DOI: 10.37863/umzh.v74i8.7225

УДК 517.956.4

О. В. Дяченко, В. М. Лось[1] (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

УМОВИ РЕГУЛЯРНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

We investigate global and local regularity of generalized solutions to parabolic initial-boundary value problem for Petrovskii system of second order differential equations. Results are formulated in terms of the belonging of right-hand sides of the problem to some generalized Sobolev spaces. We also obtain new sufficient conditions under which the generalized solution should be classical.

Досліджено глобальну і локальну регулярність узагальнених розв'язків початково-крайової задачі для параболічної за Петровським системи диференціальних рівнянь другого порядку. Результати сформульовано в термінах належності правих частин задачі до деяких узагальнених просторів Соболєва. Отримано нові достатні умови класичності узагальненого розв'язку.

1. Вступ. Мета цієї статті — доповнити результати статті [1] про коректну розв'язність деяких параболічних початково-крайових задач в узагальнених функціональних просторах Соболєва теоремами про достатні умови регулярності розв'язків задач. Ми досліджуємо параболічні за Петровським системи диференціальних рівнянь другого порядку, задані у багатовимірному скінченному циліндрі Ω з гладкою бічною поверхнею. Регулярність розв'язків цих систем характеризуємо у термінах гільбертових анізотропних функціональних просторів $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$, де дійсне число $s \geq 2$, а функціональний параметр $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ повільно змінюється на нескінченності у сенсі Карамати. Параметр φ уточнює основну степеневу регулярність розв'язків, яка задається числовими параметрами s і $s/2$ за просторовими і часовою змінними відповідно.

Вказані простори є окремим випадком просторів, уведених Л. Хермандером [2, 3]. Якщо $\varphi(\cdot) \equiv 1$, то $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ — анізотропні простори Соболєва $H^{s,s/2}(\Omega)$, які разом із просторами Гельдера широко застосовуються у теорії параболічних задач [4 – 9]. Її центральний результат стверджує, що ці задачі коректно розв'язні (за Адамаром) на парах відповідних анізотропних просторів Соболєва і Гельдера, тобто породжують ізоморфізми на цих парах.

У даний час параболічні задачі активно досліджують у більш тонко градуйованих шкалах функціональних просторів, ніж класичні шкали Соболєва і Гельдера (див., наприклад, [10 – 16]). Використовують простори з мішаною $L_p - L_q$-нормою, простори Лізоркіна – Трібеля, різні вагові простори, узагальнені простори Соболєва $H^{s,s/(2b);\varphi}$, де $2b$ — параболічна вага. Для останніх теорію розв'язності скалярних параболічних задач побудовано в основному в працях [12, 13, 17] і викладено в монографії [18]. Випадок систем досліджено в [1, 19].

Основні результати цієї статті — теореми про достатні умови належності узагальнених розв'язків досліджуваних у [1] параболічних задач до просторів $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ й умови неперервності розв'язків та вказаних їхніх частинних похідних, зокрема умови класичності узагальнених розв'язків. Використання функціонального параметра φ дозволяє отримати нові тонкі і точні умови гладкості розв'язків у порівнянні з класичними результатами [4, 8, 9]. У скалярному випадку версії цих теорем встановлено в [12, 20, 21], а для еліптичних крайових задач — у

[1] Відповідальний за листування, e-mail: v_los@yahoo.com.

[22 – 25]. Окремий випадок параболічних крайових задач для систем з однорідними початковими даними Коші розглянуто в [19, 26].

2. Постановка задачі. Нехай довільно задано ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ й обмежену область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$. Позначимо через $\Omega := G \times (0,\tau)$ відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, а через $S := \Gamma \times (0,\tau)$ його бічну поверхню. Тоді $\overline{\Omega} := \overline{G} \times [0,\tau]$ і $\overline{S} := \Gamma \times [0,\tau]$ — замикання Ω і S відповідно. Будемо ототожнювати G з нижньою основою $G \times \{0\}$ циліндра Ω.

Розглянемо таку параболічну початково-крайову задачу у циліндрі Ω:

$$\partial_t u_j(x,t) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leq 2} a_{j,k}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u_k(x,t) = f_j(x,t) \qquad (1)$$

$$\text{для всіх} \quad (x,t)\in\Omega \quad \text{та} \quad j\in\{1,\ldots,N\},$$

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leq l_j} b_{j,k}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha} u_k(x,t) = g_j(x,t) \qquad (2)$$

$$\text{для всіх} \quad (x,t)\in S \quad \text{та} \quad j\in\{1,\ldots,N\},$$

$$u_j(x,t)\big|_{t=0} = h_j(x) \quad \text{для всіх} \quad x\in G \quad \text{та} \quad j\in\{1,\ldots,N\}. \qquad (3)$$

Тут довільним чином вибрано натуральне число $N \geq 2$ і числа $l_1,\ldots,l_N \in \{0,\,1\}$. Всі коефіцієнти диференціальних виразів у формулах (1), (2) є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно, тобто всі $a_{j,k}^{\alpha} \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right)$ і $b_{j,k}^{\alpha} \in C^{\infty}\left(\overline{S}\right)$. Використовуємо позначення $D_x^{\alpha} := D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}$, де $D_k := i\,\partial/\partial x_k$ і $\partial_t := \partial/\partial t$ для частинних похідних функцій, що залежать від $x = (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ і $t\in\mathbb{R}$, i — уявна одиниця, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультиіндекс і $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. У формулах (1), (2) та їхніх аналогах підсумовування проводиться за цілими невід'ємними індексами $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, які задовольняють умову, вказану під знаком суми.

Припускаємо, що початково-крайова задача (1) – (3) параболічна за Петровським у циліндрі Ω (див. означення в [4], розд. 1, § 1).

Встановимо достатні умови глобальної та локальної регулярності узагальнених розв'язків задачі (1) – (3) в термінах належності її правих частин узагальненим анізотропним просторам Соболєва. Крім того, отримаємо нові достатні умови класичності цих розв'язків.

Нагадаємо означення узагальненого анізотропного простору Соболєва на $\mathbb{R}^k$. Через $\mathcal{M}$ позначимо клас усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi\colon [1,\infty)\to(0,\infty)$ таких, що:

(i) φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1,c]$, де $1<c<\infty$;

(ii) φ повільно змінна за Й. Караматa на нескінченності, тобто

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\varphi(\lambda r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Нехай $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. За означенням комплексний лінійний простір $H^{s,s/2;\varphi}\left(\mathbb{R}^k\right)$, де $2\leq k\in\mathbb{Z}$, складається з усіх повільно зростаючих розподілів $w\in\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^k\right)$ таких, що їх (повне) перетворення Фур'є $\widetilde{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^k$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\|w\|_{H^{s,s/2;\varphi}\left(\mathbb{R}^k\right)} :=$$

$$:= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2+|\eta|\right)^s \varphi^2 \left(\left(1+|\xi|^2+|\eta|\right)^{1/2}\right) |\widetilde{w}(\xi,\eta)|^2 \, d\xi \, d\eta \right)^{1/2} < \infty, \qquad (4)$$

де $\xi \in \mathbb{R}^{k-1}$ і $\eta \in \mathbb{R}$. Цей простір гільбертовий і сепарабельний щодо норми (4). Він є окремим випадком просторів $\mathcal{B}_{p,\mu}$, введених Л. Хермандером [2] (п. 2.2), а саме, $H^{s,s/2;\varphi}\left(\mathbb{R}^k\right) = \mathcal{B}_{p,\mu}$ за умови, що $p = 2$ і

$$\mu(\xi,\eta) \equiv \left(1+|\xi|^2+|\eta|\right)^{s/2} \varphi\left((1+|\xi|^2+|\eta|)^{1/2}\right).$$

Гільбертовий анізотропний простір $H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ означується як простір звужень на Ω усіх розподілів з $H^{s,s/2;\varphi}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, а гільбертовий анізотропний простір $H^{s,s/2;\varphi}(S)$ на бічній поверхні циліндра означується за базовим простором $H^{s,s/2;\varphi}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ за допомогою спеціальних локальних карт на бічній поверхні циліндра (див. [27], п. 1). Означення та основні властивості просторів $H^{s,s/2;\varphi}(W)$, де $W \in \{\Omega, S\}$, наведено, наприклад, в [1] (п. 2). Ізотропні простори $H^{s;\varphi}(G)$ і $H^{s;\varphi}(\Gamma)$, задані на основі G циліндра та лінії Γ з'єднання основи і бічної поверхні відповідно, означено в [22] (пп. 2.1.1, 3.2.1), [24]. Якщо $\varphi(\cdot) = 1$, то ці простори є соболєвськими. В цьому випадку індекс φ у їхніх позначеннях вилучаємо.

Результати цієї роботи спираються на теорему про ізоморфізми [1], (теорема 4.1) для задачі (1)–(3). Сформулюємо для зручності цей результат.

Покладемо

$$A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t) := \delta_{j,k}\partial_t + \sum_{|\alpha|\leq 2} a^{\alpha}_{j,k}(x,t)\, D^{\alpha}_x \qquad (5)$$

і

$$B_{j,k}(x,t,D_x) := \sum_{|\alpha|\leq l_j} b^{\alpha}_{j,k}(x,t)\, D^{\alpha}_x \qquad (6)$$

для всіх $j,k \in \{1,\ldots,N\}$. Тут $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Скориставшись позначеннями (5) і (6), запишемо всі рівності в (1), (2) у такій еквівалентній формі:

$$\sum_{k=1}^{N} A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t)u_k(x,t) = f_j(x,t)$$

і

$$\sum_{k=1}^{N} B_{j,k}(x,t,D_x)u_k(x,t) = g_j(x,t).$$

Покладемо $u := (u_1,\ldots,u_N)$, $f := (f_1,\ldots,f_N)$, $g := (g_1,\ldots,g_N)$ і $h := (h_1,\ldots,h_N)$. Запишемо систему (1) і граничні умови (2) в матричній формі $Au = f$ і $Bu = g$. Тут

$$A := (A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))_{j,k=1}^N \quad \text{і} \quad B := (B_{j,k}(x,t,D_x))_{j,k=1}^N$$

— матричні диференціальні оператори. Пов'яжемо із задачею (1)–(3) лінійне відображення

$$u \mapsto \Lambda u := (Au, Bu, u|_{t=0}), \quad \text{де} \quad u \in \left(C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)\right)^N. \tag{7}$$

Твердження 1 ([1], теорема 4.1)**.** *Нехай довільно задано параметри: числовий $s \geq 2$ і функціональний $\varphi \in \mathcal{M}$. У випадку $s = 2$ додатково припустимо, що φ є зростаючою* (*в нестрогому сенсі*) *функцією. Тоді відображення* (7) *продовжується єдиним чином* (*за неперервністю*) *до ізоморфізму*

$$\Lambda\colon \left(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\right)^N \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{8}$$

Тут $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ — гільбертовий простір правих частин задачі (див. [1], п. 4). А саме, для $s \notin E$, де

$$E := \{2l + l_j + 3/2\colon j,l \in \mathbb{Z},\ 1 \leq j \leq N,\ l \geq 0\} \cap (2,\infty), \tag{9}$$

він утворений такими векторами (f,g,h) з простору

$$\mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi} := \left(H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\right)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^N H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S) \oplus \left(H^{s-1;\varphi}(G)\right)^N,$$

що задовольняють природні умови узгодження правих частин параболічної задачі (1)–(3). У випадку $s \in E$ гільбертовий простір $\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ означується за допомогою квадратичної інтерполяції з числовим параметром $1/2$:

$$\mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi} := \left[\mathcal{Q}^{s-\varepsilon-2,(s-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{Q}^{s+\varepsilon-2,(s+\varepsilon)/2-1;\varphi}\right]_{1/2}. \tag{10}$$

Тут $\varepsilon \in (0,1/2)$ — довільне число. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε.

3. Основні результати. Це достатні умови глобальної та локальної регулярності узагальненого розв'язку параболічної задачі (1)–(3) в узагальнених просторах Соболєва, а також достатня умова класичності цього розв'язку. Наведемо його означення.

Нехай усі компоненти правих частин f, g і h задачі є довільними розподілами на Ω, S і G відповідно. Вектор-функцію $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо

$$\Lambda u = (f,g,h), \tag{11}$$

де Λ — обмежений оператор (8) для $s = 2$ і $\varphi = 1$. З рівності (11) випливає, що

$$(f,g,h) \in \mathcal{Q}^{0,0}. \tag{12}$$

З ізоморфізму (8) випливає (див. також [7], теорема 5.7), що параболічна задача (1)–(3) має єдиний узагальнений розв'язок $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ для кожного вектора (12).

Теорема 1. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g,h) \in \mathcal{Q}^{s-2,s/2-1;\varphi}$$

для деяких $s \geq 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ (*у випадку* $s = 2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою* (*в нестрогому сенсі*) *функцією*). *Тоді* $u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\right)^N$.

Цей результат про достатню умову глобальної (тобто в усьому циліндрі Ω аж до його межі) регулярності розв'язку є безпосереднім наслідком твердження 1.

Тепер сформулюємо локальну версію цієї теореми. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\Omega_0 := U \cap \Omega \neq \varnothing$ і $U \cap \Gamma = \varnothing$. Покладемо $\Omega' := U \cap \partial\overline{\Omega}$, $S_0 := U \cap S$, $S' := U \cap \{(x,\tau) : x \in \Gamma\}$ і $G_0 := U \cap G$. Позначимо через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Omega')$ лінійний простір усіх розподілів u на Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$. Аналогічно, позначимо через $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_0, S')$ лінійний простір усіх розподілів v на S таких, що $\chi v \in H^{s,s/2;\varphi}(S)$ для будь-якої функції $\chi \in C^\infty\left(\overline{S}\right)$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset S_0 \cup S'$. Нарешті, $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_0)$ позначає лінійний простір усіх розподілів w на G таких, що $\chi w \in H^{s;\varphi}(G)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty\left(\overline{G}\right)$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset G_0$ (див., наприклад, [12], п. 4).

Теорема 2. *Нехай* $s \geq 2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ (*у випадку* $s = 2$ *додатково припускаємо, що* φ *є зростаючою* (*в нестрогому сенсі*) *функцією*). *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3), *праві частини якої задовольняють такі умови*:

$$f \in \left(H^{s-2,s/2-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0, \Omega'\right)\right)^N, \tag{13}$$

$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(S_0, S'\right), \tag{14}$$

$$h \in \left(H^{s-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_0)\right)^N. \tag{15}$$

Тоді

$$u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0, \Omega'\right)\right)^N.$$

Якщо $\Omega' = \varnothing$, то теорема 2 стверджує, що регулярність узагальненого розв'язку підвищується в околах внутрішніх точок замкненого циліндра $\overline{\Omega}$. Якщо $G_0 = \varnothing$, то ця теорема стверджує, що регулярність розв'язку $u(x,t)$ підвищується при $t > 0$. В цих випадках вона є наслідком теореми 2 [19].

Зазначимо, що припущення $U \cap \Gamma = \varnothing$ істотне, оскільки без нього висновок теореми 2 є взагалі хибним. Для його істинності у цьому випадку, потрібно накласти на праві частини задачі (1)–(3) на множині $U \cap \Gamma$ деякі додаткові умови узгодження.

Узагальнені простори Соболєва дозволяють отримати більш тонкі, ніж у випадку класичних просторів Соболєва, достатні умови неперервності узагальненого розв'язку u та його узагальнених похідних заданого порядку на множині $\Omega_0 \cup \Omega'$.

Подібно до [12, с. 3617] (див. також [18], зауваження 2.1) узагальнену функцію $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ називаємо неперервною на множині $\Omega_0 \cup \Omega'$, якщо існує неперервна функція v_0 на $\Omega_0 \cup \Omega'$

така, що

$$v(\omega) = \int\limits_{\Omega_0} v_0(x,t)\,\omega(x,t)\,dxdt \tag{16}$$

для довільної функції $\omega \in C^\infty(\Omega)$, носій якої задовольняє умову $\operatorname{supp}\omega \subset \Omega_0$. Тут $v(\omega)$ — значення функціонала v на функції ω.

Теорема 3. *Нехай задано довільне ціле число* $p \geq 0$. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3), *праві частини якої задовольняють умови* (13)–(15) *для* $s := p + 1 + n/2$ *і деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathcal{M}$, *що задовольняє умову*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\,\varphi^2(r)} < \infty, \tag{17}$$

до того ж у випадку $s = 2$ *додатково припускаємо, що функція* φ *зростає* (*в нестрогому сенсі*). *Тоді розв'язок* $u(x,t) = (u_1(x,t),\ldots,u_N(x,t))$ *і кожна його узагальнена частинна похідна*

$$D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t) = \left(D_x^\alpha \partial_t^\beta u_1(x,t),\ldots,D_x^\alpha \partial_t^\beta u_N(x,t)\right),$$

де $|\alpha| + 2\beta \leq p$, *неперервні на множині* $\Omega_0 \cup \Omega'$.

Для цієї теореми правильні версії зауважень 1 і 2 з [19]. А саме, умова (17) є точною. Крім того, якщо переформулювати теорему 3 на випадок класичних просторів Соболєва $\varphi = 1$, то умова (17) не виконується і доведеться замінити умови (13)–(15) для $s := p+1+n/2$ на більш сильні. Потрібно стверджувати, що ці умови виконуються для деякого $s > p + 1 + n/2$.

Теорема 3 дозволяє отримати нові й тонкі достатні умови класичності узагальненого розв'язку задачі (1)–(3). Сформулюємо означення класичного розв'язку цієї задачі.

Нехай $l_0 := \max\{l_1,\ldots,l_N\}$. Покладемо

$$S_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,S) < \varepsilon\}, \quad G_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,G) < \varepsilon\},$$

де число $\varepsilon > 0$.

Узагальнений розв'язок $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ задачі (1)–(3) називаємо класичним, якщо узагальнені частинні похідні вектор-функції $u = u(x,t)$ задовольняють такі умови:

(a) $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$ неперервна на Ω, якщо $0 \leq |\alpha| + 2\beta \leq 2$;

(b) $D_x^\alpha u$ неперервна на $S_\varepsilon \cup S$ для деякого числа $\varepsilon > 0$, якщо $0 \leq |\alpha| \leq l_0$;

(c) u неперервна на $G_\varepsilon \cup G$ для деякого числа $\varepsilon > 0$.

Якщо розв'язок $u = u(x,t)$ задачі (1)–(3) класичний, то її ліві частини є неперервними функціями на відповідних множинах.

Теорема 4. *Припустимо, що вектор-функція* $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)–(3), *праві частини якої задовольняють такі умови*:

$$f \in \left(H_{\mathrm{loc}}^{1+n/2,\,1/2+n/4;\varphi}(\Omega,\varnothing)\right)^N \cap \left(H_{\mathrm{loc}}^{l_0-1+n/2,\,l_0/2-1/2+n/4;\varphi}(S_\varepsilon,S)\right)^N \cap$$

$$\cap \left(H_{\mathrm{loc}}^{-1+n/2,\,-1/2+n/4;\varphi}(G_\varepsilon,G)\right)^N, \tag{18}$$

$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H_{\mathrm{loc}}^{l_0+n/2-l_j+1/2,\, l_0/2+n/4-l_j/2+1/4;\varphi}(S, \varnothing), \tag{19}$$

$$h \in \left(H_{\mathrm{loc}}^{n/2;\varphi}(G)\right)^N, \tag{20}$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, *який задовольняє умови теореми* 3. *Тоді розв'язок* u *є класичним.*

4. Доведення. У скалярному випадку $N = 1$ теореми 2 – 4 встановлено в [12] (розд. 6) (див. також монографію [18], розд. 3.4, 3.5). Ми узагальнюємо розроблені там методи доведення на випадок систем.

***Доведення теореми* 2.** Спочатку доведемо, що з умов (13) – (15) випливає істинність імплікації

$$u \in \left(H_{\mathrm{loc}}^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}\left(\Omega_0, \Omega'\right)\right)^N \Longrightarrow u \in \left(H_{\mathrm{loc}}^{s-\lambda+1,(s-\lambda+1)/2;\varphi}\left(\Omega_0, \Omega'\right)\right)^N \tag{21}$$

для всіх цілих $\lambda \geq 1$, що задовольняють умову $s - \lambda + 1 > 2$.

Нехай $\chi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ — така довільна функція, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$. Для χ існує функція $\eta \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ така, що $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega_0 \cup \Omega'$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Переставивши диференціальні оператори A і B з оператором множення на функцію χ, отримаємо

$$\Lambda(\chi u) = \Lambda(\chi\eta u) = \chi\Lambda(\eta u) + \Lambda'(\eta u) = \chi\Lambda u + \Lambda'(\eta u) = \chi(f, g, h) + \Lambda'(\eta u). \tag{22}$$

Тут $\Lambda' := (A', B', 0)$ — оператор, елементи A' і B' якого мають вигляд

$$A' := \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} a_{j,k,1}^{\alpha}(x,t)\, D_x^{\alpha}\right)_{j,k=1}^{N} \quad \text{і} \quad B' := \left(b_{j,k,1}(x,t)\right)_{j,k=1}^{N},$$

де $a_{j,k,1}^{\alpha} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ і $b_{j,k,1} \in C^\infty\left(\overline{S}\right)$. Іншими словами, A' і B' — деякі матричні диференціальні оператори, порядки кожної компоненти яких принаймні на одиницю менші, ніж порядки відповідних компонент операторів A і B.

Для кожного $\sigma \geq 1$ оператор Λ' неперервно діє на парі просторів

$$\Lambda'\colon \left(H^{\sigma,\sigma/2;\varphi}(\Omega)\right)^N \to \mathcal{H}^{\sigma-1,\,\sigma/2-1/2;\,\varphi}. \tag{23}$$

У випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ цей факт відомий. Він випливає з властивостей операторів диференціювання та операторів сліду у просторах Соболєва. Звідси неперервність оператора (23) у загальному випадку отримується методом квадратичної інтерполяції. (Її викладено, наприклад, у монографії [22], п. 1.1.) Для $\sigma > 1$ і довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ це випливає з інтерполяційних формул [27] (теорема 2), [27] (лема 2) (з Ω замість Π) та [22] (теореми 1.5, 1.14(i), 3.2, а для $\sigma = 1$ і зростаючої функції $\varphi \in \mathcal{M}$ — з [28] (леми 2 і 3), [29] (теорема 4.1) та [22] (теорема 1.5).

З умов (13) – (15) випливає, що

$$\chi\,(f, g, h) \in \mathcal{H}^{s-2,s/2-1;\varphi}. \tag{24}$$

Врахувавши неперервність оператора Λ' на парі просторів (23), де $\sigma := s - \lambda$, маємо

$$u \in \left(H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0,\Omega'\right)\right)^N \Longrightarrow \Lambda'(\eta u) \in \mathcal{H}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi}.$$

З цієї імплікації, включення (24) і формули (22) випливає, що

$$u \in \left(H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi}. \qquad (25)$$

Далі покажемо, що з умов $U \cap \Gamma = \varnothing$ і $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$ випливає включення

$$\Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi} \qquad (26)$$

для будь-якого $\sigma \geq 2$. Цей факт дасть можливість довести (21), скориставшись теоремою 1.

Оскільки $U \cap \Gamma = \varnothing$, то $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi,\Gamma) > 0$. Це означає, що $\Lambda(\chi u) = 0$ в деякому околі множини Γ. Тому вектор-функція $\Lambda(\chi u)$ задовольняє умови узгодження правих частин параболічної задачі (1)–(3) (див., наприклад, [1], п. 4). Отже, згідно з означенням простору $\mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$ у випадку $\sigma \notin E$ виконується включення $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$.

Розглянемо випадок $\sigma \in E$. Нехай $\chi_1 \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ така, що $\chi_1 = 0$ в околі множини Γ і $\chi_1 = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. З попередніх міркувань випливає, що відображення $M_{\chi_1} : F \mapsto \chi_1 F$ є обмеженим оператором на просторах

$$M_{\chi_1} : \mathcal{H}^{\sigma\pm\varepsilon-2,(\sigma\pm\varepsilon)/2-1;\varphi} \to \mathcal{Q}^{\sigma\pm\varepsilon-2,(\sigma\pm\varepsilon)/2-1;\varphi}, \qquad (27)$$

якщо $0 < \varepsilon < 1/2$, оскільки $\sigma \pm \varepsilon \notin E$. Інтерполюючи з числовим параметром $1/2$ оператори (27), маємо обмежений оператор

$$M_{\chi_1} : \left[\mathcal{H}^{\sigma-\varepsilon-2,(\sigma-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{H}^{\sigma+\varepsilon-2,(\sigma+\varepsilon)/2-1;\varphi}\right]_{1/2} \to$$
$$\to \left[\mathcal{Q}^{\sigma-\varepsilon-2,(\sigma-\varepsilon)/2-1;\varphi}, \mathcal{Q}^{\sigma+\varepsilon-2m,(\sigma+\varepsilon)/2-1;\varphi}\right]_{1/2}.$$

Згідно з інтерполяційними формулами для просторів $\mathcal{H}^{\sigma\pm\varepsilon-2,(\sigma\pm\varepsilon)/2-1;\varphi}$ (див. [12], лема 6.4) і (10) цей оператор діє на парі просторів

$$M_{\chi_1} : \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi} \to \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}. \qquad (28)$$

Оскільки χ_1 така, що $\chi_1 = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$, то $\chi_1\Lambda(\chi u) = \Lambda(\chi u)$. Нагадаємо, що $\Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}$. Тоді на підставі (28) виконується включення

$$\Lambda(\chi u) = \chi_1\Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{\sigma-2,\sigma/2-1;\varphi}.$$

Випадок $\sigma \in E$ розглянуто.

З формул (25) і (26), де $\sigma = s - \lambda + 1$, випливає за теоремою 1, що

$$u \in \left(H^{s-\lambda,(s-\lambda)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{s-\lambda-1,(s-\lambda-1)/2;\varphi} \Longrightarrow \chi u \in \left(H^{s-\lambda+1,(s-\lambda+1)/2;\varphi}(\Omega)\right)^N.$$

Оскільки $\chi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$ є довільною функцією, підпорядкованою умові $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$, то останнє включення означає, що

$$u \in \left(H^{s-\lambda+1,(s-\lambda+1)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N .$$

Оскільки за умовою теореми $\chi u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$ і, крім того, $s-\lambda+1>2$, то можна застосувати теорему 1. Імплікацію (21) доведено.

За її допомогою доведемо потрібне включення $u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N$. Нагадаємо, що $s \geq 2$. Нехай спочатку $s \notin \mathbb{Z}$. Тоді існує таке ціле число λ_0, що $s-\lambda_0 < 2 < s-\lambda_0+1$. За умовою теореми $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$. Використовуючи (21) послідовно для значень $\lambda := \lambda_0$, $\lambda := \lambda_0 - 1, \ldots, \lambda := 1$, робимо висновок, що

$$u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N \subset \left(H^{s-\lambda_0,(s-\lambda_0)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u \in \left(H^{s-\lambda_0+1,(s-\lambda_0+1)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0,\Omega'\right)\right)^N \Longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \Longrightarrow u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0,\Omega'\right)\right)^N .$$

Отже, потрібне включення доведено у розглянутому випадку.

Перейдемо до випадку, коли $s \in \mathbb{Z}$ і $s > 2$. Використаємо щойно отриманий результат. Нехай $0 < \varepsilon \ll 1$. Тоді $s-\varepsilon \notin \mathbb{Z}$ і $s-\varepsilon > 2$. Згідно з цим результатом

$$u \in \left(H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N .$$

Застосовуючи імплікацію (21), де $\lambda = 1$, робимо висновок, що

$$u \in \left(H^{s-\varepsilon,(s-\varepsilon)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N \subset \left(H^{s-1,(s-1)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0,\Omega'\right)\right)^N \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0,\Omega'\right)\right)^N .$$

Випадок $s = 2$ розглянемо окремо, оскільки в ньому є таке додаткове припущення: функція $\varphi \in \mathcal{M}$ зростає. З умов (13)–(15) випливає включення

$$\chi\,(f,g,h) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi} \tag{29}$$

для довільної функції $\chi \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Omega'$. З неперервності оператора (23), де $\sigma = 1$, випливає імплікація

$$u \in \left(H^{1,1/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\right)^N \Longrightarrow \Lambda'(\eta u) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi},$$

де функція η така, як і раніше у доведенні. На підставі умови $u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N$, формули (22), включення (29) і цієї імплікації робимо висновок, що

$$u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N \subset \left(H^{1,1/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}\left(\Omega_0,\Omega'\right)\right)^N \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi}. \tag{30}$$

З формул (30) і (26), де $\sigma = 2$, і теореми 1 випливає, що

$$u \in \left(H^{2,1}(\Omega)\right)^N \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{H}^{0,0;\varphi} \Longrightarrow \Lambda(\chi u) \in \mathcal{Q}^{0,0;\varphi} \Longrightarrow \chi u \in \left(H^{2,1;\varphi}(\Omega)\right)^N .$$

Теорему 2 доведено.

***Доведення теореми* 3.** Нагадаємо, що $n \geq 2$, тому $p + 1 + n/2 \geq 2$. Згідно з теоремою 2 виконується включення $u \in \left(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Omega')\right)^N$, де $s = p + 1 + n/2$ і φ задовольняє (17). У роботі [12] (доведення теореми 4.3) (див. також [18], доведення теореми 2.6) встановлено такий результат: якщо узагальнена функція v належить простору $H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Omega')$, де $s = p + 1 + n/2$, а φ задовольняє (17), то вона разом з усіма її узагальненими частинними похідними $D^{\alpha}_x \partial^{\beta}_t v(x,t)$, де $|\alpha| + 2\beta \leq p$, є неперервною на множині $\Omega_0 \cup \Omega'_0$. Звідси і випливає висновок теореми 3.

***Доведення теореми* 4.** Потрібно показати, що u задовольняє умови (a) – (c) означення класичного розв'язку. З умови (18), а саме, із включення

$$f \in \left(H^{1+n/2,\, 1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing)\right)^N,$$

випливає на підставі теореми 3 у випадку, коли $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega' = S_0 = S' = G_0 = \varnothing$ і $p = 2$, що u задовольняє умову (a).

Включення

$$f \in \left(H^{l_0-1+n/2,\, l_0/2-1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_\varepsilon, S)\right)^N$$

і умова (19) обумовлюють виконання умови (b) для u з огляду на теорему 3 у випадку, коли $\Omega_0 = S_\varepsilon$, $\Omega' = S_0 = S$, $S' = G_0 = \varnothing$ і $p = l_0$.

Нарешті, u задовольняє умову (c) на підставі включення

$$f \in \left(H^{-1+n/2,\, -1/2+n/4;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_\varepsilon, G)\right)^N$$

і умови (20) згідно з теоремою 3 у випадку, коли $\Omega_0 = G_\varepsilon$, $\Omega' = G_0 = G$, $S_0 = S' = \varnothing$ і $p = 0$.

Теорему 4 доведено.

Література

1. O. Diachenko, V. Los, *Some problems for Petrovskii parabolic systems in generalized Sobolev spaces*, J. Elliptic Parabol. Equat., **8**, 313 – 329 (2022).
2. L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, Berlin (1963).
3. L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators, vol.2, Differential operators with constant coefficients*, Springer, Berlin (1983).
4. В. А. Солонников, *О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида*, Труды Мат. ин-та АН СССР, **83**, 3 – 163 (1965).
5. J.-L. Lions, E. Magenes, *Non-homogeneous boundary-value problems and applications*, vol. II, Springer, Berlin (1972).
6. С. Д. Ивасишен, *Матрицы Грина параболических граничных задач*, Вища шк., Киев (1990).
7. S. D. Eidel'man, N. V. Zhitarashu, *Parabolic boundary value problems*, Birkhäuser, Basel (1998).
8. В. А. Ильин, *О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений*, Успехи мат. наук, **15**, № 2, 97 – 154 (1960).
9. А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, *Линейные уравнения второго порядка параболического типа*, Успехи мат. наук, **17**, № 3, 3 – 146 (1962).
10. R. Denk, M. Hieber, J. Prüess, *Optimal $L_p - L_q$-estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data*, Math. Z., **257**, № 1, 193 – 224 (2007).
11. N. Lindemulder, *Maximal regularity with weights for parabolic problems with inhomogeneous boundary conditions*, J. Evol. Equat., **20**, № 1, 59 – 108 (2020).

12. V. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Parabolic problems in generalized Sobolev spaces*, Commun. Pure and Appl. Anal., **20**, № 10, 3605 – 3636 (2021).
13. V. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications*, Commun. Pure and Appl. Anal., **16**, № 1, 69 – 97 (2017).
14. H. Dong, D. Kim, *Elliptic and parabolic equations with measurable coefficients in weighted Sobolev spaces*, Adv. Math., **274**, 681 – 735 (2015).
15. F. Hummel, *Boundary-value problems of elliptic and parabolic type with boundary data of negative regularity*, J. Evol. Equat., **21**, № 2, 1945 – 2007 (2021).
16. J. LeCrone, J. Prüss, M. Wilke, *On quasilinear parabolic evolution equations in weighted L_p-spaces II*, J. Evol. Equat., **14**, № 3, 509 – 533 (2014).
17. V. Los, A. Murach, *Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary-value problems in Hörmander spaces*, Open Math., **15**, 57 – 76 (2017).
18. В. М. Лось, В. А. Михайлець, О. О. Мурач, *Параболічні граничні задачі та узагальнені простори Соболєва*, Наук. думка, Київ (2022), arXiv:2109.03566.
19. V. M. Los, *Systems parabolic in Petrovskii's sense in Hörmander spaces*, Ukr. Math. J., **69**, № 3, 426 – 443 (2017).
20. V. M. Los, *Classical solutions of parabolic initial-boundary-value problems and Hörmander spaces*, Ukr. Math. J., **68**, № 9, 1412 – 1423 (2017).
21. V. M. Los, *Sufficient conditions for the solutions of general parabolic initial-boundary-value problems to be classical*, Ukr. Math. J., **68**, № 11, 1756 – 1766 (2017).
22. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Hoŕmander spaces, interpolation, and elliptic problems*, De Gruyter, Berlin (2014).
23. A. Anop, R. Denk, A. Murach, *Elliptic problems with rough boundary data in generalized Sobolev spaces*, Commun. Pure and Appl. Anal., **20**, № 2, 697 – 735 (2021).
24. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems*, Banach J. Math. Anal., **6**, № 2, 211 – 281 (2012).
25. A. Anop, I. Chepurukhina, A. Murach, *Elliptic problems with additional unknowns in boundary conditions and generalized Sobolev spaces*, Axioms, **10**, № 4, Article 292 (2021).
26. V. M. Los, *A condition for generalized solutions of a parabolic problem for a Petrovskii system to be classical*, Methods Funct. Anal. and Top., **26**, № 2, 111 – 118 (2020).
27. V. M. Los, *Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder*, J. Math. Sci. (N.Y.), **217**, № 4, 456 – 467 (2016).
28. V. M. Los, *Theorems on isomorphisms for some parabolic initial-boundary-value problems in Hörmander spaces: limiting case*, Ukr. Math. J., **68**, № 6, 894 – 909 (2016).
29. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces*, Results Math., **67**, № 1, 135 – 152 (2015).

Отримано 29.05.22