DOI: 10.37863/umzh.v74i7.7016

УДК 517.9

**О. В. Капустян, О. М. Станжицький** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
**І. Д. Фартушний** (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

# МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЗБУРЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ*

We consider the optimal control problem formed by a parabolic nonlinear equation with rapidly oscillating coefficients, an additive control function, and coercive cost functional. It is proved that the optimal value of the perturbed problem is close to the optimal value for the corresponding problem with averaged coefficients.

Розглядається задача оптимального керування, що складається з параболічного нелінійного рівняння з швидко коливними коефіцієнтами й адитивним керуванням та коерцитивним функціоналом вартості. Доведено, що оптимальне значення збуреної задачі близьке до оптимального значення відповідної задачі з усередненими коефіцієнтами.

**Вступ.** Починаючи з піонерських робіт М. М. Боголюбова [1, 2] ідея усереднення широко поширена в теорії диференціальних рівнянь та їх застосувань [3, 4], включаючи задачі оптимального керування [5, 6]. Основним інструментом є відповідна адаптація теореми Красносельського – Крейна. У цій статті отримано деякі результати щодо усереднення задачі оптимального керування для нелінійного параболічного рівняння зі швидко коливними за часом коефіцієнтами та коерцитивним функціоналом якості. Варто зазначити, що існує багато робіт, присвячених наближеним оптимальним керуванням для параболічних рівнянь зі швидко коливними за просторовою змінною коефіцієнтами [7 – 9]. Ми розглядаємо коефіцієнти вигляду $f(t/\varepsilon, y)$, де $y = y(t,x)$ — шукана функція, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

**Постановка задачі.** В циліндрі $Q_T = (0,T)\times\Omega$, де $\Omega \subset R^n$ — обмежена область, розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = \Delta y(t,x) + f(t/\varepsilon, y(t,x)) + g(y(t,x))u(t,x), \\ &y|_{\partial\Omega} = 0, \\ &y|_{t=0} = y_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \tag{2}$$

$$J(y,u) = \int\limits_{\Omega} q(x, y(T,x))dx + \int\limits_{Q_T} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{3}$$

де $f\colon R_+ \times R \to R,\ g\colon R \to R$ — неперервні функції, до того ж для деяких додатних сталих $C_i,\ i = 1,2,3$, та функцій $K_1 \in L^2(\Omega),\ K_2 \in L^1(\Omega)$ виконуються такі умови:

$$|f(t,y)| \le C_1(1+|y|) \quad \forall t \ge 0 \quad \forall y \in R, \tag{4}$$

$$|g(y)| \le C_2 \quad \forall y \in R, \tag{5}$$

* Виконано за фінансової підтримки Національного фонду досліджень України (проєкт Ф81/41743) та державної бюджетної теми № 21БФО38-01.

$$U \quad \text{замкнена та опукла}, \quad 0 \in U, \tag{6}$$

$q : \Omega \times R \to R$ — функція Каратеодорі,

$$|q(x,\xi)| \leq C_3|\xi| + K_1(x), \quad q(x,\xi) \geq K_2(x). \tag{7}$$

Ми доведемо, що за припущень (4) – (7) задача оптимального керування (1) – (3) має розв'язок $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$, де $y^\varepsilon$ — слабкий розв'язок рівняння (1) з керуванням $u = u^\varepsilon$. При цьому умови (4) – (7) не гарантують єдиності такого розв'язку.

Далі, припустимо що рівномірно по $y \in R$ існує границя

$$\bar{f}(y) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(s,y)ds. \tag{8}$$

Основним результатом статті є встановлення збіжності

$$J(y^\varepsilon, u^\varepsilon) \to J(\bar{y}, \bar{u}), \quad \varepsilon \to 0, \tag{9}$$

де $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — оптимальний процес у задачі (1) – (3) з усередненою функцією $\bar{f}$.

**Основні результати.** Для $u \in L^2(Q_T)$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ будемо розглядати розв'язок рівняння (1) у слабкому сенсі, тобто $y \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ такий, що

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(0,T):$$

$$-\int\limits_0^T (y,\varphi)\eta' + \int\limits_0^T (\nabla y, \nabla\varphi)\eta = \int\limits_0^T \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right), \varphi\right)\eta + \int\limits_0^T (g(y)u, \varphi)\eta. \tag{10}$$

Тут і далі через $\|\cdot\|$ і $(\cdot,\cdot)$ позначено норму і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

З умови (4) маємо включення $\dfrac{\partial y}{\partial t} \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, яке означає, що кожен розв'язок рівняння (1) є абсолютно неперервною функцією з $[0,T]$ в $L^2(\Omega)$, і (10) еквівалентна рівності

$$\frac{d}{dt}(y,\varphi) + (\nabla y, \nabla\varphi) = \left(f\left(\frac{t}{\varepsilon}, y\right), \varphi\right) + (g(y)u, \varphi) \quad \text{для майже всіх} \quad t \in (0,T). \tag{11}$$

Відомо [10, 11], що для будь-якого $y_0 \in L^2(\Omega)$ існує принаймні один слабкий розв'язок рівняння (1) з $y(0,x) = y_0(x)$. Крім того, справедливою є оцінка: для майже всіх $t \in (0,T)$

$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + \|\nabla y(t)\|^2 \leq C_4\left(1 + \|y(t)\|^2 + \|u(t)\|^2\right), \tag{12}$$

$$\|y(t)\| \leq C_5\left(1 + \|y_0\| + \|u\|_{Q_T}\right) \quad \forall t \in [0,T], \tag{13}$$

де ми позначили

$$\|u\|_{Q_T} := \int\limits_{Q_T} u^2(t,x)\,dt\,dx.$$

**Лема 1.** *За умов* (4) – (7) *задача* (1) – (3) *для кожного* $\varepsilon > 0$ *має принаймні один розв'язок* $\{y^\varepsilon, u^\varepsilon\}$.

***Доведення.*** Розглянемо мінімізуючу послідовність $\{u_n, y_n\}$. Відповідно до (7) послідовність $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$, а отже, по підпослідовності

$$u_n \to u \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_T).$$

Тоді з (12), (13) виводимо, що

$$\begin{gathered}\{y_n\} \quad \text{обмежена в} \quad L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)\cap L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),\\ \left\{\frac{\partial y_n}{\partial t}\right\} \quad \text{обмежена в} \quad L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right).\end{gathered} \tag{14}$$

Отже, з леми про компактність [11] маємо

$$y_n \to y \quad \text{в} \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \quad \text{та майже скрізь в} \quad Q_T. \tag{15}$$

Використовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, переходимо до границі в рівності (10), записаній для $y_n$, і отримуємо, що $y$ є розв'язком рівняння (1) з керуванням $u$. Після цього стандартні міркування [12], пов'язані зі слабкою напівнеперервністю знизу і коерцитивністю цільового функціонала $J$, дозволяють стверджувати, що $\{y, u\}$ є розв'язком задачі (1) – (3).

Лему доведено.

Тепер розглянемо усереднену задачу

$$\begin{aligned}&\frac{\partial y}{\partial t} = \Delta y + \bar{f}(y) + g(y)u,\\ &y|_{\partial\Omega} = 0,\\ &y|_{t=0} = y_0,\end{aligned} \tag{16}$$

$$u \in U \subseteq L^2(Q_T), \tag{17}$$

$$J(y,u) = \int\limits_\Omega q(x, y(T,x))dx + \int\limits_{Q_T} u^2(t,x)dtdx \to \inf, \tag{18}$$

де неперервну функцію $\bar{f}\colon R \to R$ визначено у (8).

Легко бачити, що $\bar{f}$ задовольняє (4), тому задача (16) – (18) має принаймні один розв'язок $\{\bar{y}, \bar{u}\}$.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* (4) – (8) *і, крім того,*

$$\text{для будь-якого } \ u \in U \ \text{ задача (16) має єдиний розв'язок}, \tag{19}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \geq 0\colon |y - z| < \delta \ \Rightarrow \ |f(t,y) - f(t,z)| < \epsilon. \tag{20}$$

*Тоді*

$$J\left(y^\varepsilon, u^\varepsilon\right) \to J\left(\bar{y}, \bar{u}\right) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{21}$$

***Доведення.*** Нехай $\varepsilon_n \to 0$, $\{y_n, u_n\} := \{y_n^\varepsilon, u_n^\varepsilon\}$ — оптимальний процес у задачі (1) – (3) для $\varepsilon = \varepsilon_n$. Завдяки (7) та оптимальності $\{y_n, u_u\}$ отримуємо

$$\int_{\Omega} K_2(x)dx + \int_{Q_T} u_n^2(t,x)dtdx \le J(z_n, 0) \le C_3 \int_{\Omega} |z_n(T,x)|^2 dx + \int_{\Omega} K_1(x)dx,$$

де $z_n$ — розв'язок рівняння (1) з $\varepsilon = \varepsilon_n,\ u \equiv 0.$

З оцінки (13), застосованої до $z_n$, виводимо, що $\{u_n\}$ обмежена в $L^2(Q_T)$. Отже, ми можемо повторити міркування з доведення леми 1 і зробити висновок про те, що для деякого $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ по підпослідовності

$$u_n \to \bar{u} \quad \text{слабко в} \quad L^2(Q_T),$$
$$y_n \to \bar{y} \quad \text{в} \quad L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \quad \text{і майже скрізь в} \quad Q_T. \tag{22}$$

Доведемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ задовольняє (16).

З теореми Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$g(y_n) \to g(\bar{y}) \quad \text{в} \quad L^2(Q_T). \tag{23}$$

З (14) одержуємо, що

$$y_n \to \bar{y} \quad \text{слабко в} \quad L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right). \tag{24}$$

Покажемо, що для будь-якого $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{Q_T} f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x)\right)\varphi(x)\,dt\,dx \to \int_{Q_T} \bar{f}(\bar{y}(t,x))\varphi(x)\,dt\,dx. \tag{25}$$

Спочатку зауважимо, що з (8), умови (4) та теореми Лебега про мажоровану збіжність для будь-яких $0 < a < b,\ \psi \in L^2(\Omega)$

$$\int_a^b \int_{\Omega} \left( f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \psi(x)\right) - \bar{f}(\psi(x))\right)\varphi(x)\,dx\,dt \to 0, \quad n \to \infty. \tag{26}$$

Далі, з (22) та теореми Єгорова маємо, що для кожного $\delta > 0$ існує таке $Q_1^{\delta} \subset Q_T$, що $\mu\left(Q_1^{\delta}\right) < \delta$ і

$$y_n \to \bar{y} \quad \text{рівномірно на} \quad Q_T \backslash Q_1^{\delta}, \quad n \to \infty. \tag{27}$$

Оскільки $\bar{y} \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, то існує послідовність кусково-сталих функцій

$$y^M(t,x) = \sum_{k=1}^{M} y_k^M(x)\chi_{A_k^M}(t),$$

де $\left\{y_k^M\right\} \subset L^2(\Omega),\ \left\{A_k^M = \left(a_k^M, b_k^M\right)\right\}$ — покриття $(0,T)$, така, що при $M \to \infty$

$$y^M \to \bar{y} \quad \text{в} \quad L^2(Q_T) \quad \text{і майже скрізь в} \quad Q_T.$$

Крім того, для кожного $\delta > 0$ існує таке $Q_2^{\delta} \subset Q_T$, що $\mu\left(Q_2^{\delta}\right) < \delta$ і

$$y^M \to \bar{y} \quad \text{рівномірно на} \quad Q_T \backslash Q_2^\delta, \quad M \to \infty,$$

де $\mu$ — міра Лебега в $R^2$.

Далі

$$\int\limits_{Q_T} \left( f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x)\right)\varphi(x) - \bar{f}(\bar{y}(t,x))\right)\varphi(x)\, dt\, dx =$$

$$= \int\limits_{Q_T} \left( f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t,x)\right)\right)\varphi(x) dt dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_T} \left( f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t,x)\right) - \bar{f}(\bar{y}(t,x))\right)\varphi(x) dt dx =: I_1 + I_2,$$

$$I_1 \le \int\limits_{Q_T} \backslash Q_1^\delta \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_n(t,x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t,x)\right)\right| |\varphi(x)|\, dt\, dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_1^\delta} C_1 \left(2 + |y_n(t,x)| + |\bar{y}(t,x)|\right) |\varphi(x)|\, dt\, dx =: I_1^{(1)} + I_1^{(2)}.$$

З (13) маємо

$$\|y_n\|_{Q_T} + \|\bar{y}\|_{Q_T} \le C_6. \tag{28}$$

Далі з (28) і нерівності Гельдера отримуємо

$$\forall \delta > 0 \quad \forall n \ge 1: \ I_1^{(2)} \le C_7 \cdot \delta^{\frac{1}{2}}.$$

З умови (20) виводимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\lambda > 0$ таке, що

$$\forall t \in [0,T] \quad \forall n \ge 1 \quad \forall \xi, z, |\xi - z| < \lambda: \ \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \xi\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, z\right)\right| < \varepsilon.$$

Отже, з (27) випливає, що

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n \ge N_1: I_1^{(1)} \le \delta.$$

Для кожної функції $y^M(t,x)$ з (26) маємо

$$\int\limits_{Q_T} \left( f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t,x)\right) - \bar{f}\left(y^M(t,x)\right)\right)\varphi(x)\, dt\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \int\limits_{A_k^M} \int\limits_{\Omega} \left( f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y_k^M(x)\right) - \bar{f}\left(y_k^M(x)\right)\right)\varphi(x) dx dt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким чином,

*ISSN 1027-3190. Укр. мат. журн., 2022, т. 74, № 7*

$$\forall M \geq 1 \quad \exists N(M) \quad \forall n \geq N(M):$$

$$\left| \int\limits_{Q_T} \left( f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t,x)\right) - \bar{f}(y^M(t,x)) \right) \varphi(x)\, dt\, dx \right| < \delta.$$

Далі, згідно з (20) існує таке $M_0$, що

$$\int\limits_{Q_T / Q_2^\delta} \left| f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, \bar{y}(t,x)\right) - f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, y^M(t,x)\right) \right| |\varphi(x)|\, dt\, dx < \delta,$$

$$\int\limits_{Q_T \setminus Q_2^\delta} \left| \bar{f}\left(\bar{y}(t,x)\right) - \bar{f}\left(y^M(t,x)\right) \right| |\varphi(x)|\, dt\, dx < \delta \quad \forall M \geq M_0 \quad \forall n \geq 1.$$

Таким чином, для $M \geq M_0$ і $n \geq N(M)$ отримуємо

$$I_2 \leq \int\limits_{Q_2^\delta} 2C_1(1 + |\bar{y}(t,x)|)|\varphi(x)| dx dt + 3\delta \leq C_8 \delta^{\frac{1}{2}} + 3\delta.$$

Об'єднуючи всі ці нерівності, отримуємо (25).

Нерівності (22)–(25) дають можливість перейти до границі в рівності (11), зінтегрованій від 0 до $T$, й одержати необхідний результат про те, що $\bar{y}$ є слабким розв'язком рівняння (16) з керуванням $\bar{u}$.

Доведемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — оптимальний процес у задачі (16)–(18).

Для кожного $u \in U$ і відповідного розв'язку $y_n$ рівняння (1) маємо

$$J\left(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\right) \leq J(y_n, u).$$

Міркуючи так само, як і при доведенні леми 1, отримуємо, що по підпослідовності

$$y_n \to y \quad \text{у сенсі (14), (15)}$$

і $y$ згідно з (20) є єдиним розв'язком рівняння (16) для відповідного керування $u$.

Після переходу до границі одержуємо

$$\begin{aligned} &\underline{\lim}\; J\left(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\right) \geq J(\bar{y}, \bar{u}), \\ &\overline{\lim}\, J(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(y, u). \end{aligned} \tag{29}$$

Отже, $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом у задачі (16)–(18).

Якщо ми покладемо $u = \bar{u}$ у попередніх міркуваннях, то з (29) отримаємо

$$J\left(\bar{y}, \bar{u}\right) \leq \underline{\lim}\; J\left(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\right) \leq \overline{\lim}\, J\left(y^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\right) \leq J\left(\bar{y}, \bar{u}\right).$$

З цих нерівностей випливає (9).

Теорему доведено.

## Література


1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1963).
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, *Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике*, Наук. думка, Киев (1969).
3. A. M. Samoilenko, A. N. Stanzhitskii, *On averaging differential equations on an infinite interval*, Differents. Uravneniya, **42**, № 4, 476 – 482 (2006).
4. J. A. Sanders, F. Verhulst, *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Springer, New York (1985).
5. T. V. Nosenko, O. M. Stanzhyts'kyi, *Averaging method in some problems of optimal control*, Nonlinear Oscillations, **11**, № 4, 539 – 547 (2008).
6. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential gathers*, Nonlinear Dyn. and Syst. Theory, **18**, № 2, 196 – 211 (2018).
7. О. А. Капустян, А. В. Сукретна, *Наближений усереднений синтез в задачі оптимального керування для параболічного рівняння*, Укр. мат. журн., **56**, № 10, 1653 – 1664 (2004).
8. O. V. Kapustyan, O. A. Kapustian, A. V. Sukretna, *Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem*, Ukr. Math. J., **63**, № 5, 759 – 767 (2011).
9. O. G. Nakonechnyi, O. A. Kapustian, A. O. Chikrii, *Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations*, Cybernet. and System Anal., **55**, № 5, 785 – 795 (2019).
10. O. V. Kapustyan, P. O. Kasyanov, J. Valero, *Structure of the global attractor for weak solutions of a reaction-diffusion equation*, Appl. Math. Inf. Sci., **9**, 2257 – 2264 (2015).
11. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors of equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc. (2002).
12. Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, Москва (1972).


Одержано 29.11.21