

Сергій Чуйко¹, Ольга Нєсмєлова (Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ Донецької обл.; Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.)

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ РЕЛЕЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНОГО ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

We establish constructive necessary and sufficient conditions for the solvability and propose a scheme for the construction of solutions to a nonautonomous nonlinear periodic boundary-value problem for a Rayleigh-type equation unsolved with respect to the derivative. The urgency of studying nonautonomous boundary-value problems, unsolved with respect to the derivative is explained by the fact that the investigation of traditional problems resolved with respect to the derivative is sometimes complicated, e.g., in the case of nonlinearities that are not integrable in elementary functions. We consider the critical case in which the equation for generating amplitudes of a weakly nonlinear periodic boundary-value problem for a Rayleigh-type equation does not turn into the identity. The least-squares method is used to find constructive conditions for the solvability and obtain convergent iterative schemes for constructing approximate solutions to a nonautonomous nonlinear boundary-value problem unsolved with respect to the derivative. As an example of application of the proposed iterative scheme, we find approximations to the solutions of periodic boundary-value problems unsolved with respect to the derivative for the case of periodic problem for the equation used to describe the motion of a satellite on the elliptic orbit. We obtain an estimate for the range of values of a small parameter for which the iterative procedure of construction of the solutions to a weakly nonlinear periodic boundary-value problem for a Rayleigh-type equation unsolved with respect to the derivative is convergent. To check the accuracy of the presented approximations, we evaluate the discrepancies in the equation used to model the motion of satellites along the elliptic orbit.

Знайдено конструктивні необхідні та достатні умови розв'язності і схему побудови розв'язків неавтономної нелінійної періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної. Актуальність дослідження неавтономних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної, пов'язана з тим, що вивчення традиційних задач, розв'язаних відносно похідної, іноді ускладнюється, наприклад у випадку отримання нелінійностей, не інтегрованих в елементарних функціях. У статті розглянуто критичний випадок, коли рівняння для породжуючих амплітуд слабконелінійної періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея не перетворюється на тотожність. Для знаходження конструктивних умов розв'язності та збіжних ітераційних схем побудови наближених розв'язків неавтономної нелінійної крайової задачі, не розв'язаної відносно похідної, використано метод найменших квадратів. Як приклад застосування запропонованої ітераційної схеми знайдено наближення до розв'язків періодичних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної, у випадку періодичної задачі для рівняння, яке моделює рух супутника на еліптичній орбіті. Знайдено оцінку проміжку значень малого параметра, для якого збіжність ітераційної процедури для побудови розв'язків слабконелінійної періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної, є збіжною. Для перевірки точності знайдених наближень оцінено нев'язки у рівнянні, яке моделює рух супутника на еліптичній орбіті.

1. Постановка задачі. Будемо досліджувати задачу про побудову розв'язків T -періодичної задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно старшої похідної [1, с. 177],

$$y'' = f(t) + \varepsilon Y(y, y', y'', t, \varepsilon). \quad (1)$$

Тут $Y(y, y', y'', t, \varepsilon)$ — нелінійна скалярна функція, двічі неперервно диференційовна за невідомою y та її похідною y' , а також y'' в малому околі розв'язку породжуючої задачі, неперервна по t на відрізку $[a, b]$ та неперервно диференційовна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Поставлену задачу було досліджено у статтях [2, 3]. Актуальність вивчення періодичної задачі для рівняння типу Релея (1), не розв'язаного відносно старшої похідної, пов'язана з тим фактом, що дослідження традиційної задачі [4], розв'язаної відносно похідної, буває, ускладнюється,

¹ Відповідальний за листування, e-mail: chujko-slav@ukr.net.

наприклад у випадку нелінійностей, не інтегровних в елементарних функціях. Приклад подібної ситуації наведено у статтях [2, 5]. Крім того, прикладами подібної ситуації можуть бути автономна крайова задача, не розв'язана відносно похідної, зокрема періодична задача для рівняння Лотки – Вольтерра [6], і періодична задача для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті [2, 5, 7, 8].

У статті [3], використовуючи метод Ньютона – Канторовича [9, 10], знайдено наближення до розв'язків періодичних крайових задач для рівнянь типу Релея (1), не розв'язаних відносно похідної. У випадку періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті, метод Ньютона – Канторовича спричиняв неабиякі труднощі, тому метою даної статті є побудова розв'язків нелінійної періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної, на основі методу найменших квадратів [11, 12].

2. Побудова ітераційної схеми. Породжуюча T -періодична задача для рівняння типу Релея (1), не розв'язаного відносно старшої похідної,

$$y_0'' = f(t), \quad y_0(0) - y_0(T) = 0, \quad y_0'(0) - y_0'(T) = 0$$

є критичною [4]. Припустимо, що породжуюча T -періодична задача розв'язна. Для цього необхідно і достатньо виконання умови

$$\int_0^T f(t) dt = 0.$$

Якщо ця вимога виконується, розв'язок породжуючої задачі має вигляд

$$y_0(t, c_0) = c_0 + g[f(s)](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1,$$

де [3]

$$g[f(s)](t) := k[f(s)](t) - \frac{t}{T} \int_0^T (T-s)f(s) ds$$

— оператор Гріна породжуючої T -періодичної задачі, а

$$k[f(s)](t) := \int_0^t (t-s)f(s) ds$$

— оператор Гріна задачі Коші. Періодичні розв'язки рівняння типу Релея

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$$

шукатимемо в околі розв'язку $y_0(t, c_0)$ лінійної частини цього рівняння. Для знаходження збурення $x(t, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0; T]$ отримуємо T -періодичну задачу для рівняння

$$x''(t, \varepsilon) = \varepsilon Y(y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon), y_0'(t, c_0) + x'(t, \varepsilon), y_0''(t, c_0) + x''(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (2)$$

розв'язну тоді й лише тоді, коли

$$\int_0^T Y(y(t, \varepsilon), y'(t, \varepsilon), y''(t, \varepsilon), t, \varepsilon) dt = 0. \quad (3)$$

Припустимо, що рівняння для породжуючих амплітуд у випадку T -періодичної задачі для рівняння типу Релея

$$F(c_0) := \int_0^T Y(y_0(t, c_0), y'_0(t, c_0), y''_0(t, c_0), t, 0) dt = 0$$

має простий $B_0 := F'(c_0^*) \neq 0$ дійсний корінь $c_0^* \in \mathbb{R}^1$. За цих умов рівняння типу Релея (1) має єдиний періодичний розв'язок [3]. Для знаходження цього розв'язку можна скористатися методом Ляпунова – Пуанкаре [13], але більш ефективним є використання методу найменших квадратів [11, 12]. У малому околі породжуючого розв'язку $y_0(t, c_0^*)$ має місце розвинення

$$\begin{aligned} & Y(y_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), y'_0(t, c_0^*) + x'(t, \varepsilon), y''_0(t, c_0^*) + x''(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \\ &= Y(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), t, 0) + \varepsilon A_0(t) + A_1(t)x(t, \varepsilon) + A_2(t)x'(t, \varepsilon) \\ &+ A_3(t)x''(t, \varepsilon) + R_1(y_0(t, c_0^*) + x(t, \varepsilon), y'_0(t, c_0^*) + x'(t, \varepsilon), y''_0(t, c_0^*) + x''(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_0(t) &:= Y'_\varepsilon(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), 0), \\ A_1(t) &:= Y'_y(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), 0), \\ A_2(t) &:= Y'_{y'}(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), 0), \\ A_3(t) &:= Y'_{y''}(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), 0). \end{aligned}$$

Нехай

$$\varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \dots, \varphi^{(k)}(t), \dots, k \in \mathbb{N},$$

— система лінійно незалежних T -періодичних неперервно диференційовних скалярних функцій. Позначимо $(1 \times p_1)$ -вимірну матрицю

$$\varphi_1(t) = [\varphi^{(1)}(t) \ \varphi^{(2)}(t) \ \dots \ \varphi^{(p_1)}(t)], \quad p_1 \in \mathbb{N}.$$

Перше наближення до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2)

$$x_1(t, \varepsilon) := \xi_1(t, \varepsilon) := \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{p_1},$$

шукатимемо, як розв'язок T -періодичної задачі для рівняння

$$\begin{aligned} x''_1(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left[Y(y_0(t, c_0^*), y'_0(t, c_0^*), y''_0(t, c_0^*), t, 0) + \varepsilon A_0(t) \right. \\ &\quad \left. + A_1(t)x_1(t, \varepsilon) + A_2(t)x'_1(t, \varepsilon) + A_3(t)x''_1(t, \varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Взагалі кажучи, перше наближення

$$\xi_1(t, \varepsilon) = \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) = [\gamma_1^{(1)}(\varepsilon) \quad \gamma_1^{(2)}(\varepsilon) \quad \dots \quad \gamma_1^{(p_1)}(\varepsilon)]^*,$$

не є розв'язком T -періодичної задачі для рівняння (4), тому вимагатимемо, щоб

$$F(\gamma_1(\varepsilon)) := \left\| [1 - \varepsilon A_2(t)] \xi_1'(t, \varepsilon) - [A(t) + \varepsilon A_1(t)] \xi_1(t, \varepsilon) - \varepsilon A_3(t) \xi_1''(t, \varepsilon) - \varepsilon Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) - \varepsilon^2 A_0(t) \right\|_{\mathbb{L}^2[0, T]}^2 \rightarrow \min$$

для фіксованої матриці $\varphi_1(t)$. Необхідна умова мінімізації функції $F(\gamma_1(\varepsilon))$ приводить до рівняння

$$\Gamma(\varphi_1(\cdot)) \gamma_1(\varepsilon) = \varepsilon \int_0^T \Phi_1^*(t, \varepsilon) (Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) + \varepsilon A_3(t)) dt,$$

однозначно розв'язного відносно вектора $\gamma_1(\varepsilon)$ за умови невиродженості $(p_1 \times p_1)$ -матриці Грама [11, 12]

$$\Gamma(\varphi_1(\cdot)) = \int_0^T \Phi_1^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_1(t, \varepsilon) dt,$$

де

$$\Phi_1(t, \varepsilon) := [1 - \varepsilon A_3(t)] \varphi_1''(t) - \varepsilon [A_1(t) \varphi_1(t) + A_2(t) \varphi_1'(t)].$$

Таким чином, за умови

$$\det \Gamma(\varphi_1(\cdot)) \neq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0 \quad (5)$$

знаходимо вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = \varepsilon \Gamma^{-1}(\varphi_1(\cdot)) \int_0^T \Phi_1^*(t, \varepsilon) (Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) + \varepsilon A_3(t)) dt,$$

який однозначно визначає перше наближення

$$x_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) \approx \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon)$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2) і, відповідно, перше наближення

$$z_1(t, \varepsilon) = z_0(t, c_0^*) + x_1(t, \varepsilon)$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (1), найкраще у сенсі найменших квадратів. Умова (5) є необхідною умовою мінімізації величини нев'язки $F(\gamma_1(\varepsilon))$; достатню умову мінімізації величини нев'язки $F(\gamma_1(\varepsilon))$ забезпечує додатна визначеність матриці Грама $\Gamma(\varphi_1(\cdot))$. У свою чергу, додатну визначеність суми матриці Грама $\Gamma(\varphi_1(\cdot))$ забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників усіх квадратних діагональних мінорів останньої матриці [14].

Позначимо $(1 \times p_2)$ -вимірну матрицю

$$\varphi_2(t) = [\varphi^{(1)}(t) \ \varphi^{(2)}(t) \ \dots \ \varphi^{(p_2)}(t)], \quad p_2 \in \mathbb{N}.$$

Друге наближення до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2) шукатимемо у вигляді

$$x_2(t, \varepsilon) := \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) := \varphi_2(t) \gamma_2(\varepsilon).$$

У малому околі першого наближення $y_1(t, \varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі T -періодичної задачі для рівняння (2) має місце розвинення

$$\begin{aligned} & Y(y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon) + \xi_2'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon) + \xi_2''(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \\ &= Y(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), t, 0) + \varepsilon \mathcal{A}_0^{(1)}(t) + \mathcal{A}_1^{(1)}(t) \xi_2(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_2^{(1)}(t) \xi_2'(t, \varepsilon) \\ &+ \mathcal{A}_3^{(1)}(t) \xi_2''(t, \varepsilon) + R_1(y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon) + \xi_2'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon) + \xi_2''(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{(1)}(t) &:= Y'_\varepsilon(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), 0), \\ \mathcal{A}_1^{(1)}(t) &:= Y'_y(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), 0), \\ \mathcal{A}_2^{(1)}(t) &:= Y'_{y'}(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), 0), \\ \mathcal{A}_3^{(1)}(t) &:= Y'_{y''}(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), 0). \end{aligned}$$

Друге наближення до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2) $x_2(t, \varepsilon)$ шукатимемо, як розв'язок T -періодичної задачі для рівняння

$$\begin{aligned} x_2''(t, \varepsilon) &= \varepsilon [Y(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), t, 0) + \varepsilon \mathcal{A}_0^{(1)}(t) \\ &+ \mathcal{A}_1^{(1)}(t) \xi_2(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_2^{(1)}(t) \xi_2'(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_3^{(1)}(t) \xi_2''(t, \varepsilon)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Вимагатимемо, щоб

$$\begin{aligned} F(\gamma_2(\varepsilon)) &:= \|Y(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), t, 0) + \varepsilon \mathcal{A}_0^{(1)}(t) + \mathcal{A}_1^{(1)}(t) \xi_2(t, \varepsilon) \\ &+ \mathcal{A}_2^{(1)}(t) \xi_2'(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_3^{(1)}(t) \xi_2''(t, \varepsilon) - Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) \\ &- A_1(t) \xi_1(t, \varepsilon) - A_2(t) \xi_1'(t, \varepsilon) - A_3(t) \xi_1''(t, \varepsilon)\|_{\mathbb{L}^2[0, T]}^2 \rightarrow \min \end{aligned}$$

для фіксованої матриці $\varphi_2(t)$. Необхідна умова мінімізації функції $F(\gamma_2(\varepsilon))$ приводить до рівняння

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_2(\cdot)) \gamma_2(\varepsilon) &= \varepsilon \int_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) (Y(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), t, 0) \\ &- Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) \end{aligned}$$

$$-A_1(t)\xi_1(t, \varepsilon) - A_2(t)\xi_1'(t, \varepsilon) - A_3(t)\xi_1''(t, \varepsilon) dt,$$

однозначно розв'язного відносно вектора $\gamma_2(\varepsilon)$ за умови невиродженості $(p_2 \times p_2)$ -матриці Грама [11, 12]

$$\Gamma(\varphi_2(\cdot)) = \int_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) \cdot \Phi_2(t, \varepsilon) dt,$$

де

$$\Phi_2(t, \varepsilon) := [1 - \varepsilon \mathcal{A}_3^{(1)}(t)] \varphi_2''(t) - \varepsilon [\mathcal{A}_1^{(1)}(t) \varphi_2(t) + \mathcal{A}_2^{(1)}(t) \varphi_2'(t)].$$

Таким чином, за умови

$$\det \Gamma(\varphi_2(\cdot)) \neq 0, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0 \quad (7)$$

знаходимо вектор

$$\begin{aligned} \gamma_2(\varepsilon) = \varepsilon \Gamma^{-1}(\varphi_2(\cdot)) \int_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) (Y(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), t, 0) \\ - Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) - A_1(t)\xi_1(t, \varepsilon) - A_2(t)\xi_1'(t, \varepsilon) - A_3(t)\xi_1''(t, \varepsilon)) dt, \end{aligned}$$

який однозначно визначає друге наближення

$$x_2(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) \approx \varphi_2(t) \gamma_2(\varepsilon),$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2) і, відповідно, друге наближення

$$y_2(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x_2(t, \varepsilon)$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (1), найкраще у сенсі найменших квадратів. Умова (7) є необхідною умовою мінімізації величини нев'язки $F(\gamma_2(\varepsilon))$; достатню умову мінімізації величини нев'язки $F(\gamma_2(\varepsilon))$ забезпечує додатна визначеність матриці Грама $\Gamma(\varphi_2(\cdot))$. У свою чергу, додатну визначеність суми матриці Грама $\Gamma(\varphi_2(\cdot))$ забезпечує виконання критерію Сильвестра, а саме, додатність визначників усіх квадратних діагональних мінорів останньої матриці [14]. Позначимо $(1 \times p_{k+1})$ -вимірну матрицю

$$\varphi_{k+1}(t) = [\varphi^{(1)}(t) \quad \varphi^{(2)}(t) \quad \dots \quad \varphi^{(p_{k+1})}(t)], \quad p_{k+1} \in \mathbb{N}.$$

Припустимо далі, що знайдено $(k+1)$ -ше наближення

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{k+1}(t, \varepsilon), \quad \xi_{k+1}(t, \varepsilon) \approx \varphi_{k+1}(t) \gamma_{k+1}(\varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots,$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2) і, відповідно, $(k+1)$ -ше наближення

$$y_{k+1}(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x_{k+1}(t, \varepsilon)$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (1), найкраще у сенсі найменших квадратів. Наступне, $(k+2)$ -е, наближення до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2) шукаємо у вигляді

$$x_{k+2}(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{k+2}(t, \varepsilon), \quad \xi_{k+2}(t, \varepsilon) \approx \varphi_{k+2}(t) \gamma_{k+2}(\varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots$$

У малому околі наближення $y_{k+1}(t, \varepsilon)$ до розв'язку крайової задачі T -періодичної задачі для рівняння (2) має місце розвинення

$$\begin{aligned} & Y(y_{k+1}(t, \varepsilon) + \xi_{k+2}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon) + \xi'_{k+2}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon) + \xi''_{k+2}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \\ &= Y(y_{k+1}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon), t, 0) + \mathcal{A}_1^{(k+1)}(t) \xi_{k+2}(t, \varepsilon) \\ &+ \varepsilon \mathcal{A}_0^{(k+1)}(t) + \mathcal{A}_2^{(k+1)}(t) \xi'_{k+2}(t, \varepsilon) + \mathcal{A}_3^{(k+1)}(t) \xi''_{k+2}(t, \varepsilon) \\ &+ R_1(y_{k+1}(t, \varepsilon) + \xi_{k+2}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon) + \xi'_{k+2}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon) + \xi''_{k+2}(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^{(k+1)}(t) &:= Y'_\varepsilon(y_{k+1}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon), 0), \\ \mathcal{A}_1^{(k+1)}(t) &:= Y'_y(y_{k+1}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon), 0), \\ \mathcal{A}_2^{(k+1)}(t) &:= Y'_{y'}(y_{k+1}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon), 0), \\ \mathcal{A}_3^{(k+1)}(t) &:= Y'_{y''}(y_{k+1}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon), 0). \end{aligned}$$

За умови

$$\det \Gamma(\varphi_{k+2}(\cdot)) \neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0 \quad (8)$$

знаходимо вектор

$$\begin{aligned} \gamma_{k+2}(\varepsilon) &= \varepsilon \Gamma^{-1}(\varphi_{k+2}(\cdot)) \int_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) (Y(y_{k+1}(t, \varepsilon), y'_{k+1}(t, \varepsilon), y''_{k+1}(t, \varepsilon), t, 0) \\ &- Y(y_k(t, c_0^*), y'_k(t, c_0^*), y''_k(t, c_0^*), t, 0) - \mathcal{A}_1^{(k+1)}(t) \xi_{k+1}(t, \varepsilon) \\ &- \mathcal{A}_2^{(k+1)}(t) \xi'_{k+1}(t, \varepsilon) - \mathcal{A}_3^{(k+1)}(t) \xi''_{k+1}(t, \varepsilon)) dt, \end{aligned}$$

який однозначно визначає наближення

$$x_{k+2}(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{k+2}(t, \varepsilon), \quad \xi_{k+2}(t, \varepsilon) \approx \varphi_{k+2}(t) \gamma_{k+2}(\varepsilon),$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (2) і, відповідно, наближення

$$y_{k+2}(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x_{k+2}(t, \varepsilon)$$

до розв'язку T -періодичної задачі для рівняння (1), найкраще у сенсі найменших квадратів. Отже, доведено таке твердження.

Теорема 1. Для T -періодичної задачі для рівняння (1), не розв'язаного відносно похідної, має місце критичний ($P_{Q^*} \neq 0$) випадок. Припустимо, що при цьому виконується умова

$$\int_0^T f(t) dt = 0$$

розв'язності породжуючої задачі. Припустимо також, що рівняння для породжуючих амплітуд $F(c_0)$ не перетворюється на тотожність і має дійсні розв'язки. Тоді для кожного кореня $c_0^* \in \mathbb{R}$ рівняння для породжуючих амплітуд T -періодична задача для рівняння (1), не розв'язаного відносно похідної, має принаймні один розв'язок

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T], \quad y(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0],$$

який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий

$$y_0(t, c_0^*) = c_0^* + G[f(s); \alpha](t).$$

За умови (8), у випадку додатної визначеності матриці Грама $\Gamma(\varphi_{k+2}(\cdot))$, найкращий у сенсі найменших квадратів розв'язок T -періодичної задачі для рівняння (1), не розв'язаного відносно похідної, можна визначити за допомогою збіжного для $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \leq \varepsilon_0$ ітераційного процесу

$$\begin{aligned} y_1(t, \varepsilon) &= y_0(t, c_0^*) + x_1(t, \varepsilon), \quad x_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) \approx \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon), \\ \gamma_1(\varepsilon) &= \varepsilon \Gamma^{-1}(\varphi_1(\cdot)) \int_0^T \Phi_1^*(t, \varepsilon) (Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) + \varepsilon A_3(t)) dt, \\ y_2(t, \varepsilon) &= y_0(t, c_0^*) + x_2(t, \varepsilon), \quad x_2(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) \approx \varphi_2(t) \gamma_2(\varepsilon), \\ \gamma_2(\varepsilon) &= \varepsilon \Gamma^{-1}(\varphi_2(\cdot)) \int_0^T \Phi_2^*(t, \varepsilon) (Y(y_1(t, \varepsilon), y_1'(t, \varepsilon), y_1''(t, \varepsilon), t, 0) \\ &\quad - Y(y_0(t, c_0^*), y_0'(t, c_0^*), y_0''(t, c_0^*), t, 0) - A_1(t) \xi_1(t, \varepsilon) \\ &\quad - A_2(t) \xi_1'(t, \varepsilon) - A_3(t) \xi_1''(t, \varepsilon)) dt, \dots, \\ x_{k+1}(t, \varepsilon) &= \xi_1(t, \varepsilon) + \dots + \xi_{k+1}(t, \varepsilon), \quad \xi_{k+1}(t, \varepsilon) \approx \varphi_{k+1}(t) \gamma_{k+1}(\varepsilon), \\ \gamma_{k+2}(\varepsilon) &= \varepsilon \Gamma^{-1}(\varphi_{k+2}(\cdot)) \int_0^T \Phi_{k+2}^*(t, \varepsilon) (Y(y_{k+1}(t, \varepsilon), y_{k+1}'(t, \varepsilon), y_{k+1}''(t, \varepsilon), t, 0) \\ &\quad - Y(y_k(t, c_0^*), y_k'(t, c_0^*), y_k''(t, c_0^*), t, 0) - \mathcal{A}_1^{(k+1)}(t) \xi_{k+1}(t, \varepsilon) \\ &\quad - \mathcal{A}_2^{(k+1)}(t) \xi_{k+1}'(t, \varepsilon) - \mathcal{A}_3^{(k+1)}(t) \xi_{k+1}''(t, \varepsilon)) dt, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{9}$$

Застосуємо знайдені умови розв'язності T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (1), не розв'язаного відносно похідної, до 2π -періодичної крайової задачі для рівняння, яке визначає рух супутника [2, 5, 7, 8].

Приклад. Умови доведеної теореми справджуються у випадку 2π -періодичної крайової задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті

$$y'' = \varepsilon Y(y, y', y'', t, \varepsilon), \quad (10)$$

де, зокрема,

$$Y(y, y', y'', t, \varepsilon) := 4 \sin t - \sin y + 2 y' \sin t - y'' \cos t.$$

Рівняння породжуючих амплітуд у випадку T -періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея (1), не розв'язаного відносно похідної, має простий $B_0 = -2\pi \neq 0$ дійсний корінь $c_0^* = 0$. Періодичні розв'язки рівняння типу Релея (10), не розв'язаного відносно похідної,

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$$

будемо шукати в околі періодичного розв'язку $y_0(t, c_0) \equiv 0$ лінійної частини цього рівняння. Покладемо

$$\varphi_1(t) := (\sin t \quad \sin 2t \quad \sin 3t \quad \sin 4t \quad \sin 5t).$$

Умова (5)

$$\begin{aligned} \det \Gamma(\varphi_1(\cdot)) = & \frac{1}{4} (829\,440\,000 \pi^5 - 2\,427\,955\,200 \pi^5 \varepsilon \\ & + 2\,068\,592\,704 \pi^5 \varepsilon^2 + 151\,406\,560 \pi^5 \varepsilon^3 - 742\,340\,524 \pi^5 \varepsilon^4 - 243\,840\,944 \pi^5 \varepsilon^5 \\ & + 669\,206\,101 \pi^5 \varepsilon^6 - 511\,022\,908 \pi^5 \varepsilon^7 + 446\,869\,246 \pi^5 \varepsilon^8 - 415\,637\,060 \pi^5 \varepsilon^9 \\ & + 532\,492\,025 \pi^5 \varepsilon^{10}) \neq 0 \end{aligned}$$

при цьому виконується, до того ж матриця Грама $\Gamma(\varphi_1(\cdot))$ додатно визначена при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \approx 0,66$. Таким чином, однозначно знаходимо вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) \approx \begin{pmatrix} -4\varepsilon - 4\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 - 4\varepsilon^4 - 4\varepsilon^5 \\ \frac{3\varepsilon^2}{2} + \frac{15\varepsilon^3}{8} + \frac{71\varepsilon^4}{32} + \frac{2759\varepsilon^5}{1152} \\ -\frac{2\varepsilon^3}{3} - \frac{49\varepsilon^4}{54} - \frac{2383\varepsilon^5}{1944} \\ \frac{5\varepsilon^4}{16} + \frac{1025\varepsilon^5}{2304} \\ -\frac{3\varepsilon^5}{20} \end{pmatrix},$$

який визначає перше наближення

$$y_1(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0^*) + x_1(t, \varepsilon), \quad x_1(t, \varepsilon) = \xi_1(t, \varepsilon) \approx \varphi_1(t) \gamma_1(\varepsilon),$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Релея (10). Покладемо

$$\varphi_2(t) := (\sin t \quad \sin 2t \quad \sin 3t \quad \sin 4t \quad \sin 5t).$$

Умова (7)

$$\det \Gamma(\varphi_2(\cdot)) = 207\,360\,000\pi^5 - 606\,988\,800\pi^5\varepsilon + 517\,148\,176\pi^5\varepsilon^2 \\ + 3\,295\,246\,840\pi^5\varepsilon^3 - 584\,300\,139\pi^5\varepsilon^4 - 3\,840\,360\,428\pi^5\varepsilon^5 + \dots \neq 0$$

при цьому виконується, до того ж матриця Грама $\Gamma(\varphi_2(\cdot))$ додатно визначена при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_* \approx 0,66$. Таким чином, однозначно знаходимо вектор

$$\gamma_2(\varepsilon) \approx \begin{pmatrix} 8\varepsilon^4 + 32\varepsilon^5 + \frac{907\varepsilon^6}{12} \\ -\frac{79\varepsilon^5}{18} - \frac{5711\varepsilon^6}{324} \\ -\frac{8\varepsilon^4}{27} - \frac{224\varepsilon^5}{243} + \frac{11249\varepsilon^6}{17496} \\ \frac{47\varepsilon^5}{144} + \frac{22019\varepsilon^6}{20736} \\ -\frac{829\varepsilon^6}{3000} \end{pmatrix},$$

який визначає друге наближення

$$y_2(t, \varepsilon) = y_1(t, \varepsilon) + \xi_2(t, \varepsilon), \quad \xi_2(t, \varepsilon) \approx \varphi_2(t)\gamma_2(\varepsilon),$$

до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Релея (10). Точність наближень до розв'язку періодичної задачі для рівняння типу Релея (10), не розв'язного відносно старшої похідної, знайдених за допомогою ітераційної схеми (9), характеризують нев'язки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \|y_k''(t, \varepsilon) - \varepsilon Y(y_k(t, \varepsilon), y_k'(t, \varepsilon), y_k''(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 1, 2.$$

Зокрема,

$$\Delta_0(0, 1) \approx 0,4, \quad \Delta_1(0, 1) \approx 0,00145229, \quad \Delta_2(0, 1) \approx 0,0000382059,$$

а також

$$\Delta_0(0, 01) \approx 0,04, \quad \Delta_1(0, 01) \approx 1,09929 \times 10^{-7}, \quad \Delta_2(0, 01) \approx 3,82059 \times 10^{-11}.$$

Порівняємо знайдені нульове і перші два наближення до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (10) з нульовим $y_{0n}(t, c_0^*) = y_0(t, c_0^*) = 0$ та першими двома наближеннями до періодичного розв'язку рівняння типу Релея (10), знайденими за допомогою методу Ньютона–Канторовича у статті [3],

$$\delta_{kn}(\varepsilon) = \|y_{kn}''(t, \varepsilon) - \varepsilon Y(y_{kn}(t, \varepsilon), y_{kn}'(t, \varepsilon), y_{kn}''(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\|_{\mathbb{C}[0;2\pi]}, \quad k = 1, 2.$$

Зокрема,

$$\Delta_{0n}(0, 1) \approx 0,4, \quad \Delta_{1n}(0, 1) \approx 0,000892783, \quad \Delta_{2n}(0, 1) \approx 0,0149468,$$

а також

$$\Delta_{0n}(0, 01) \approx 0, 04, \quad \Delta_{1n}(0, 01) \approx 0, 000\,897\,698, \quad \Delta_{2n}(0, 01) \approx 0, 0000\,152\,203.$$

Запропонована у статті оцінка довжини проміжку $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$, на якому зберігається додатна визначеність матриць Грама $\Gamma(\varphi_1(\cdot))$ і $\Gamma(\varphi_2(\cdot))$, суттєво відрізняється від оцінки довжини проміжку, на якому зберігається збіжність відповідної ітераційної схеми [15]. Запропонована у статті схема побудови розв'язків нелінійної періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної, може бути перенесена на нелінійні матричні крайові задачі [16], у тому числі із запізненням [17].

На відміну від численних досліджень різноманітних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної [18–20], статтю присвячено побудові розв'язків нелінійної крайової задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної, а не отриманню умов розв'язності крайових задач, не розв'язаних відносно похідної. Тому запропонована у статті схема побудови розв'язків нелінійної періодичної крайової задачі для рівняння типу Релея, не розв'язаного відносно похідної, продовжує наші дослідження періодичної крайової задачі для рівняння типу Дюффінга, не розв'язаного відносно похідної [21], а також дослідження, виконані під керівництвом академіка НАН України Анатолія Михайловича Самойленка [3]. Вважаємо перспективним перенесення отриманих у статті результатів на нормально розв'язні крайові задачі, в тому числі в абстрактних просторах [22, 23].

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Факториал, Москва (1997).
2. Ю. Д. Шлапак, *О периодических решениях нелинейных уравнений второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной*, Укр. мат. журн., **26**, № 6, 850–854 (1974).
3. A. M. Samoilenko, S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova, *Nonlinear boundary-value problems unsolved with respect to the derivative*, Ukr. Math. J., **72**, № 8, 1280–1293 (2021).
4. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin, Boston (2016).
5. А. П. Торжевский, *Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите*, Космические исслед., **2**, № 5, 667–678 (1964).
6. S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova (Starkova), *Autonomous Noether boundary-value problems not solved with respect to the derivative*, J. Math. Sci., **230**, № 5, 799–803 (2018).
7. D. Nucez, P. J. Torres, *Stable odd solutions of some periodic equations modeling satellite motion*, J. Math. Anal., **279**, № 2, 700–709 (2003).
8. A. Cabada, A. J. A. Cid, *On a class of singular Sturm–Liouville periodic boundary value problems*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **12**, № 4, 2378–2384 (2011).
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, Москва (1977).
10. S. M. Chuiko, *To the generalization of the Newton–Kantorovich theorem*, Visnyk V. N. Karazin Kharkiv Nat. Univ. Ser. Math., Appl. Math. and Mech., **85**, № 1, 62–68 (2017).
11. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, Москва (1965).
12. S. M. Chuiko, *On approximate solution of boundary value problems by the least square method*, Nonlinear Oscillations, **11**, № 4, 585–604 (2008).
13. И. Г. Малкин, *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1956).
14. G. T. Gilbert, *Positive definite matrices and Sylvester's criterion*, Amer. Math. Monthly, **98**, № 1, 44–46 (1991).

15. S. M. Chuiko, *Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem*, Nonlinear Oscillations, **9**, № 3, 405–422 (2006).
16. S. Chuiko, *Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation*, Miskolc Math. Notes, **17**, № 1, 139–150 (2016).
17. S. M. Chuiko, A. S. Chuiko, *On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case*, Nonlinear Oscillations, **14**, № 3, P. 445–460 (2012).
18. Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно производной*, Научная книга, Новосибирск (1998).
19. A. F. Filippov, *Uniqueness of the solution of a system of differential equations unsolved for the derivatives*, Different. Equat., **41**, № 1, 90–95 (2005).
20. A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, *On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative*, Different. Equat., **47**, № 11, 1541–1555 (2011).
21. С. М. Чуйко, О. В. Старкова, О. Е. Пирус, *Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной*, Динам. системы, **2(30)**, № 1-2, 169–186 (2012).
22. A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, *Perturbation theory of operator equations in the Frechet and Hilbert spaces*, Ukr. Math. J., **67**, № 6, 1327–1335 (2016).
23. О. А. Бойчук, О. А. Покутний, *Нормально-розв'язні крайові задачі для операторно-диференціальних рівнянь*, Наук. думка, Київ (2022).

Одержано 31.10.22