DOI: 10.37863/umzh.v74i9.7096

УДК 517.5

І. Б. Біланик[1] (Терноп. нац. пед. ун-т ім. В. Гнатюка),
Д. І. Боднар (Західноукр. нац. ун-т, Тернопіль)

ДВОВИМІРНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ТРОНА – ДЖОУНСА ПРО ПАРАБОЛІЧНІ МНОЖИНИ ЗБІЖНОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

For branched continued fractions of a special form (branched continued fractions with independent variables with fixed values of the variables), the notion of $\mathcal{C}$-figure convergence was introduced and used to establish a two-dimensional generalization of the Thron – Jones theorem on the parabolic domains of convergence of continued fractions. A new method for the investigation of the domains of parabolic convergence of branched continued fractions of a special form is proposed. This method does not use the Stielties – Vitali theorem on convergence of the sequences of holomorphic functions. Hence, it enables us to extend the domain of parabolic convergence to a form similar to that established for the one-dimensional case. In proving this theorem, we essentially use a property of stability of continued fractions under perturbations established in the present work.

Для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду (гіллясті ланцюгові дроби з нерівнозначними змінними при фіксованих значеннях змінних) введено поняття $\mathcal{C}$-фігурної збіжності і використано його для встановлення двовимірного узагальнення теореми Трона – Джоунса про параболічні множини збіжності неперервних дробів. Розроблено нову методику дослідження параболічних множин збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Вона не використовує теорему Стілтьєса – Віталі про збіжність послідовності голоморфних функцій, тому дозволяє розширити параболічну множину збіжності до аналогічного, як і в одновимірному випадку, вигляду. При обґрунтуванні цієї теореми суттєво використано доведену в роботі деяку властивість стійкості до збурень неперервних дробів.

1. Вступ. Велику частину досліджень в аналітичній теорії неперервних дробів присвячено питанню їхньої збіжності. Багато таких ознак формулюються як теореми про множини збіжності (якщо елементи дробу належать певній множині, то дріб збігається). В якості таких множин використовують круги, півплощини, кутові області та інші, а також їхні підмножини. Зокрема, велику увагу, починаючи з робіт [19, 20], приділено параболічним множинам збіжності [16 – 18]. Дану статтю присвячено двовимірному узагальненню наступної теореми Трона – Джоунса [18, с. 1046] (теорема 4.3) про параболічні множини збіжності неперервних дробів

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\ddots}}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\ldots=\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}.$$

Теорема 1 (В. Б. Джоунс, В. Й. Трон). *Неперервний дріб*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n} \tag{1}$$

[1] Відповідальна за листування, e-mail: i.bilanyk@ukr.net.

збігається до скінченного значення, якщо елементи $a_n,\ b_n$ *задовольняють умови*

$$|a_n| - \mathrm{Re}\,(a_n e^{-i(\psi_n+\psi_{n-1})}) \le 2p_{n-1}\big(\mathrm{Re}\,(b_n e^{-i\psi_n}) - p_n\big), \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

де $p_n \ge 0$ *і* ψ_n *— дійсні числа, а послідовність*

$$\left\{\frac{a_n}{p_n p_{n-1}}\right\}$$

обмежена. Всі його підхідні дроби скінченні і лежать у півплощині

$$\mathcal{H} = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\left(z e^{i(\psi_1 - \arg a_1)}\right) \ge 0\Big\},$$

якщо $\mathrm{Re}\,(b_1 e^{i\psi_1}) = p_1$, *або в крузі*

$$\mathcal{K} = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \left|z - \frac{a_1 e^{-i\psi_1}}{2(\mathrm{Re}\,(b_1 e^{-i\psi_1}) - p_1)}\right| \le \frac{|a_1|}{2(\mathrm{Re}\,(b_1 e^{-i\psi_1}) - p_1)}\right\},$$

якщо $\mathrm{Re}\,(b_1 e^{i\psi_1}) > p_1$.

Багатовимірні аналоги параболічних теорем для гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД), двовимірних неперервних дробів, ГЛД спеціального вигляду розглядали, зокрема, у роботах [1 – 3, 5, 7, 9, 11, 12]. При доведенні цих результатів було використано теореми Стілтьєса – Віталі про збіжність послідовності аналітичних функцій. Ця методика приводить до звуження самої параболічної області, з якої беруться частинні чисельники досліджуваного дробу. Метою даної роботи є використання іншої методики доведення параболічної теореми, яка допоможе вирішити цю проблему (звуження параболічної області збіжності за рахунок методу доведення).

Для побудови дробово-раціональних наближень функцій багатьох змінних використовують підхідні дроби різних типів функціональних ГЛД з нерівнозначними змінними [4, 6 – 8, 13 – 15]. При фіксованих значеннях змінних отримані дроби з числовими елементами називають ГЛД спеціального вигляду.

Об'єктом дослідження є ГЛД спеціального вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}} = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)} + \sum\limits_{i_2=1}^{i_1} \cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)} + \sum\limits_{i_3=1}^{i_2} \cfrac{a_{i(3)}}{b_{i(3)} + \ddots}}}\,, \tag{2}$$

де $b_0,\ a_{i(k)},\ b_{i(k)} \in \mathbb{C},\ i(k) \in \mathcal{I}$,

$$\mathcal{I} = \{i(k) = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \colon 1 \le i_k \le i_{k-1} \le \ldots \le i_0;\ k \ge 1;\ i_0 = N\}$$

— множина мультиіндексів, N — фіксоване натуральне число, розмірність ГЛД.

ГЛД (2) збігається, якщо існує скінченна границя послідовності його підхідних дробів $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, де

$$f_0 = b_0, \quad f_n = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \quad n \geq 1.$$

Крім звичайної збіжності для ГЛД розглядається так звана фігурна збіжність, при якій певним чином вибираються підхідні дроби, зокрема $\mathcal{A}$- та $\mathcal{B}$-фігурні збіжності [10]. При $\mathcal{A}$-фігурній збіжності кожен наступний підхідний дріб утворюється додаванням наступної ланки у природному записі ГЛД; n-й $\mathcal{B}$-фігурний підхідний дріб — це частина ГЛД, яка містить всі елементи, сума індексів у записі мультиіндексів яких менша або дорівнює n.

Урахування специфіки структури ГЛД спеціального вигляду приводить до $\mathcal{C}$-фігурних підхідних дробів, які неможливо означити для ГЛД загального вигляду. Новий вид збіжності ($\mathcal{C}$-фігурну збіжність) будемо використовувати при доведенні аналога теореми Трона – Джоунса.

2. $\mathcal{C}$-фігурна збіжність. Для двовимірного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду означимо $\mathcal{C}$-фігурні підхідні дроби і відповідно $\mathcal{C}$-фігурну збіжність. Нехай усі неперервні дроби, що входять у структуру двовимірного ГЛД спеціального вигляду (2) ($N = 2$), збігаються відповідно до значень $b_0^{(1)}$ і $b_{2[r]}^{(1)}$, $r \geq 1$, де

$$b_0^{(1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{1[k]}}{b_{1[k]}}, \quad b_{2[r]}^{(1)} = b_{2[r]} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2[r],1[k]}}{b_{2[r],1[k]}}, \quad r \geq 1,$$

$$2[r] = (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{r}), \quad 1[k] = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}).$$

n-м $\mathcal{C}$-фігурним підхідним дробом двовимірного ГЛД спеціального вигляду називатимемо неперервний дріб

$$\widetilde{f}_n = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{r=1}^{n} \frac{a_{2[r]}}{b_{2[r]}^{(1)}}, \quad n \geq 1.$$

Цей ГЛД називається $\mathcal{C}$-фігурно збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності $\{\widetilde{f}_n\}$.

Для ГЛД спеціального вигляду довільної розмірності ($N \geq 3$) можна ввести $\mathcal{C}_1$- і $\mathcal{C}_2$-фігурні підхідні дроби.

Нехай усі неперервні дроби, що входять у структуру N-вимірного ГЛД спеціального вигляду (2), збігаються, тобто мають сенс величини $b_0^{(1)}$ і $b_{i(s)}^{(1)}$, $i(s) \in \mathcal{I}^{(2)}$, де

$$b_0^{(1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{1[k]}}{b_{1[k]}}, \quad b_{i(s)}^{(1)} = b_{i(s)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i(s),1[k]}}{b_{i(s),1[k]}},$$

$$\mathcal{I}^{(2)} = \{i(n) = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \colon 2 \leq i_n \leq i_{n-1} \leq \ldots \leq i_0;\ n \geq 1;\ i_0 = N\}, \quad 1[k] = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k}).$$

Тоді скінченний ГЛД

$$\widetilde{f}_n = b_0^{(1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=2}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}^{(1)}}, \quad n \geq 1,$$

називатимемо $\mathcal{C}_1$-фігурним підхідним дробом ГЛД спеціального вигляду (2).

Нехай тепер усі $(N-1)$-вимірні ГЛД спеціального вигляду, що входять у структуру N-вимірного ГЛД спеціального вигляду (2), збігаються, тобто мають сенс величини $b_0^{(N-1)}$ і $b_{N[s]}^{(N-1)}$, $s=1,2,\ldots$, де

$$b_0^{(N-1)} = b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{i(l)}}{b_{i(l)}}, \quad b_{N[s]}^{(N-1)} = b_{N[s]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{\infty} \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}} \frac{a_{N[s],i(l)}}{b_{N[s],i(l)}},$$
$$i_0 = N-1, \quad s=1,2,\ldots,n.$$

Тоді скінченний неперервний дріб

$$\widetilde{\widetilde{f}}_n = b_0^{(N-1)} + \mathop{\mathrm{D}}_{s=1}^{n} \frac{a_{N[s]}}{b_{N[s]}^{(N-1)}}, \quad n \ge 1,$$

називатимемо $\mathcal{C}_2$-фігурним підхідним дробом ГЛД спеціального вигляду (2).

Очевидно, що для двовимірного ГЛД спеціального вигляду $\mathcal{C}_1$- та $\mathcal{C}_2$-фігурні підхідні дроби збігаються між собою.

Означення фігурної збіжності, з урахуванням конкретного типу фігурних підхідних дробів, вводиться, як і збіжності ГЛД.

3. Про одну властивіть стійкості неперервних дробів. Спочатку обґрунтуємо допоміжне твердження, яке використовується при доведенні теореми, що стосується дослідження стійкості неперервних дробів з елементами із параболічних областей.

Лема 1. *Нехай*

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| - \mathrm{Re}\left(ze^{-i(\beta_1+\beta_2)}\right) \le 2s_1(\cos\beta_2 - s_2) \right\}$$

— параболічна множина, де $\beta_1,\ \beta_2$ — дійсні числа, $s_1,\ s_2$ — додатні числа, такі що

$$\cos\beta_k \ge s_k, \quad k=1,2, \tag{3}$$

і нехай

$$V' = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\left(ze^{-i\beta_1}\right) > -s_1 \right\},$$
$$V'' = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\left(ze^{-i\beta_2}\right) \ge -\cos\beta_2 + s_2 \right\}$$

— півплощини. Тоді справджуються включення

$$P \subset V', \quad P \subset V''.$$

Доведення. Доведемо включення $P \subset V'$. Нехай $H' = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\left(ze^{-i\beta_1}\right) \ge 0 \right\}$. Очевидно, що $P = (P \cap H') \cup (P \setminus H')$. Для того щоб довести, що $P \subset V'$, достатньо показати, що виконуються включення $P \cap H' \subset V'$ і $P \setminus H' \subset V'$. Перше включення є очевидним, оскільки $H' \subset V'$. Для доведення другого включення запишемо у полярній системі координат рівняння дуги параболи, яка є частиною межі множини $P \setminus H'$:

$$\rho = \frac{2s_1(\cos\beta_2 - s_2)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)}, \quad \frac{\pi}{2}+\beta_1 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_1.$$

Рівняння прямої, що є межею множини V', у полярній системі координат має вигляд

$$\rho = \frac{-s_1}{\cos(\varphi-\beta_1)}, \quad \frac{\pi}{2}+\beta_1 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_1.$$

При кожному фіксованому φ, $\frac{\pi}{2}+\beta_1 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_1$, різниця радіусів-векторів точок вищезгаданих прямої і параболи є додатною. Справді,

$$-\frac{s_1}{\cos(\varphi-\beta_1)} - \frac{2s_1(\cos\beta_2 - s_2)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)} \geq \frac{-s_1}{\cos(\varphi-\beta_1)}\frac{1+\cos(\varphi-\beta_1+\beta_2)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)} + s_1s_2 \geq s_1s_2 > 0,$$

оскільки $\frac{\pi}{2} < \varphi-\beta_1 < \frac{3\pi}{2}$ і $\varphi-\beta_1 \neq \beta_2$, а також з урахуванням умов (3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k < \beta_2 < \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Отже, виконується включення $P\setminus H' \subset V'$ і тому $P\subset V'$.

Аналогічно доведемо, що $P\subset V''$. Означивши множину $H'' = \left\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\left(ze^{-i\beta_2}\right)\geq 0\right\}$ і врахувавши, що $P = (P\cap H'')\cup(P\setminus H'')$, покажемо виконання включень $P\cap H''\subset V''$ і $P\setminus H''\subset V''$.

Із співвідношення $H''\subset V''$ випливає, що $P\cap H''\subset V''$.

Повторивши наведені вище міркування, запишемо рівняння частини параболи, що є межею множини $P\setminus H''$:

$$\rho = \frac{2s_1(\cos\beta_2 - s_2)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)}, \quad \frac{\pi}{2}+\beta_2 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_2,$$

і рівняння межі множини V'':

$$\rho = \frac{-\cos\beta_2 + s_2}{\cos(\varphi-\beta_2)}, \quad \frac{\pi}{2}+\beta_2 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_2.$$

Для доведення включення $P\setminus H''\subset V''$ покажемо, що при кожному фіксованому φ, $\frac{\pi}{2}+\beta_2 < \varphi < \frac{3\pi}{2}+\beta_2$, різниця радіусів-векторів точок прямої і параболи є невід'ємною:

$$-\frac{\cos\beta_2 - s_2}{\cos(\varphi-\beta_2)} - \frac{2s_1(\cos\beta_2 - s_2)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)} =$$
$$= (s_2-\cos\beta_2)\frac{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)+2s_1\cos(\varphi-\beta_2)}{\cos(\varphi-\beta_2)(1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2))} \geq$$
$$\geq -\frac{\cos\beta_2 - s_2}{\cos(\varphi-\beta_2)}\frac{1+\cos(\varphi-\beta_2+\beta_1)}{1-\cos(\varphi-\beta_1-\beta_2)} \geq 0,$$

оскільки $\frac{\pi}{2} < \varphi-\beta_2 < \frac{3\pi}{2}$ і $\varphi-\beta_2 \neq \beta_1$, а також з урахуванням умов (3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k < \beta_1 < \frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Таким чином, $P\subset V''$.

Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай елементи неперервного дробу* (1) *задовольняють умови*

$$|a_n| - \operatorname{Re}\left(a_n e^{-i(\phi_n+\phi_{n-1})}\right) \leq 2q_{n-1}\left(\operatorname{Re}\left(b_n e^{-i\phi_n}\right) - q_n\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

де ϕ_n *— дійсні числа,* q_n *— деякі додатні сталі, такі що послідовність*

$$\left\{\frac{a_n}{q_n q_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{5}$$

обмежена. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ *існує таке* $n_0 \in \mathbb{N}$, *що для довільного* $n \geq n_0$ *і довільного* b^*_{n+1} *такого, що*

$$|a_{n+1}| - \operatorname{Re}\left(a_{n+1} e^{-i(\phi_n+\phi_{n+1})}\right) \leq 2q_n\left(\operatorname{Re}\left(b^*_{n+1} e^{-i\phi_{n+1}}\right) - q_{n+1}\right), \tag{6}$$

виконується нерівність

$$\left|f_n - f^*_{n+1}\right| < \varepsilon,$$

де

$$f_n = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}, \quad f^*_{n+1} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} + \frac{a_{n+1}}{b^*_{n+1}}.$$

Доведення. Розглянемо різницю $f_n - f^*_{n+1}$. Позначимо через A_n, B_n і A^*_{n+1}, B^*_{n+1} канонічні чисельники і знаменники підхідних дробів f_n і f^*_{n+1} відповідно. Тоді для довільних $n \geq 2$ маємо

$$f_n - f^*_{n+1} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{A^*_{n+1}}{B^*_{n+1}} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{b^*_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1}}{b^*_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}} =$$

$$= \frac{B_{n-1}A_n - A_{n-1}B_n}{B_{n-1}B_n} \frac{1}{\dfrac{b^*_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}}{a_{n+1}B_{n-1}}} = (f_n - f_{n-1}) \frac{1}{1 + \dfrac{b^*_{n+1}}{a_{n+1}} \dfrac{B_n}{B_{n-1}}}.$$

Використовуючи рекурентні співвідношення і те, що $B_2/B_1 = b_2 + a_2/b_1$, перетворюємо знаменник другого множника останнього виразу:

$$1 + \frac{b^*_{n+1}}{a_{n+1}}\left(\frac{b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}}{B_{n-1}}\right) = 1 + \frac{b^*_{n+1}}{a_{n+1}}\left(b_n + \frac{a_n}{b_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{b_1}\right).$$

Виконуючи еквівалентні перетворення [20] отриманого неперервного дробу, де $\rho_k = 1/b_k$, $k = n-1, n-2, \ldots, 1$, маємо

$$b_n + \frac{a_n \rho_{n-1}}{b_{n-1}\rho_{n-1}} + \frac{a_{n-1}\rho_{n-1}\rho_{n-2}}{b_{n-2}\rho_{n-2}} + \cdots + \frac{a_2\rho_2\rho_1}{b_1\rho_1} =$$

$$= b_n + \frac{a_n/b_{n-1}}{1} + \frac{a_{n-1}/(b_{n-1}b_{n-2})}{1} + \cdots + \frac{a_2/(b_2 b_1)}{1}.$$

Далі, після елементарних перетворень отримуємо

$$f_n - f^*_{n+1} = (f_n - f_{n-1}) \frac{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)}{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right) + 1 + \dfrac{a_n/(b_n b_{n-1})}{1} + \cdots + \dfrac{a_2/(b_2 b_1)}{1}}. \tag{7}$$

Позначимо

$$\alpha_k = \frac{a_k}{b_k b_{k-1}}, \quad 2 \le k \le n, \quad F_n = \frac{\alpha_n}{1} \underset{+}{} \frac{\alpha_{n-1}}{1} \underset{+}{} \dots \underset{+}{} \frac{\alpha_2}{1}, \quad n \ge 2.$$

Тоді різницю $f_n - f^*_{n+1}$ остаточно запишемо у вигляді

$$f_n - f^*_{n+1} = (f_n - f_{n-1}) \frac{a_{n+1}/\big(b^*_{n+1} b_n\big)}{a_{n+1}/\big(b^*_{n+1} b_n\big) + 1 + F_n}. \tag{8}$$

Покажемо, що для довільного дійсного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне n_0, що для довільних $n \ge n_0$ і довільних b^*_{n+1} таких, що задовольняють умову (6), величина $\big|f_n - f^*_{n+1}\big|$ не перевищує ε.

Доведемо обмеженість другого множника у правій частині рівності (8). Для цього знайдемо множину всіх можливих значень F_n. Нехай $\psi_k = \phi_k - \arg b_k$, $k = \overline{1,n}$. Очевидно, що $\cos\psi_k \ge \ge q_k/|b_k|$, $k = \overline{1,n}$, оскільки $\operatorname{Re}\big(b_k e^{-i\phi_k}\big) \ge q_k$, $k = \overline{1,n}$. Тоді кожне α_k, $2 \le k \le n$, належить параболі

$$P_k = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon |z| - \operatorname{Re}\Big(z e^{-i(\psi_k + \psi_{k-1})}\Big) \le 2\tilde{q}_{k-1}(\cos\psi_k - \tilde{q}_k)\Big\}, \tag{9}$$

де $\tilde{q}_k = q_k/|b_k|$, $k = \overline{1,n}$. Справді, враховуючи (4), маємо

$$|\alpha_k| - \operatorname{Re}\Big(\alpha_k e^{-i(\psi_k + \psi_{k-1})}\Big) = \frac{1}{|b_k b_{k-1}|}\Big(|a_k| - \operatorname{Re}\Big(a_k e^{-i(\phi_k + \phi_{k-1})}\Big)\Big) \le$$

$$\le 2\frac{q_{k-1}}{|b_{k-1}|}\left(\frac{\operatorname{Re}\big(b_k e^{-i\phi_k}\big)}{|b_k|} - \frac{q_k}{|b_k|}\right) = 2\tilde{q}_{k-1}(\cos\psi_k - \tilde{q}_k), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Нехай

$$V_k = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\Big(z e^{-i\psi_k}\Big) \ge -\cos\psi_k + \tilde{q}_k\Big\}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Доведемо, що якщо елементи неперервного дробу F_n належать параболічним областям, $\alpha_k \in \in P_k$, $k = 2, 3, \dots, n$, то $F_n \in V_n$. Для цього достатньо показати, що $\alpha_2 \in V_2$ і справджуються включення

$$\frac{\alpha_k}{1 + V_{k-1}} \subset V_k, \quad k = 3, 4, \dots, n. \tag{10}$$

Із умов теореми випливає, що $\alpha_2 \in P_2$. Використовуючи лему 1, де $\beta_r = \psi_r$, $s_r = \widetilde{q}_r$, $r = 1, 2$, $P = P_2$, $V'' = V_2$, переконуємося, що $P_2 \subset V_2$. Отже, $\alpha_2 \in V_2$. Очевидно, що

$$1 + V_{k-1} = \Big\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\Big(z e^{-i\psi_{k-1}}\Big) \ge \tilde{q}_{k-1}\Big\}, \quad k = 3, 4, \dots, n.$$

При відображенні $w = \alpha_k/z$ остання півплощина перейде у замкнений круг, оскільки $\tilde{q}_{k-1} \ne \ne 0$, $k = 2, 3, \dots, n$. Точка $c_k = 2\tilde{q}_{k-1}e^{i\psi_{k-1}}$, симетрична початку координат щодо прямої $\operatorname{Re}\big(z e^{-i\psi_{k-1}}\big) = \tilde{q}_{k-1}$, перейде у центр цього круга, тобто у точку $C_k = \alpha_k e^{-i\psi_{k-1}}/(2\tilde{q}_{k-1})$. Образом точки $g_k = \tilde{q}_{k-1}e^{i\psi_{k-1}}$ прямої $\operatorname{Re}\big(z e^{-i\psi_{k-1}}\big) = \tilde{q}_{k-1}$ при відображенні $w = \alpha_k/z$ буде точка $G_k = \alpha_k e^{-i\psi_{k-1}}/(\tilde{q}_{k-1})$, що належатиме колу, саме тому радіус цього кола буде $R_k = |G_k - C_k| = |\alpha_k|/(2\tilde{q}_{k-1})$. Отже,

$$\frac{\alpha_k}{1 + V_{k-1}} = B_k, \quad \text{де} \quad B_k = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - C_k| \le R_k\}, \quad n = 3, 4, \dots, n.$$

Покажемо, що цей круг міститься у півплощині V_k, тобто виконується включення (10). Для того щоб $B_k \subset V_k,\ k = 2, 3, \ldots, n,$ необхідно і достатньо, щоб (а) $C_k \in V_k$ і (б) відстань від межі області V_k до центра кола перевищувала радіус кола R_k.

Перевіримо виконання умови (а). Вона еквівалентна нерівності

$$\mathrm{Re}\left(C_k e^{-i\psi_k}\right) \geq -(\cos\psi_k - \tilde{q}_k) \quad \text{або} \quad -\mathrm{Re}\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right) \leq 2\tilde{q}_{k-1}(\cos\psi_k - \tilde{q}_k).$$

Остання нерівність виконується, оскільки $\alpha_k \in P_k,\ k = 2, 3, \ldots, n,$ де P_k визначено у (9). Таким чином, умова (а) справджується.

Для перевірки умови (б) знайдемо відстань від центра кола B_k до межі області V_k. Для цього опустимо перпендикуляр з точки C_k на пряму $\mathrm{Re}\left(ze^{-i\psi_k}\right) = -\cos\psi_k + \tilde{q}_k$. Основою перпендикуляра буде точка $D_k = e^{i\psi_k}\left(-(\cos\psi_k - \tilde{q}_k) + i\mathrm{Im}\left(C_k e^{-i\psi_k}\right)\right)$. Відстань $|D_k - C_k|$ від центра кола до межі півплощини є такою:

$$\left|e^{i\psi_k}\left(-(\cos\psi_k - \tilde{q}_k) + i\mathrm{Im}\left(C_k e^{-i\psi_k}\right)\right) - \frac{\alpha_k e^{-i\psi_{k-1}}}{2\tilde{q}_{k-1}}\right| = \cos\psi_k - \tilde{q}_k + \frac{\mathrm{Re}\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right)}{2\tilde{q}_{k-1}}.$$

Ця величина має бути меншою за радіус кола, тобто повинна виконуватися нерівність

$$\cos\psi_k - \tilde{q}_k + \frac{\mathrm{Re}\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right)}{2\tilde{q}_{k-1}} \geq \frac{|\alpha_k|}{2\tilde{q}_{k-1}}$$

або

$$\frac{|\alpha_k|}{2\tilde{q}_{k-1}} - \frac{\mathrm{Re}\left(\alpha_k e^{-i(\psi_{k-1}+\psi_k)}\right)}{2\tilde{q}_{k-1}} \leq \cos\psi_k - \tilde{q}_k.$$

Остання нерівність випливає з того, що $\alpha_k \in P_k$, де P_k визначено у (9).

Таким чином, доведено правильність включення (10), тобто що $F_n \in V_n$. Звідси випливає, що

$$1 + F_n \in W_n, \quad W_n = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\left(ze^{-i\psi_n}\right) \geq \tilde{q}_n\right\}. \tag{11}$$

Як і при доведенні того, що $\alpha_k \in P_k,\ k = \overline{2, n}$, враховуючи умову (4), можна показати, що $a_{n+1}/(b^*_{n+1} b_n) \in P^*_{n+1}$, де

$$P^*_{n+1} = \left\{z \in \mathbb{C} \colon |z| - \mathrm{Re}\left(ze^{-i\left(\psi_n + \psi^*_{n+1}\right)}\right) \leq 2\tilde{q}_n\left(\cos\psi^*_{n+1} - \tilde{q}^*_{n+1}\right)\right\}, \tag{12}$$

до того ж $\tilde{q}^*_{n+1} = q_{n+1}/\left|b^*_{n+1}\right|,\ \psi^*_{n+1} = \phi_{n+1} - \arg b^*_{n+1}$. Із умови (6) випливає, що $\cos\psi^*_{n+1} \geq$ $\geq \tilde{q}^*_{n+1}$.

Величина $a_{n+1}/(b^*_{n+1} b_n)$ обмежена, оскільки

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b^*_{n+1} b_n}\right| \leq \frac{|a_{n+1}|}{\mathrm{Re}\,(b^*_{n+1})\mathrm{Re}\,(b_n)} \leq \frac{|a_{n+1}|}{q_{n+1} q_n},$$

а послідовність (5) обмежена за умовою теореми. Таким чином, існує така стала $M > 0$, що $a_{n+1}/(b^*_{n+1} b_n) \in K$, де $K = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq M\}$.

Покажемо, що знаменник другого множника (8) $a_{n+1}/(b^*_{n+1}b_n)+1+F_n$ відокремлений від нуля. Для довільних z_1 і z_2, таких що $z_1\in P^*_{n+1}\cap K$, а $z_2\in W_n$, де P^*_{n+1} і W_n визначені згідно з (11) і (12), оцінимо $|z_1+z_2|$. Очевидно, що $z_1+z_2=z_1-\widetilde{z}_2$, де $z_1\in P^*_{n+1}\cap K$, а $\widetilde{z}_2\in\widetilde{W}_n$, до того ж $\widetilde{W}_n=\left\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\left(ze^{-i\psi_n}\right)\le-\tilde{q}_n\right\}$. Застосуємо лему 1, поклавши $\beta_1=\psi_n$, $\beta_2=\psi^*_{n+1}$, $s_1=\tilde{q}_n$, $s_2=\tilde{q}^*_{n+1}$, і отримаємо, що $P^*_{n+1}\subset\mathbb{C}\setminus\widetilde{W}$, оскільки у даному випадку $P=P^*_{n+1}$, $V'=\mathbb{C}\setminus\widetilde{W}$. Таким чином, $\left(P^*_{n+1}\cap K\right)\cap\widetilde{W}=\varnothing$. Отже, вираз $|z_1-\widetilde{z}_2|$ не менший ніж відстань між замкненою обмеженою множиною $P^*_{n+1}\cap K$ і прямою, що є межею півплощини $\widetilde{W}_n$. Ця відстань є неперервною функцією і досягає, за другою теоремою Веєрштрасса, свого мінімального значення d, до того ж $d>0$.

Отже, використовуючи обмеженість області, з якої вибираємо елемент $a_{n+1}/(b^*_{n+1}b_n)$, і попередні міркування, переконуємося, що для довільного $n\ge 2$

$$\left|\frac{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)}{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)+1+F_n}\right|\le\frac{M}{d}.$$

Оскільки для неперервного дробу (1) виконуються умови теореми Трона – Джоунса, то він збігається, тобто для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $n_0\in\mathbb{N}$, що для довільного $n\ge n_0$ виконується нерівність $|f_{n-1}-f_n|<d\varepsilon/M$.

Отже, для довільного $n\ge\max\{2,n_0\}$ маємо

$$\left|f_n-f^*_{n+1}\right|=|f_{n-1}-f_n|\left|\frac{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)}{a_{n+1}/\left(b^*_{n+1}b_n\right)+1+F_n}\right|<\varepsilon.$$

Теорему доведено.

4. Основний результат. Розглянемо двовимірний ГЛД спеціального вигляду

$$\sum_{i_1=1}^{2}\frac{a_{i_1}}{b_{i_1}}+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \tag{13}$$

де $a_{i(k)},\ b_{i(k)}\in\mathbb{C},\ i(k)\in\mathcal{I},\ i_0=2$. Встановимо аналог теореми Трона – Джоунса для таких дробів.

Теорема 3. *Нехай елементи двовимірного ГЛД спеціального вигляду* (13) *задовольняють умови*

$$\left|a_{1[n]}\right|-\operatorname{Re}\left(a_{1[n]}e^{-i(\psi_n+\psi_{n-1})}\right)\le 2p_{n-1}\Big(\operatorname{Re}\left(b_{1[n]}e^{-i\psi_n}\right)-p_n\Big),\ n=1,2,\ldots, \tag{14}$$

$$\left|a_{2[k],1[n]}\right|-\operatorname{Re}\left(a_{2[k],1[n]}e^{-i(\psi_k+\psi_{k-1})}\right)\le 2s_{k,n-1}\left(\operatorname{Re}\left(b_{2[k],1[n]}e^{-i\psi_k}\right)-s_{k,n}\right), \tag{15}$$

$$n=1,2,\ldots,\quad k=1,2,\ldots,$$

$$\operatorname{Re}\left(b_{2[n]}e^{-i(\arg a_{2[n],1}-\psi_n)}\right)\ge q_n,\quad n=1,2,\ldots, \tag{16}$$

і при деяких $l_k\in\mathbb{Z}$

$$\arg a_{2[k],1}+\arg a_{2[k+1],1}-\arg a_{2[k+1]}=\psi_k+\psi_{k+1}+2\pi l_k,\quad k=1,2,\ldots, \tag{17}$$

де ψ_k — *дійсні числа,* $p_n,\ s_{k,n},\ q_n,\ n=0,1,\ldots,\ k=1,2,\ldots,$ — *деякі додатні сталі, такі що кожна з послідовностей*

$$\left\{\frac{a_{1[n]}}{p_np_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty},\quad \left\{\frac{a_{2[k],1[n]}}{s_{k,n}s_{k,n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty},\quad k=1,2,\ldots,\quad \left\{\frac{a_{2[n]}}{q_n,q_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

є обмеженою. Тоді ГЛД (13) *збігається.*

Доведення. Враховуючи нерівності (14), (15), обмеженість послідовностей $\left\{\frac{a_{1[n]}}{p_np_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{a_{2[k],1[n]}}{s_{k,n}s_{k,n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $k=1,2,\ldots,$ переконуємося, що для елементів неперервних дробів

$$\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_{1[n]}}{b_{1[n]}},\ \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2[k],1[n]}}{b_{2[k],1[n]}},\quad k=1,2,\ldots,$$

виконуються умови теореми Трона – Джоунса. Таким чином, ці неперервні дроби збігаються. Позначимо їхні значення відповідно b'_0 і $b'_{2[k]}$, $k=1,2,\ldots.$ Згідно з тією ж теоремою, значення цих дробів та їхніх підхідних дробів належать відповідним півплощинам

$$H'_0=\left\{v\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\left(ve^{i(\psi_1-\arg a_1)}\right)\geq 0\right\},\quad H'_k=\left\{v\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\left(ve^{i(\psi_k-\arg a_{2[k],1})}\right)\geq 0\right\},\quad k\geq 1.$$

Тоді значення неперервних дробів

$$b^{(1)}_{2[k]}=b_{2[k]}+\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2[k],1[n]}}{b_{2[k],1[n]}},\quad k=1,2,\ldots, \tag{18}$$

і їхніх підхідних дробів з урахуванням умови (16) належать півплощинам

$$H_k=\left\{v\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\left(ve^{-i(\arg a_{2[k],1}-\psi_k)}\right)\geq q_k\right\},\quad k=1,2,\ldots,$$

відповідно.

Розглянемо неперервний дріб

$$b'_0+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2[k]}}{b^{(1)}_{2[k]}}. \tag{19}$$

Враховуючи умови (16) і (17), а також те, що

$$\mathrm{Re}\left(b^{(1)}_{2[k]}e^{-i(\arg a_{2[k],1}-\psi_k)}\right)\geq \mathrm{Re}\left(b_{2[k]}e^{-i(\arg a_{2[k],1}-\psi_k)}\right)\geq q_k,\quad k=1,2,\ldots, \tag{20}$$

маємо

$$\left|a_{2[k]}\right|-\mathrm{Re}\left(a_{2[k]}e^{-i(\arg a_{2[k],1}-\psi_k+\arg a_{2[k-1],1}-\psi_{k-1})}\right)=\left|a_{2[k]}\right|-\mathrm{Re}\left(a_{2[k]}e^{-i(\arg a_{2[k]})}\right)=0\leq$$

$$\leq 2q_{k-1}\left(\mathrm{Re}\left(b^{(1)}_{2[k]}e^{-i(\arg a_{2[k],1}-\psi_k)}\right)-q_k\right),\quad k=1,2,\ldots.$$

Із обмеженості послідовності $\left\{\frac{a_{2[n]}}{q_nq_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ випливає, що елементи неперервного дробу (19) задовольняють умови теореми Трона – Джоунса, тобто неперервний дріб (19) збігається, а ГЛД (13) є $\mathcal{C}_1$-фігурно збіжним.

Доведемо тепер, що із збіжності неперервного дробу (19) випливає збіжність ГЛД спеціального вигляду (13).

Нехай

$$\widehat{f}_r = b_0' + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \frac{a_{2[k]}}{b_{2[k]}^{(1)}}, \quad r \geq 1,$$

— r-й підхідний дріб неперервного дробу (19), а

$$f_r = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}, \quad r \geq 1,$$

— r-й підхідний дріб ГЛД (13). Враховуючи особливості структури ГЛД (13), f_r можна записати у вигляді

$$f_r = b_0^{(1,r)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{r} \frac{a_{2[k]}}{b_{2[k]}^{(1,r-k)}}, \quad r \geq 1,$$

де

$$b_0^{(1,r)} = \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{r} \frac{a_{1[l]}}{b_{1[l]}}, \ b_{2[r]}^{(1,0)} = b_{2[r]}, \quad b_{2[k]}^{(1,r-k)} = b_{2[k]} + \mathop{\mathrm{D}}_{l=1}^{r-k} \frac{a_{2[k],1[l]}}{b_{2[k],1[l]}}, \quad k = \overline{1, r-1}.$$

Покажемо, що для довільного дійсного $\varepsilon > 0$ існує натуральне число μ таке, що для довільних натуральних $r \geq \mu$ виконується нерівність

$$\left| \widehat{f}_r - f_r \right| < \varepsilon, \tag{21}$$

тобто що із $\mathcal{C}_1$-фігурної збіжності ГЛД (13) випливає звичайна збіжність. Очевидно, що для довільних $n \geq 1$ і $r \geq n+1$

$$\left| \widehat{f}_r - f_r \right| \leq \left| \widehat{f}_r - h_{r,n} \right| + |f_r - h_{r,n}|, \tag{22}$$

де

$$h_{r,n} = b_0^{(1)} + \frac{a_{2[1]}}{b_{2[1]}^{(1)}} + \cdots + \frac{a_{2[n]}}{b_{2[n]}^{(1)}} + \frac{a_{2[n+1]}}{b_{2[n+1]}^{(1,r-n-1)}} + \cdots + \frac{a_{2[r]}}{b_{2[r]}^{(1,0)}}.$$

Розглянемо перший доданок у правій частині нерівності (22). Для довільних $n \geq 1$ і $r \geq$ $\geq n+1$ маємо

$$\left| \widehat{f}_r - h_{r,n} \right| \leq \left| \widehat{f}_r - \widehat{f}_n \right| + \left| \widehat{f}_n - h_{r,n} \right|. \tag{23}$$

Оскільки неперервний дріб (19) збігається, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що для довільних натуральних $n \geq n_0$ і $r \geq n$ виконується нерівність

$$\left| \widehat{f}_r - \widehat{f}_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{24}$$

Для оцінки другого доданка правої частини нерівності (23) застосуємо теорему 2. Нехай

$$b_{2[n+1]}^{*} = b_{2[n+1]}^{(1,0)} = b_{2[n+1]}, \quad \text{якщо} \quad r = n+1, \tag{25}$$

і

$$b^{*}_{2[n+1]}=b^{(1,r-n-1)}_{2[n+1]}+\mathop{\mathrm{D}}_{l=n+2}^{r}\frac{a_{2[l]}}{b^{(1,r-l)}_{2[l]}},\qquad \text{якщо}\qquad r\geq n+2.$$

Знайдемо область значень останнього дробу. Як і при встановленні нерівності (20), можна показати, що елементи $b^{(1,r-l)}_{2[l]},\ l=\overline{n+1,r}$, належать відповідно множинам $H_l,\ l=\overline{n+1,r}$. Враховуючи умови (16), (17) і отримані нерівності

$$\operatorname{Re}\left(b^{(1,r-l)}_{2[l]}e^{-i(\arg a_{2[l],1}-\psi_l)}\right)\geq \operatorname{Re}\left(b_{2[l]}e^{-i(\arg a_{2[l],1}-\psi_l)}\right)\geq q_l,\quad l=\overline{n+1,r},$$

для кожного $l=\overline{n+1,r}$ маємо

$$\left|a_{2[l]}\right|-\operatorname{Re}\left(a_{2[l]}e^{-i(\arg a_{2[l],1}-\psi_l+\arg a_{2[l-1],1}-\psi_{l-1})}\right)\leq 2q_{l-1}\Big(\operatorname{Re}\left(b^{(1,r-l)}_{2[l]}e^{-i(\arg a_{2[l],1}-\psi_l)}\right)-q_l\Big).$$

Оскільки послідовність $\left\{\dfrac{a_{2[n]}}{q_nq_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена, то для дробу $b^{*}_{2[n+1]},\ r\geq n+2$, виконуються умови теореми Трона – Джоунса. Тому, враховуючи, що $b^{(1,r-n-2)}_{2[n+2]}\in H_{n+2}$, переконуємося, що значення неперервного дробу $\mathop{\mathrm{D}}\limits_{l=n+2}^{r}\dfrac{a_{2[l]}}{b^{(1,r-l)}_{2[l]}}$ належить півплощині

$$H=\Big\{v\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}\left(ve^{i(\arg a_{2[n+2],1}-\psi_{n+2}-\arg a_{2[n+2]})}\right)\geq 0\Big\}.$$

Враховуючи (17), отримуємо, що $H_{n+1}=H,\ n\in\mathbb{N}$. Оскільки $b^{(1,r-n-1)}_{2[n+1]}\in H_{n+1}$, то $b^{*}_{2[n+1]}\in H_{n+1},\ r\geq n+1$.

Далі, використовуючи міркування, аналогічні до наведених вище, легко показати, що

$$\operatorname{Re}\left(b^{*}_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1})}\right)\geq \operatorname{Re}\left(b_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1})}\right)\geq q_{n+1},$$

а це, з урахуванням умови (17), означає, що виконується нерівність

$$\left|a_{2[n+1]}\right|-\operatorname{Re}\left(a_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1}+\arg a_{2[n],1}-\psi_n)}\right)=0\leq$$
$$\leq 2q_n\Big(\operatorname{Re}\left(b^{*}_{2[n+1]}e^{-i(\arg a_{2[n+1],1}-\psi_{n+1})}\right)-q_{n+1}\Big).$$

Тобто для неперервного дробу (19) та визначеного згідно з (25) елемента $b^{*}_{2[n+1]}$ виконуються умови теореми 2, де

$$\widehat{f}^{*}_{n+1}=b^{(1)}_0+\frac{a_{2[1]}}{b^{(1)}_{2[1]}}+\dots+\frac{a_{2[n]}}{b^{(1)}_{2[n]}}+\frac{a_{2[n+1]}}{b^{*}_{2[n+1]}},$$

$\phi_n=\arg a_{2[n],1}-\psi_n$, а замість b^{*}_{n+1} взято $b^{*}_{2[n+1]},\ n=2,3,\ldots$.

Отже, оскільки $\widehat{f}^{*}_{n+1}=h_{r,n},\ r\geq n+1$, для вже заданого ε існує таке натуральне число n, що для всіх $n\geq n_1$ справджується нерівність

$$\left|\widehat{f}_n-h_{r,n}\right|=\left|\widehat{f}_n-\widehat{f}^{*}_{n+1}\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

Нехай $\nu = \max\{n_0, n_1\}$. Тоді при $n = \nu$ отримаємо одночасне виконання нерівностей (24) і (26). Поклавши у нерівності (23) $n = \nu$, якщо $r \geq \nu + 1$, одержимо, що для раніше заданого ε виконується нерівність

$$\left|\widehat{f}_r - h_{r,\nu}\right| < \frac{2\varepsilon}{3}, \quad r \geq \nu + 1.$$

Оскільки умова (22) виконується для довільних натуральних n і $r \geq n + 1$, то вона буде виконуватись і для фіксованого $n = \nu$ і довільних $r \geq \nu + 1$, тобто

$$\left|\widehat{f}_r - f_r\right| \leq \left|\widehat{f}_r - h_{r,\nu}\right| + |f_r - h_{r,\nu}|. \tag{27}$$

Встановимо оцінку зверху для другого доданка у правій частині нерівності (27). Нехай $Q_{2[s]}^{(r)}, \widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}$, $s = 1, 2, \ldots, r$, — залишки неперервних дробів f_r та $h_{r,\nu}$ відповідно, тобто

$$Q_{2[s]}^{(r)} = b_{2[s]}^{(1,r-s)} + \frac{a_{2[s]}}{Q_{2[s+1]}^{(r)}}, \quad s = 1, 2, \ldots, r-1, \quad Q_{2[r]}^{(r)} = b_{2[r]}^{(1,0)},$$

$$\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} = \begin{cases} b_{2[s]}^{(1)} + \dfrac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s+1]}^{(r)}}, & s = 1, 2, \ldots, \nu, \\ Q_{2[s]}^{(r)}, & s = \nu + 1, \nu + 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Міркуючи, як і при встановленні того, що $b_{2[n+1]}^{*} \in H_{n+1}$, легко довести, що

$$Q_{2[s]}^{(r)} \in H_s \quad \text{і} \quad \widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} \in H_s, \quad s = 1, 2, \ldots, r. \tag{28}$$

Враховуючи, що

$$f_r - h_{r,\nu} = b_0^{(1,r)} - b_0^{(1)} + \frac{a_{2[1]}}{Q_{2[1]}^{(r)}} - \frac{a_{2[1]}}{\widehat{Q}_{2[1]}^{(r)}},$$

після елементарних перетворень з використанням рекурентних співвідношень для залишків неперервних дробів f_r і $h_{r,\nu}$ та методики доведення формули для різниці підхідних дробів [3] можна показати, що

$$|f_r - h_{r,\nu}| \leq \left|b_0^{(1,r)} - b_0^{(1)}\right| + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{\left|b_{2[k]}^{(1,r-k)} - b_{2[k]}^{(1)}\right|}{\prod_{s=1}^{k}\left|\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} Q_{2[s]}^{(r)}\right|} \left|a_{2[1]} a_{2[2]} \ldots a_{2[k]}\right|. \tag{29}$$

Із співвідношень (28) після елементарних перетворень отримуємо, що для довільного s, $1 \leq$ $\leq s \leq \nu$, виконуються нерівності

$$\left|\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}\right| \geq \operatorname{Re}\left(\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)} e^{-i(\arg a_{2[s],1} - \psi_s)}\right) \geq q_s, \quad \left|Q_{2[s]}^{(r)}\right| \geq \operatorname{Re}\left(Q_{2[s]}^{(r)} e^{-i(\arg a_{2[s],1} - \psi_s)}\right) \geq q_s.$$

Покладемо $\delta = \min_{1 \leq s \leq \nu}\{q_s\}$. Таким чином,

$$\left|\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}\right| \geq \delta, \ \left|Q_{2[s]}^{(r)}\right| \geq \delta, \quad s = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{30}$$

Розглянемо добутки

$$\prod_{s=1}^{k}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right|, \quad k=1,2,\ldots,\nu,$$

у нерівності (29). Якщо $k=1$, то враховуючи (30), маємо $\left|a_2/(\widehat{Q}_2^{(r)}Q_2^{(r)})\right| \le |a_2|/\delta^2$. Якщо $k=2l+1$, $l\ge 1$, то

$$\prod_{s=1}^{2l+1}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right| = \left|\frac{a_2}{\widehat{Q}_2^{(r)}Q_{2[2l+1]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l}\left|\frac{a_{2[2s+1]}}{\widehat{Q}_{2[2s]}^{(r)}\widehat{Q}_{2[2s+1]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l}\left|\frac{a_{2[2s]}}{Q_{2[2s-1]}^{(r)}Q_{2[2s]}^{(r)}}\right| \le$$

$$\le \frac{|a_2|}{q_2q_{2l+1}}\prod_{s=1}^{l}\frac{\left|a_{2[2s+1]}\right|}{q_{2s}q_{2s+1}}\prod_{s=1}^{l}\frac{\left|a_{2[2s]}\right|}{q_{2s-1}q_{2s}}.$$

З обмеженості послідовності $\left\{\dfrac{a_{2[n]}}{q_nq_{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ випливає, що існує стала $M>0$ така, що $\left|a_{2[n]}\right|/(q_nq_{n-1})\le M$, $n\ge 1$. Таким чином,

$$\prod_{s=1}^{2l+1}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right| \le \frac{|a_2|}{\delta^2}M^{2l}.$$

Якщо $k=2l$, $l\ge 1$, то використовуючи (30) і аналогічні міркування, отримуємо

$$\prod_{s=1}^{2l}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right| = \left|\frac{a_2}{\widehat{Q}_2^{(r)}\widehat{Q}_{2[2l]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l-1}\left|\frac{a_{2[2s+1]}}{\widehat{Q}_{2[2s]}^{(r)}\widehat{Q}_{2[2s+1]}^{(r)}}\right|\prod_{s=1}^{l}\left|\frac{a_{2[2s]}}{Q_{2[2s-1]}^{(r)}Q_{2[2s]}^{(r)}}\right| \le \frac{|\,a_2|}{\delta^2}M^{2l-1}.$$

Отже,

$$\prod_{s=1}^{k}\left|\frac{a_{2[s]}}{\widehat{Q}_{2[s]}^{(r)}Q_{2[s]}^{(r)}}\right| \le \frac{|a_2|}{\delta^2}M^{k-1} \le \frac{|a_2|}{\delta^2}K^{\nu-1}, \quad 1\le k\le\nu, \quad K=\max\{M,1\}.$$

Оцінимо вирази у чисельниках (29). Як було показано, неперервні дроби (18) є збіжними. Тому для раніше заданого ε існують номери $r_1,\ r_2,\ldots,r_\nu$ такі, що для довільного $r\ge \max_{1\le k\le\nu}\{r_k\}$ виконуються нерівності

$$\left|b_{2[k]}^{(1,r-k)}-b_{2[k]}^{(1)}\right| < \frac{\varepsilon\delta^2}{3K^{\nu-1}|a_2|(\nu+1)}, \quad 1\le k\le\nu, \tag{31}$$

як модуль різниці між значенням нескінченного неперервного дробу і його $(r-k)$-м підхідним дробом. Аналогічно, існує таке r_0, що для довільних $r\ge r_0$

$$\left|b_0^{(1,r)}-b_0'\right| < \frac{\varepsilon}{3(\nu+1)}. \tag{32}$$

Нехай $\mu=\max_{0\le k\le\nu}\{r_k\}$. Використовуючи оцінки (31), (32), для довільних $r\ge\mu= \max_{0\le k\le\nu}\{r_k\}$ і заданого раніше ν маємо

$$|f_r-h_{r,\nu}|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, для заданого ε існує таке натуральне число μ, що для всіх $r\ge\mu$ виконується нерівність (21), з якої випливає, що ГЛД (13) збігається, оскільки неперервний дріб (19) збігається.

Теорему доведено.

Література

1. Т. М. Антонова, *Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **42**, № 4, 7 – 12 (1999).
2. О. Є. Баран, *Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду*, Карпат. мат. публ., **5**, № 1, 4 – 13 (2013).
3. Д. И. Боднар, *Ветвящиеся цепные дроби*, Наук. думка, Киев (1986).
4. Д. І. Боднар, Р. І. Дмитришин, *Багатовимірні приєднані дроби з нерівнозначними змінними і кратні степеневі ряди*, Укр. мат. журн., **71**, № 3, 325 – 339 (2019).
5. Д. І. Боднар, Х. Й. Кучмінська, *Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів*, Мат. студ., **4**, 29 – 36 (1995).
6. Р. І. Дмитришин, *Про розвинення деяких функцій у двовимірний g-дріб з нерівнозначними змінними*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **53**, № 4, 28 – 34 (2010).
7. T. M. Antonova, R. I. Dmytryshyn, *Truncation error bounds for the branched continued fraction* $\sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}}{1} + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1} + \sum_{i_3=1}^{i_2} \frac{a_{i(3)}}{1} + \ldots$, Ukr. Math. J., **72**, № 7, 1018 – 1029 (2021).
8. T. Antonova, R. Dmytryshyn, V. Kravtsiv, *Branched continued fraction expansions of Horn's hypergeometric function H_3 ratios*, Mathematics, **9** (2021).
9. I. Bilanyk, D. Bodnar, *Convergence criterion for branched continued fractions of the special form with positive elements*, Carpathian Math. Publ., **9**, № 1, 13 – 21 (2017).
10. I. Bilanyk, D. Bodnar, L. Buyak, *Representation of a quotient of solutions of a four-term linear recurrence relation in the form of a branched continued fraction*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 1, 33 – 41 (2019).
11. D. I. Bodnar, I. B. Bilanyk, *Parabolic convergence regions of branched continued fractions of the special form*, Carpathian Math. Publ., **13**, № 3, 619 – 630 (2021).
12. R. I. Dmytryshyn, *Convergence of some branched continued fractions with independent variables*, Mat. Stud., **47**, № 2, 150 – 159 (2017).
13. R. I. Dmytryshyn, *Multidimensional regular C-fraction with independent variables corresponding to formal multiple power series*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1 – 18 (2019); DOI:10.1017/prm.2019.2.
14. R. I. Dmytryshyn, *On some of convergence domains of multidimensional S-fractions with independent variables*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 1, 54 – 58 (2019).
15. R. I. Dmytryshyn, S. V. Sharyn, *Approximation of functions of several variables by multidimensional S-fractions with independent variables*, Carpathian Math. Publ., **13**, № 3, 592 – 607 (2019).
16. W. B. Gragg, D. D. Warner, *Two constructive results in continued fractions*, SIAM J. Numer. Anal., **20**, № 3, 1187 – 1197 (1983).
17. W. B. Jones, W. J. Thron, *Continued fractions: analytic theory and applications*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass. (1980).
18. W. B. Jones, W. J. Thron, *Convergence of continued fractions*, Canad. J. Math., **20**, 1037 – 1055 (1968).
19. W. J. Thron, *Two families of twin convergence regions for continued fractions*, Duke Math. J., **10**, № 4, 677 – 685 (1943).
20. H. S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York (1948).

Одержано 10.01.22