}^{\omega} p_0^{\frac{1}{3}}(\tau)\, d\tau$$

збігаються або розбігаються одночасно. З огляду на цей факт і правило вибору меж інтегрування A_0 і B у введених на початку даного пункту функціях J_0 і Φ встановлені вище співвідношення можна записати у вигляді

$$\Phi(y(t)) = \alpha_0 J_0(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.15}$$

Звідси з урахуванням умов (3.1), (3.3) випливає, що виконується друга з нерівностей (3.4) і перша з умов (3.7). Крім того, з (3.14) і (3.15) маємо

$$\frac{y'(t)}{y^{\frac{2}{3}}(t) \varphi^{\frac{1}{3}}(y(t)) \Phi(y(t))} = \frac{p_0^{\frac{1}{3}}(t)}{J_0(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

і тому згідно з (3.2)

$$\frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} \frac{y(t)\varphi'(y(t))}{\varphi(y(t))} = -\frac{3\pi_\omega(t) J_0'(t)}{J_0(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Звідси з урахуванням другого з граничних співвідношень (1.3), (1.4) випливає справедливість третьої з умов (3.7).

З (3.15) отримуємо, що

$$y(t) = \Phi^{-1}\left(\alpha_0 J_0(t)[1 + o(1)]\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.16}$$

Оскільки виконується перша з умов (3.7), функція $\Phi^{-1}(z)$ є повільно змінною, а $\varphi\left(\Phi^{-1}(z)\right)$ — правильно змінною порядку –3 при $z \to Z_0$, то відповідно до теореми про рівномірну збіжність для повільно змінних функцій (див., наприклад, [1, с. 3])

$$\Phi^{-1}\left(\alpha_0 J_0(t)[1 + o(1)]\right) \sim \Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)[1 + o(1)])\right) \sim \varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

На підставі цих асимптотичних співвідношень і (3.13) з (3.14) і (1.1) випливає, що

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \sim \alpha_0 \left(\frac{p_0(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))} \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

і

$$y'''(t) = \alpha_0 p_0(t)\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В результаті інтегрування останнього співвідношення на проміжку від t_2 до t, де $t_2 \in [t_1, \omega[$ вибрано так, щоб $\alpha_0 J_0(t) \in \Delta_{Z_0}$ при $t \in [t_2, \omega[$, з урахуванням означення $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язку одержимо співвідношення вигляду

$$y''(t) = \alpha_0 J_1(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

а також співвідношення

$$y'(t) = \alpha_0 J_2(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

тобто мають місце зображення (3.9). Звідси і з (3.14) на підставі (1.4), (3.13) випливає, що мають місце асимптотичні співвідношення (3.6) і виконується друга з умов (3.7).

Справедливість асимптотичного зображення (3.8) безпосередньо випливає з (3.16) і леми 2.3, якщо врахувати, що $\Phi \in \Gamma(Y_0, Z_0)$ з доповнюючою функцією $g(y) = -\dfrac{3\varphi(y)}{\varphi'(y)}$.

Теорему 3.1 доведено.

***Доведення теореми* 3.2.** Припустимо, що $p_0 \colon [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ — неперервно диференційовна функція і поряд з (3.4)–(3.7) виконуються умови (3.2). Покажемо, що у цьому випадку диференціальне рівняння (1.1) має хоча б один розв'язок, який допускає при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (3.8), (3.11), і з'ясуємо питання про кількість таких розв'язків.

Оскільки $p(t) \sim p_0(t)$ при $t \uparrow \omega$, то має місце зображення $p(t) = p_0(t)[1 + r(t)]$, де $r \colon [a, \omega[\longrightarrow]-1, +\infty[$ — неперервна функція така, що $\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0$. Враховуючи це зображення, диференціальне рівняння (1.1) за допомогою замін

$$\begin{gathered} y(t) = \Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} y_1(t), \\ y'(t) = \alpha_0 J_2(t)[1 + y_2(t)], \quad y''(t) = \alpha_0 J_1(t)[1 + y_3(t)] \end{gathered} \tag{3.17}$$

зводимо до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} y_1' &= E(t)\left[1 - q(t) + q(t)h(t)y_1 + y_2\right], \\ y_2' &= \frac{J_1(t)}{J_2(t)}\left[y_3 - y_2\right], \\ y_3' &= \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[-1 - y_3 + G(t, y_1)[1 + r(t)]\right], \end{aligned} \tag{3.18}$$

де

$$E(t) = \frac{\alpha_0 J_2(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}, \quad h(t) = \left.\frac{\left(\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right)^2}\right|_{z=\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))},$$

$$G(t, y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) + \dfrac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} y_1\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_1(t))\right)}.$$

Вибравши, з урахуванням другої з умов (3.4), першої з умов (3.7), умови (3.1) і останньої з умов (1.3), число $t_1 \in [a, \omega[$ так, щоб

$$\alpha_0 J_0(t) \in \Delta_{Z_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[, \tag{3.19}$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} y_1 \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{i} \quad |y_1| \le \frac{1}{3}, \tag{3.20}$$

розглянемо дану систему рівнянь на множині

$$[t_1, \omega[\times \mathbb{R}^3_{\frac{1}{3}}, \quad \text{де} \quad \mathbb{R}^3_{\frac{1}{3}} = \left\{(y_1, y_2, y_3) \colon \ |y_i| \le \frac{1}{3}, \ i = 1, 2, 3\right\}.$$

При цьому зауважимо, що згідно з першою з умов (3.7), (3.19), (3.1) і другою з умов (1.3)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} H(t) = \pm\infty. \tag{3.21}$$

На множині $[t_1, \omega[\times \mathbb{R}^3_{\frac{1}{3}}$ праві частини системи рівнянь (3.18) неперервні і функція G має неперервні частинні похідні до другого порядку включно за змінною y_1.

Розкладаючи при фіксованому $t \in [t_1, \omega[$ функцію G за формулою Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа до членів другого порядку, отримуємо

$$G(t, y_1) = 1 + y_1 + R(t, y_1), \tag{3.22}$$

де

$$R(t, y_1) = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)\varphi''\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) + \dfrac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}\xi_1\right)}{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)} y_1^2,$$

$$|\xi_1| < |y_1|.$$

На підставі (3.20) і (3.21) з останньої з умов (1.3) випливає, що

$$\varphi''\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}\xi_1\right) =$$

$$= \frac{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) + \dfrac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}\xi_1\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t)) + \dfrac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}\xi_1\right)}[1 + r_1(t, y_1)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_1(t,y_1)=0 \quad \text{рівномірно по} \quad y_1\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right].$$

Відповідно до леми 2.4 функції φ, φ' належать $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$ із доповнювальною функцією $g(y) = = \dfrac{-3\varphi(y)}{\varphi'(y)}$. Тому за лемами 2.1 і 2.2 останнє асимптотичне співвідношення можна записати у вигляді

$$\varphi''\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))+\frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha) J_0(t)\right)}\xi_1\right)=\frac{\varphi'^2\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}e^{-\frac{\xi}{3}}[1+r_2(t,y_1)],$$

де

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_2(t,y_1)=0 \quad \text{рівномірно по} \quad y_1\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right].$$

Звідси випливає, що

$$R(t,y_1)=e^{-\frac{\xi}{3}}[1+r_2(t,y_1)]y_1^2,$$

де $|\xi|<|y_1|$ і r_2 задовольняє умову (3.20).

Згідно з цим зображенням для кожного $\varepsilon>0$ існують $t_0\in[t_1,\omega[$ і $0<\delta\le\dfrac{1}{3}$ такі, що

$$|R(t,y_1)|\le(1+\varepsilon)|y_1|^2 \quad \text{при} \quad t\in[t_0,\omega[, \quad |y_1|\le\delta. \tag{3.23}$$

В подальшому будемо вважати, що число $\varepsilon>0$ вибрано якимось чином.

Врахувавши (3.22) запишемо систему рівнянь (3.18) у вигляді

$$\begin{aligned}
y_1' &= E(t)\left[-1+q(t)+q(t)h(t)y_1+y_2\right],\\
y_2' &= \frac{J_1(t)}{J_2(t)}\left[y_3-y_2\right],\\
y_3' &= \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[r(t)+y_1(1+r(t))-y_3+R(t,y_1)(1+r(t))\right]
\end{aligned}$$

і дослідимо її на множині

$$[t_0,\omega[\times\mathbb{R}^3_\delta, \quad \text{де} \quad \mathbb{R}^3_\delta=\{(y_1,y_2,y_3)\colon |y_1|\le\delta,\ |y_2|\le\delta\ |y_3|\le\delta\}.$$

Спочатку дану систему за допомогою перетворення

$$y_1(t)=z_1(t), \quad y_2(t)=q(t)-1+z_2(t), \quad y_3(t)=q(t)-1+z_3(t) \tag{3.24}$$

зведемо до системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}
z_1' &= E(t)\left[q(t)h(t)z_1+z_2\right],\\
z_2' &= \frac{J_1(t)}{J_2(t)}\left[-q'(t)\frac{J_2(t)}{J_1(t)}+z_3-z_2\right],\\
z_3' &= \frac{J_1'(t)}{J_1(t)}\left[-q'(t)\frac{J_1(t)}{J_1'(t)}+r(t)+1-q(t)+(1+r(t))y_1-z_3+R(t,z_1)(1+r(t))\right].
\end{aligned} \tag{3.25}$$

У цій системі рівнянь множники, які стоять у правої частині перед квадратними дужками в другому і третьому рівняннях, згідно з умовами (3.6) еквівалентні при $t \uparrow \omega$, а для відношення множників, які стоять в першому і другому рівняннях, на підставі (3.6) і другої з умов (3.21) маємо

$$\frac{E(t)J_2(t)}{J_2'(t)} = \frac{\alpha_0 J_2(t)}{\Phi(\alpha_0 J_0(t))}\frac{J_2(t)}{J_2'(t)}H(t) \sim H(t) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Щоб асимптотично „зрівняти" ці коефіцієнти, застосуємо до системи (3.25) додаткове перетворення

$$z_1(t) = v_1(t), \quad z_2(t) = H^{-\frac{2}{3}}(t)v_2(t), \quad z_3(t) = H^{-\frac{1}{3}}(t)v_3(t). \tag{3.26}$$

В результаті одержимо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$v_i'(t) = h_i(t)\left[f_i(t) + \sum_{k=1}^{3} c_{ik}(t)v_k + V_i(t, v_1, v_2, v_3)\right], \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.27}$$

де

$$h_1(t) = \frac{\alpha_0 J_2(t)H^{\frac{1}{3}}(t)}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}, \quad h_2(t) = \frac{J_2'(t)H^{\frac{1}{3}}(t)}{J_2(t)}, \quad h_3(t) = \frac{J_1'(t)H^{\frac{1}{3}}(t)}{J_1(t)},$$

$$f_1(t) \equiv 0, \quad f_2(t) = -\frac{q'(t)J_2(t)H^{\frac{1}{3}}(t)}{J_2'(t)}, \quad f_3(t) = -\frac{q'(t)J_1(t)}{J_1'(t)} + r(t) + 1 - q(t),$$

$$c_{11}(t) = q(t)h(t)H^{\frac{2}{3}}(t), \quad c_{12}(t) \equiv 1, \quad c_{13}(t) \equiv 0,$$

$$c_{21}(t) \equiv 0, \quad c_{22}(t) = \frac{2}{3}\frac{H'(t)J_2(t)}{H^{\frac{4}{3}}(t)J_2'(t)} - H^{-\frac{1}{3}}(t),$$

$$c_{23}(t) \equiv 1, \quad c_{31}(t) = 1 + r(t), \quad c_{32}(t) \equiv 0, \quad c_{33}(t) = \frac{1}{3}\frac{H'(t)J_1(t)}{H^{\frac{4}{3}}(t)J_1'(t)} - H^{-\frac{1}{3}}(t),$$

$$V_i(t, v_1, v_2, v_3) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \quad V_3(t, v_1, v_2, v_3) = R(t, v_1)[1 + r(t)].$$

Тут згідно з умовами (3.6), (3.12) і (3.21)

$$h_i(t) \sim \frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}H^{\frac{1}{3}}(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$\int_{t_0}^{\omega} h_0(t)\,dt = \pm\infty, \quad \operatorname{sign} h_0(t) = \alpha_0\mu_0.$$

Оскільки $\lim_{t\uparrow\omega} r(t) = 0$, виконується перша з умов (3.10) і відповідно до (3.6) $\lim_{t\uparrow\omega} q(t) = 1$ і $\dfrac{J_2'(t)}{J_2(t)} \sim \dfrac{J_1'(t)}{J_1(t)}$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Далі, враховуючи, що

$$\frac{H'(t)}{H^{\frac{4}{3}}(t)} = \frac{\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)'}{\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))}\left[H^{-\frac{1}{3}}(t) + h(t)H^{\frac{2}{3}}(t)\right]$$

і виконується друга з умов (3.10), із використанням (3.6) одержуємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{H'(t)J_2(t)}{H^{\frac{4}{3}}(t)J_2'(t)} = 0, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{H'(t)J_1(t)}{H^{\frac{4}{3}}(t)J_1'(t)} = 0.$$

Тому граничною при $t\uparrow\omega$ для матриці коефіцієнтів $C(c_{ik}(t))_{i,k=1}^3$ системи (3.27) є матриця

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичним рівнянням цієї матриці є рівняння

$$\rho^3 - 1 = 0.$$

Воно має один корінь, рівний одиниці, і два комплексно-спряжених корені з від'ємною дійсною частиною.

Нарешті, зазначимо, що згідно з оцінкою (3.23)

$$\lim_{v_1\to 0}\frac{V(t,v_1)}{v_1} = 0 \quad \text{рівномірно по} \quad t\in[t_0,\omega[.$$

Таким чином, показано, що для системи диференціальних рівнянь (3.27) виконано всі умови леми 2.6. Відповідно до цієї леми система (3.27) при $\alpha_0\mu_0 > 0$ має двопараметричну, а при $\alpha_0\mu_0 < 0$ — однопараметричну сім'ю зникаючих при $t\uparrow\omega$ розв'язків, які задано на деякому проміжку $[t_*,\omega[,\ t_*\in[t_0,\omega[$. Кожному такому розв'язку на підставі замін (3.17), (3.24) і (3.26) відповідає розв'язок $y\colon [t_*,\omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0},\ t_*\in[a,\omega[$, диференціального рівняння (1.1), який допускає при $t\uparrow\omega$ асимптотичні зображення (3.8), (3.11). При цьому неважко переконатись у тому, що кожне з них є $P_\omega(Y_0,1)$-розв'язком.

Теорему 3.2 доведено.

Без припущень щодо неперервної диференційовності функції $p_0\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ можна встановити такий результат.

Теорема 3.3. *Нехай* $p_0\colon [a,\omega[\longrightarrow]0,+\infty[$ *— неперервна функція і поряд із* (3.4) – (3.7) *виконуються умови*

$$\lim_{t\uparrow\omega}[1-q(t)]H^{\frac{2}{3}}(t) = 0, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}}\frac{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)'}{\left(\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^2}\left(\frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)}\right)^{\frac{2}{3}} = 0. \tag{3.28}$$

Тоді диференціальне рівняння (1.1) *при* $\alpha_0\mu_0 > 0$ *має двопараметричну, а при* $\alpha_0\mu_0 < 0$ *— однопараметричну сім'ю* $P_\omega(Y_0,1)$*-розв'язків, які допускають при* $t\uparrow\omega$ *асимптотичне зображення* (3.8), *і*

$$y'(t) = \alpha_0 J_2(t)\left[1 + \frac{o(1)}{H^{\frac{2}{3}}(t)}\right], \quad y''(t) = \alpha_0 J_1(t)\left[1 + \frac{o(1)}{H^{\frac{1}{3}}(t)}\right]. \tag{3.29}$$

Доведення. На відміну від доведення теореми 3.2, тут рівняння (1.1) за допомогою замін (3.17) і перетворення

$$y_1(t) = v_1(t), \quad y_2(t) = H^{-\frac{2}{3}}(t)v_2(t), \quad y_3(t) = H^{-\frac{1}{3}}(t)v_3(t) \tag{3.30}$$

(без додаткового перетворення (3.24)) зводимо до системи диференціальних рівнянь (3.27), в якій функції $h_i,\ V_i,\ i = 1,2,3,\ c_{ik},\ i,k = 1,2,3,$ ті ж самі, що і в доведенні теореми 3.2, а функції $f_i,\ i = 1,2,3,$ мають вигляд

$$f_1(t) = (1 - q(t))H^{\frac{2}{3}}(t), \quad f_2(t) \equiv 0, \quad f_3(t) = r(t).$$

Оскільки тут з урахуванням першої з умов (3.28)

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_i(t) = 0, \quad i = 1,2,3,$$

то, як і при доведенні теореми 3.2, встановлюємо, що одержана система диференціальних рівнянь вигляду (3.27) при $\alpha_0\mu_0 > 0$ має двопараметричну, а при $\alpha_0\mu_0 < 0$ — однопараметричну сім'ю зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків, визначених на деякому проміжку $[t_*, \omega[$, де $t_* \in [t_0, \omega[$. Кожному такому розв'язку системи (3.27) на підставі замін (3.17) і (3.30) відповідає розв'язок $y\colon [t_*, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0},\ t_* \in [a, \omega[$, диференціального рівняння (1.1), який задовольняє при $t \uparrow \omega$ асимптотичні співвідношення (3.8), (3.29). Неважко також перевірити, що кожен із них є $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язком.

Теорему 3.3 доведено.

***Зауваження* 3.4.** У випадку, коли замість першої з умов (3.28) виконується умова

$$\liminf_{t\uparrow\omega} |1 - q(t)|H^{\frac{2}{3}}(t) > 0, \tag{3.31}$$

система диференціальних рівнянь (3.27) не має зникаючих при $t \uparrow \omega$ розв'язків, а тому диференціальне рівняння (1.1) не має $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків, які допускать при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (3.8), (3.29). Справді, якщо система (3.27) має зникаючий при $t \uparrow \omega$ розв'язок, то для цього розв'язку з першого рівняння системи одержуємо, що

$$v_1'(t) = \frac{\alpha_0 J_2(t)\varphi'\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha_0 J_0(t))\right)}(1 - q(t))H^{\frac{2}{3}}(t)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тут інтеграл на проміжку від t_0 до ω від правої частини розбігається до $\pm\infty$. Тому, якщо зінтегрувати одержане співвідношення на проміжку від t_0 до t, одержимо

$$v_1(t) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

що суперечить збіжності $v_1(t)$ до нуля при $t \uparrow \omega$.

Отже, у випадку виконання умов (3.31) залишається відкритим питання про існування $P_\omega(Y_0, 1)$-розв'язків диференціального рівняння (1.1), які задовольняють при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (3.8), (3.9).

***Зауваження* 3.5.** У монографії [14, с. 273–289] (розд. III) наведено умови існування кнезеровських і швидко зростаючих розв'язків рівнянь типу (1.1). Згідно з результатами даної роботи $P_{+\infty}(0, 1)$-розв'язки є кнезеровськими, а $P_{+\infty}(+\infty, 1)$-розв'язки — швидко зростаючими. Питання про те, чи збігаються для рівняння (1.1) множини $P_{+\infty}(0, 1)$- і кнезеровських розв'язків, а також $P_{+\infty}(+\infty, 1)$- і швидко зростаючих розв'язків, залишається відкритим.

Література

1. V. Marić, *Regular variation and differential equations*, Lect. Notes Math., **1726**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).
2. В. М. Евтухов, В. М. Харьков, *Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифференц. уравнения, **43**, № 9, 1311 – 1323 (2007).
3. В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Асимптотическое поведение медленно меняющихся решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью*, Нелінійні коливання, **20**, № 3, 346 – 360 (2017).
4. А. Г. Черникова, *Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью*, Дослідження в математиці і механіці, **22**, № 2 (30), 55 – 70 (2017).
5. В. М. Евтухов, А. Г. Черникова, *Об асимптотике решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющимися нелинейностями*, Укр. мат. журн., **71**, № 1, 73 – 91 (2019).
6. А. Г. Черникова, *Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь з швидко змінними нелінійностями*, Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Одеса (2019).
7. V. M. Evtukhov, N. V. Sharay, *Asymptotic behaviour of solutions of third order differential equation with rapidly varying nonlinearities*, Mem. Different. Equat. and Math. Phys., **77**, 1 – 15 (2019).
8. В. М. Евтухов, *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Киев (1997).
9. N. H. Bingham, C. M. Goldi, J. L. Teugels, *Regular variation*, Encyclopedia Math. and Appl., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1987).
10. Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, Москва (1985).
11. В. М. Евтухов, А. М. Самойленко, *Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., **62**, № 1, 52 – 80 (2010).
12. В. М. Евтухов, А. М. Самойленко, *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями*, Дифференц. уравнения, **47**, № 5, 628 – 650 (2011).
13. В. М. Евтухов, В. Н. Шинкаренко, *Асимптотические представления двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью*, Дифференц. уравнения, **5**, № 3, 308 – 322 (2008).
14. I. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия, *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1990).

Одержано 05.07.21