

Владислав Бабенко (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара),**Віра Бабенко** (Університет Дрейка, Де-Мойн, США),**Олег Коваленко, Наталія Парфінович**¹ (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара)**ДЕЯКІ ТОЧНІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ ЛАНДАУ – КОЛМОГОРОВА – НАДЯ
У ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ**

For a function f from the Sobolev space $W^{1,p}(C)$, where $C \subset \mathbb{R}^d$ is an open convex cone, we establish a sharp inequality estimating $\|f\|_{L_\infty}$ via the L_p -norm of its gradient and a seminorm of the function. With the help of this inequality, we prove a sharp inequality estimating the L_∞ -norm of the Radon–Nikodym derivative of a charge defined on Lebesgue measurable subsets of C via the L_p -norm of the gradient of this derivative and the seminorm of the charge. In the case where $C = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \leq m \leq d$, we obtain inequalities estimating the L_∞ -norm of a mixed derivative of the function $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ via its L_∞ -norm and the L_p -norm of the gradient of mixed derivative of this function.

Для функцій f простору Соболева $W^{1,p}(C)$ ($C \subset \mathbb{R}^d$ — відкритий опуклий конус) отримано точну нерівність, яка оцінює $\|f\|_{L_\infty}$ через L_p -норму її градієнта і деяку її напівнорму. За допомогою цієї нерівності доведено точну нерівність, яка оцінює L_∞ -норму похідної Радона–Нікодима заряду, означеного на вимірних за Лебегом підмножинах C , через L_p -норму градієнта цієї похідної та значення на ньому деякої напівнорми. У випадку $C = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \leq m \leq d$, отримано нерівності, які оцінюють L_∞ -норму мішаної похідної функції $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ через L_∞ -норму функції та L_p -норму градієнта її мішаної похідної.

1. Вступ. Нерівності для норм проміжних похідних функцій однієї або багатьох змінних відіграють важливу роль у багатьох галузях аналізу та його застосуваннях. Особливу увагу привертають точні нерівності такого роду, серед яких нерівності Ландау [1], Колмогорова [2] та Надя [3] є одними з найяскравіших. Огляд відомих результатів та подальші посилання можна знайти в [4, 5]. Нерівності для похідних Радона–Нікодима зарядів, визначених на вимірних за Лебегом підмножинах відкритого конуса $C \subset \mathbb{R}^d$, а також зарядів, визначених на вимірних підмножинах метричного простору з мірою, отримано в [6, 7].

У цій роботі для функцій f простору Соболева $W^{1,p}(C)$ ($C \subset \mathbb{R}^d$ — відкритий конус) отримано точну нерівність типу Надя, яка оцінює $\|f\|_{L_\infty(C)}$ через $L_p(C)$ -норму її градієнта і деяку її напівнорму. За допомогою цієї нерівності доведено точну нерівність типу Ландау – Колмогорова, яка оцінює $L_\infty(C)$ -норму похідної Радона–Нікодима заряду, означеного на вимірних підмножинах C , через $L_p(C)$ -норму градієнта цієї похідної та значення на заряді деякої напівнорми. У випадку $C = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^{d-m}$, $0 \leq m \leq d$, отримано нерівності, які оцінюють $L_\infty(C)$ -норму мішаної похідної функції $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ через $L_\infty(C)$ -норму функції та $L_p(C)$ -норму градієнта її мішаної похідної, точні для $m = 0, 1$. Насамкінець обговорено деякі застосування одержаних результатів.

2. Позначення і деякі допоміжні результати. Для $x, y \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, позначимо через (x, y) скалярний добуток x та y . Нехай $K \subset \mathbb{R}^d$ — відкрита опукла симетрична щодо θ обмежена множина з $\theta \in \text{int } K$. Для $x \in \mathbb{R}^d$ позначимо через $|x|_K$ норму елемента x , що породжена множиною K , тобто $|x|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$. Нехай також $|z|_{K^\circ} = \sup\{(x, z) : |x|_K \leq 1\}$ — спряжена норма. Скрізь далі $C \subset \mathbb{R}^d$ — відкритий опуклий конус, μ — міра Лебега в C і $p' = p/(p-1)$ для $p \geq 1$.

¹ Відповідальна за листування, e-mail: parfinovich@mmf.dnulive.dp.ua.

Для вимірної множини $Q \subset C$ через $L_p(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простори вимірних функцій $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\|\cdot\|_{L_p(Q)}$; через $L_{\text{loc}}(C)$ — простір локально інтегровних, тобто інтегровних на кожному компакт $Q \subset C$, функцій $f: C \rightarrow \mathbb{R}$. У просторі $L_{\text{loc}}(C)$ розглянемо сім'ю напівнорм

$$\|f\|_h = \sup_{x \in C} \left| \int_{hK \cap C} f(x+u) du \right|, \quad h > 0, \quad \|f\| := \sup_{h>0} \|f\|_h.$$

Через $L_{\|\cdot\|_h}(C)$ ($L_{\|\cdot\|}(C)$) будемо позначати простори функцій $f \in L_{\text{loc}}(C)$ таких, що $\|f\|_h < \infty$ (відповідно $\|f\| < \infty$). Зрозуміло, що $L_1(C) \subset L_{\|\cdot\|}(C)$.

Для локально інтегровної функції f через ∇f позначимо градієнт функції f ; частинні похідні розуміємо в узагальненому сенсі. Нехай $Q \subset \mathbb{R}^d$ — відкрита множина. Через $W^{1,p}(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір Соболева функцій $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ таких, що всі їхні (узагальнені) частинні похідні першого порядку належать $L_p(Q)$. Для $f \in W^{1,p}(Q)$ маємо $|\nabla f|_{K^\circ} \in L_p(Q)$.

Для $h > 0$ означимо функцію $g_h: (0, h) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_h(u) = \frac{1}{d \cdot \mu(K \cap C)} \left(\frac{1}{u^{d-1}} - \frac{u}{h^d} \right).$$

З [5] (лема 3), обчислюючи отриманий інтеграл, виводимо

$$\|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} = (d \cdot \mu(K \cap C))^{1/p'} \left(\int_0^h t^{d-1} g_h^{p'}(t) dt \right)^{1/p'} = \frac{Ah^{1-\frac{d}{p}}}{\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)},$$

де (нижче $B(\cdot, \cdot)$ — B -функція Ейлера)

$$A = A(d, p) = d^{-1} B^{\frac{1}{p'}} \left(1 - \frac{(d-1)p'}{d}, p' + 1 \right). \quad (1)$$

Означимо оператор $S_h: L_{\|\cdot\|_h}(C) \rightarrow L_\infty(C)$,

$$S_h f(x) = \frac{1}{h^d \mu(K \cap C)} \int_{hK \cap C} f(x+y) dy.$$

Тепер очевидно, що наступна теорема є окремим випадком теореми 2 з [5].

Теорема 1. Нехай $p \in (d, \infty]$, $h > 0$ і $f \in W^{1,p}(hK \cap C)$. Тоді

$$|f(\theta) - S_h f(\theta)| \leq \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(hK \cap C)}.$$

Нерівність є точною. Вона перетворюється на рівність для функцій $\alpha \cdot f + \beta$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і

$$f(y) = \int_0^{|y|_K} g_h^{p'-1}(u) du, \quad y \in hK \cap C.$$

3. Нерівності типу Надя. Використовуючи теорему 1, для всіх $x \in C$ і $f \in W^{1,p}(C)$ отримуємо

$$\begin{aligned} |f(x) - S_h f(x)| &\leq \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \| |\nabla f(x + \cdot)|_{K^\circ} \|_{L_p(hK \cap C)} \\ &\leq \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема 2. Якщо $h > 0$, $p \in (d, \infty]$ і $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{[\cdot]_h}(C)$, то $f \in L_\infty(C)$ і

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \leq \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C) h^{-d}]f[_h. \quad (3)$$

Нерівності (3) перетворюються на рівності для функцій

$$f_{e,h}(y) = \begin{cases} \int_{|y|_K}^h g_h^{p'-1}(u) du, & y \in hK \cap C, \\ 0, & y \in C \setminus hK. \end{cases} \quad (4)$$

Для кожної $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{[\cdot]_h}(C)$ виконується мультиплікативна нерівність

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \leq a(d, p) \mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C)]f[_{1-\alpha} \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}^\alpha, \quad (5)$$

де

$$\alpha = \frac{pd}{p + (p-1)d}, \quad a(d, p) = \left(\frac{(p-d)A(d, p)}{pd} \right)^\alpha \left(\frac{pd}{p-d} + 1 \right) \quad (6)$$

і $A(d, p)$ означено в (1). Нерівність (5) є точною. Вона перетворюється на рівність для кожної функції $f_{e,h}$, $h > 0$.

Якщо $f \in W^{1,p}(C) \cap L_1(C)$, то у нерівностях (3) і (5) $]f[_h$ і відповідно $]f[_{1-\alpha}$ можна замінити на $\|f\|_{L_1(C)}$, і одержані нерівності залишаться точними.

Доведення. Використовуючи (2), для кожного $x \in C$ маємо

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - S_h f(x)| + \mu^{-1}(K \cap C) h^{-d} \left| \int_{hK \cap C} f(x+y) dy \right| \\ &\leq \|g_h(|\cdot|_K)\|_{L_{p'}(hK \cap C)} \| |\nabla f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C) h^{-d}]f[_h, \end{aligned} \quad (7)$$

звідки випливають нерівності (3). Доведемо їх точність. Оскільки функція g_h є невід'ємною, то $|x|_K \leq |y|_K \implies f_{e,h}(x) \geq f_{e,h}(y)$. Функція $f_{e,h}$ є неперервною. Тому $\|f_{e,h}\|_{L_\infty(C)} = f(\theta)$ і, крім того, перша нерівність в (7) перетворюється на рівність для $x = \theta$ і функції $f_{e,h}$. Згідно з теоремою 1, перша з нерівностей у (2) при $x = \theta$ перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$. Функція $f_{e,h}$ є нулем поза множиною $hK \cap C$, а отже,

$$\| |\nabla f_{e,h}|_{K^\circ} \|_{L_p(hK \cap C)} = \| |\nabla f_{e,h}|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} \quad \text{і} \quad]f_{e,h}[_h = \int_{hK \cap C} f_{e,h}(y) dy.$$

Тому і другі нерівності у (2) та (7) також перетворюються на рівності, а отже, нерівності (3) перетворюються на рівності для функцій $f_{e,h}$.

Зі співвідношень (1) і (3) випливає, що для всіх $f \in W^{1,p}(C) \cap L_{\lfloor \cdot \rfloor}(C)$ і $h > 0$

$$\|f\|_{L_\infty(C)} \leq A(d,p)\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C)h^{-d}\lfloor f \rfloor. \quad (8)$$

Крім того, $\lfloor f_{e,h} \rfloor_h = \lfloor f_{e,h} \rfloor$ при кожному $h > 0$, а тому нерівність (8) є точною і перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$.

Щоб отримати нерівність (5), достатньо в праву частину (8) підставити вираз

$$h = \left(\frac{pd\mu^{-\frac{1}{p'}}(K \cap C)\lfloor f \rfloor}{(p-d)A(d,p)\|\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}} \right)^{\frac{p'}{p'+d}}.$$

Доведемо тепер твердження про точність нерівності (5). Позначимо $q = \frac{1}{\alpha}$ і $q' = \frac{1}{1-\alpha}$. Для кожного $h > 0$ розглянемо числа

$$u = \left(qA(d,p)\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} \right)^{\frac{1}{q}} \text{ і } v = \left(q'\mu^{-1}(K \cap C)h^{-d}\lfloor f \rfloor \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Використовуючи нерівність (5), нерівність Юнга і безпосередні обчислення, отримуємо

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\infty(C)} &\leq a(d,p)\mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C)\lfloor f \rfloor^{1-\alpha}\|\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}^\alpha = uv \leq \frac{u^q}{q} + \frac{v^{q'}}{q'} \\ &= A(d,p)\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla f|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C)h^{-d}\lfloor f \rfloor. \end{aligned}$$

Оскільки нерівність (8) перетворюється на рівність для функції $f_{e,h}$, то і нерівність (5) перетворюється на рівність для $f_{e,h}$, а отже, є точною.

Останнє твердження теореми є очевидним.

Теорему доведено.

4. Нерівності типу Ландау – Колмогорова для зарядів. Через $\mathfrak{N}(C)$ позначимо сім'ю зарядів ν , означених на вимірних за Лебегом підмножинах множини C і абсолютно неперервних щодо міри Лебега μ (див., наприклад, [8], розділ 5). Похідну Радона – Нікодима заряду ν по мірі μ будемо позначати через $D_\mu\nu$. Сукупність $\mathfrak{N}(C)$ є лінійним простором щодо стандартного додавання і множення на дійсні числа. Для $h > 0$ і $\nu \in \mathfrak{N}(C)$ введемо напівнорми $\lfloor \nu \rfloor_h = \sup_{x \in C} |\nu(x + hK)|$ і $\lfloor \nu \rfloor = \sup_{h>0} \lfloor \nu \rfloor_h$. Зрозуміло, що $\lfloor \nu \rfloor_h = \lfloor D_\mu\nu \rfloor_h$ і $\lfloor \nu \rfloor = \lfloor D_\mu\nu \rfloor$. Через $\mathfrak{N}_{\lfloor \cdot \rfloor_h}(C)$ ($\mathfrak{N}_{\lfloor \cdot \rfloor}(C)$) позначимо множину зарядів $\nu \in \mathfrak{N}(C)$, які мають скінченну напівнорму $\lfloor \cdot \rfloor_h$ (відповідно $\lfloor \cdot \rfloor$).

Застосовуючи теорему 2 до функції $f = D_\mu\nu$, бачимо, що справджується така теорема.

Теорема 3. Якщо $h > 0$ і заряд $\nu \in \mathfrak{N}_{\lfloor \cdot \rfloor_h}(C)$ є таким, що $D_\mu\nu \in W^{1,p}(C)$, то

$$\|D_\mu\nu\|_{L_\infty(C)} \leq A\mu^{-\frac{1}{p}}(K \cap C)h^{1-\frac{d}{p}}\|\nabla D_\mu\nu|_{K^\circ}\|_{L_p(C)} + \mu^{-1}(K \cap C)h^{-d}\lfloor \nu \rfloor_h, \quad (9)$$

де величина $A(d,p)$ означена в (1). Нерівність (9) є точною. Вона перетворюється на рівність для заряду $\nu_{e,h}$, що визначається рівністю $D_\mu\nu_{e,h} = f_{e,h}$, де функція $f_{e,h}$ означена в (4). Якщо заряд $\nu \in \mathfrak{N}_{\lfloor \cdot \rfloor}(C)$ є таким, що $D_\mu\nu \in W^{1,p}(C)$, то виконується мультиплікативна нерівність

$$\|D_\mu\nu\|_{L_\infty(C)} \leq a(d,p)\mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C)\lfloor \nu \rfloor^{1-\alpha}\|\nabla D_\mu\nu|_{K^\circ}\|_{L_p(C)}^\alpha, \quad (10)$$

де α і $a(d,p)$ означені в (6). Нерівність (10) є точною. Вона перетворюється на рівність для кожного заряду ν такого, що $D_\mu\nu = f_{e,h}$, $h > 0$.

5. Нерівності, що містять L_p -норму градієнта мішаної похідної. Нехай $0 \leq m \leq d$, $C = \mathbb{R}_{m,+}^d = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^{d-m}$ і $K = (-1, 1)^d$. Тоді $hK \cap C = (0, h)^m \times (-h, h)^{d-m}$, $h > 0$, і $|x|_K = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$. Для $\mathbf{I} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$, локально інтегровної функції $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ і стандартного базису $\{e_i\}_{i=1}^d$ у $\mathbb{R}^d$ покладемо $\partial_{\mathbf{I}} f = \frac{\partial^d f}{\partial x_1 \dots \partial x_d}$ (похідні розуміємо в узагальненому сенсі),

$$\Delta_{i,h}^+ f(x) = f(x + he_i) - f(x) \quad \text{і} \quad \Delta_{i,h} f(x) = f(x + he_i) - f(x - he_i).$$

Згідно з теоремою Фубіні, для майже всіх $x \in \mathbb{R}_{m,+}^d$ маємо

$$\int_{x+hK \cap C} \partial_{\mathbf{I}} f(u) du = (\Delta_{1,h}^+ \circ \dots \circ \Delta_{m,h}^+ \circ \Delta_{m+1,h} \circ \dots \circ \Delta_{d,h}) f(x). \quad (11)$$

Легко бачити, що для оператора $\mathfrak{S}_{h,m}: L_\infty(C) \rightarrow L_\infty(C)$

$$\mathfrak{S}_{h,m} f(x) = \frac{1}{2^{d-m} h^d} \left(\Delta_{1,h}^+ \circ \dots \circ \Delta_{m,h}^+ \circ \Delta_{m+1,h} \circ \dots \circ \Delta_{d,h} \right) f(x), \quad (12)$$

$$\mathfrak{S}_{h,m} f(x) = S_h \partial_{\mathbf{I}} f(x) \quad \forall f \in L_\infty(C) \quad \text{і} \quad \|\mathfrak{S}_{h,m}\|_{L_\infty(C) \rightarrow L_\infty(C)} = 2^m h^{-d}.$$

Теорема 4. Для $h > 0$, $K = (-1, 1)^d$, $C = \mathbb{R}_{m,+}^d$ і функції $f \in L_\infty(C)$ такої, що $\partial_{\mathbf{I}} f \in W^{1,p}(C)$, виконується нерівність

$$\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} \leq A(d, p) h^{1-\frac{d}{p}} 2^{\frac{m-d}{p}} \| |\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} + 2^m h^{-d} \|f\|_{L_\infty(C)}, \quad (13)$$

де $A(d, p)$ означено в (1). Її можна записати в мультиплікативній формі

$$\|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} \leq a(d, p) 2^{\alpha \left(\frac{m}{d} - \frac{d}{p} \right)} \|f\|_{L_\infty(C)}^{1-\alpha} \| |\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}^\alpha, \quad (14)$$

де α і $a(d, p)$ означені в (6). Для $m = 0$ і $m = 1$ нерівності (13) та (14) точні.

Доведення. Враховуючи, що $\mu(K \cap C) = 2^{d-m}$, співвідношення (2) і (12), маємо

$$\begin{aligned} \|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} &\leq \|\partial_{\mathbf{I}} f - \mathfrak{S}_{h,m} f\|_{L_\infty(C)} + \|\mathfrak{S}_{h,m}\|_{L_\infty(C) \rightarrow L_\infty(C)} \|f\|_{L_\infty(C)} \\ &= \|\partial_{\mathbf{I}} f - S_h \partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} + 2^m h^{-d} \|f\|_{L_\infty(C)} \\ &\leq A(d, p) \cdot 2^{\frac{m-d}{p}} h^{1-\frac{d}{p}} \| |\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)} + 2^m h^{-d} \|f\|_{L_\infty(C)}. \end{aligned}$$

Нерівність (13) доведено. З нерівності (5) для функції $\partial_{\mathbf{I}} f$ і рівності (11) отримуємо

$$\begin{aligned} \|\partial_{\mathbf{I}} f\|_{L_\infty(C)} &\leq a(d, p) \mu^{-\frac{\alpha}{d}}(K \cap C) \|\partial_{\mathbf{I}} f\|^{1-\alpha} \| |\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}^\alpha \\ &\leq a(d, p) 2^{\frac{(m-d)\alpha}{d}} \left(2^d \|f\|_{L_\infty(C)} \right)^{1-\alpha} \| |\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}^\alpha \\ &= a(d, p) 2^{\alpha \left(\frac{m}{d} - \frac{d}{p} \right)} \|f\|_{L_\infty(C)}^{1-\alpha} \| |\nabla \partial_{\mathbf{I}} f|_{K^\circ} \|_{L_p(C)}^\alpha, \end{aligned}$$

і нерівність (14) доведено. Встановимо точність нерівностей (13) і (14) при $m = 0$. Для функції $f_{e,h}$, визначеної в (4), і функції

$$F_{e,h}(x) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_d} f_{e,h}(u) du$$

маємо $\partial_{\mathbf{I}} F_{e,h} = f_{e,h}$, $|\nabla \partial_{\mathbf{I}} F_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ} = |\nabla f_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ}$, і на підставі міркувань симетрії

$$2^d \|F_{e,h}\|_{L_\infty(C)} = 2^d \int_{(0,h)^d} f_{e,h}(u) du = \int_{(-h,h)^d} f_{e,h}(u) du =]f_{e,h}[h =]f_{e,h}[. \quad (15)$$

Оскільки для функції $f_{e,h}$ нерівності (3) та (5) перетворюються на рівності, то, враховуючи (15), переконуємося, що нерівності (13) і (14) при $m = 0$ є точними.

Доведемо точність нерівностей (13) і (14) у випадку $m = 1$. У цьому випадку $hK \cap C = (0, h) \times (-h, h)^{d-1}$ і $\mu(K \cap C) = 2^{d-1}$. Існує таке число $a \in (0, h)$, що

$$\int_{(0,a) \times (-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u) du = \int_{(a,h) \times (-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u) du. \quad (16)$$

Розглянемо функцію $G_{e,h}(x) = \int_a^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_d} f_{e,h}(u) du$. Для неї отримуємо $\partial_{\mathbf{I}} G_{e,h} = f_{e,h}$ і $|\nabla \partial_{\mathbf{I}} G_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ} = |\nabla f_{e,h}(\cdot)|_{K^\circ}$.

Гіперплощини $x_1 = a$ та $x_j = 0$, $j = 2, \dots, d$, розбивають множину $(0, h) \times (-h, h)^{d-1}$ на 2^d паралелепіпедів $\Pi_1, \dots, \Pi_{2^d}$, до того ж з огляду на симетрію графіка функції $f_{e,h}$ щодо координатних гіперплощин і рівності (16) маємо

$$\int_{\Pi_i} f_{e,h}(u) du = \frac{1}{2^d} \int_{(0,h) \times (-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u) du, i = 1, \dots, 2^d,$$

а тому $\|G_{e,h}\|_{L_\infty(C)} = \frac{1}{2^d} \int_{(0,h) \times (-h,h)^{d-1}} f_{e,h}(u) du = \frac{1}{2^d}]f_{e,h}[h = \frac{1}{2^d}]f_{e,h}[$. З цих рівностей і того, що нерівності (3) та (5) перетворюються на рівності для функції $f_{e,h}$, отримуємо точність нерівностей (13) і (14) при $m = 1$.

6. Деякі застосування. Нехай X , Y і Z — лінійні простори з напівнормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ і $\|\cdot\|_Z$ відповідно. Лінійний оператор $S: X \rightarrow Y$ називається обмеженим (пишемо $S \in \mathcal{L}(X, Y)$), якщо

$$\|S\|_{X \rightarrow Y} = \sup\{\|Sx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Нехай $A: X \rightarrow Y$, $B: X \rightarrow Z$ — однорідні оператори з областями визначення $D_A, D_B \subset X$, $D_B \subset D_A$. Позначимо $\mathfrak{M} = \{x \in D_B : \|Bx\|_Z \leq 1\}$. Для оператора A і оператора $S \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$U(A, S; \mathfrak{M}) := \sup\{\|Ax - Sx\|_Y : x \in \mathfrak{M}\}.$$

Для довільного $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ і кожного $x \in D_B$ виконується нерівність типу Ландау – Колмогорова – Надя

$$\|Ax\|_Y \leq \|Ax - Sx\|_Y + \|S\|_{X \rightarrow Y} \|x\|_X \leq U(A, S; \mathfrak{M}) \|Bx\|_Z + \|S\|_{X \rightarrow Y} \|x\|_X. \quad (17)$$

З теореми 2 випливає, що для операторів $A: f \mapsto f$, $B: f \mapsto |\nabla f|_{K^\circ}$ і $S: f \mapsto S_h f$ нерівність (17) перетворюється на рівність для $f = f_{e,h}$. З теореми 3 випливає, що для $A:$

$\nu \mapsto D_\mu \nu, B: \nu \mapsto |\nabla D_\mu \nu|_{K^\circ}$ і $S: \nu \mapsto \frac{\nu(x + hK \cap C)}{\mu(hK \cap C)}$ нерівність (17) перетворюється на рівність для $\nu = \nu_{e,h}$. Нарешті, з теореми 4 випливає, що для $A: f \mapsto \partial_I f, B: f \mapsto |\nabla \partial_I f|_{K^\circ}$ і $S: f \mapsto \mathfrak{S}_{h,m} f$ нерівність (17) перетворюється на рівність для $f = F_{e,h}$ при $m = 0$ і для $f = G_{e,h}$ при $m = 1$.

Ці спостереження з урахуванням відомих загальних фактів (див., наприклад, теореми 1, 2 [6] і теорему 1 [7]) дозволяють розв'язати задачі наближення відповідних необмежених операторів обмеженими та деякі пов'язані задачі.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. E. Landau, *Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion*, Proc. London Math. Soc., **13**, 43–49 (1913).
2. А. Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале*, Уч. зап. МГУ. Математика, **30**, № 3, 3–13 (1939).
3. B. Sz.-Nagy, *Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung*, Acta Sci. Math., **10**, 64–74 (1941).
4. В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наук. думка, Киев (2003).
5. V. Babenko, O. Kovalenko, N. Parfinovych, *On approximation of hypersingular integral operators by bounded ones*, J. Math. Anal. and Appl., **513**, № 2, Article 126215 (2022).
6. V. F. Babenko, V. V. Babenko, O. V. Kovalenko, N. V. Parfinovych, *On Landau–Kolmogorov type inequalities for charges and their applications*, Res. Math., **31**, № 16, 3–16 (2023).
7. V. F. Babenko, V. V. Babenko, O. V. Kovalenko, N. V. Parfinovych, *Nagy type inequalities in metric measure spaces and some applications*; arXiv:2306.11016 (2023).
8. Yu. M. Berezanski, G. F. Us, Z. G. Sheftel, *Functional analysis*, Elsevier Sci. (2003).

Одержано 13.07.23