

Леонід Курдаченко, Олександр Пипка¹ (Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара),
Ігор Субботін (Національний університет, Лос-Анджелес, США)

ПРО НІЛЬПОТЕНТНІСТЬ ДЕЯКИХ МОДУЛІВ НАД ГРУПОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

We study RG -modules that do not contain nonzero G -perfect factors. In particular, it is shown that if a group G is finite and R is a Dedekind domain with some additional restrictions, then these RG -modules are G -nilpotent.

Досліджено RG -модулі, які не містять ненульових G -досконалих факторів. Зокрема, доведено, що коли група G скінченна, а R є дедекіндовою областю з деякими додатковими обмеженнями, то такі RG -модулі G -нільпотентні.

1. Вступ. Нехай G — група, R — кільце, A — RG -модуль. Покладемо

$$\zeta_G(A) = \{a \mid a \in A \text{ та } ax = a \text{ для всіх елементів } x \in G\}.$$

Очевидно, підмножина $\zeta_G(A)$ є RG -підмодулем модуля A , який називають G -центром модуля A .

Починаючи з G -центра, можна побудувати *верхній G -центральный ряд* модуля A

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \dots C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \dots C_\gamma,$$

де $C_1 = \zeta_G(A)$, $C_{\alpha+1}/C_\alpha = \zeta_G(A/C_\alpha)$ для всіх порядкових чисел α і $C_\lambda = \bigcup_{\mu < \lambda} C_\mu$ для всіх граничних порядкових чисел λ , $\zeta_G(A/C_\gamma) = \langle 0 \rangle$. Останній член цього ряду називають *верхнім G -гіперцентром* модуля A .

RG -модуль A називатимемо G -гіперцентральним, якщо $C_\gamma = A$, і G -нільпотентним, якщо γ скінченне і $C_\gamma = A$.

Теорія модулів над груповими кільцями тісно пов'язана з теорією груп. У теорії груп модулів над груповими кільцями виникають таким чином.

Нехай G — група, A — нормальна абелева підгрупа групи G , $H = G/B$, де B — G -інваріантна підгрупа з $C_G(A)$. Розглянемо групове кільце $\mathbb{Z}H$ групи H над кільцем $\mathbb{Z}$ цілих чисел. Кожен елемент $x \in \mathbb{Z}H$ має вигляд $x = k_1 h_1 + \dots + k_n h_n$, де $k_1, \dots, k_n$ — цілі числа, $h_1 = y_1 B, \dots, h_n = y_n B$, $y_1, \dots, y_n \in G$. Якщо $a \in A$, то покладемо

$$ax = (a^{k_1})^{y_1} + \dots + (a^{k_n})^{y_n}.$$

Легко переконатися, що за такого визначення A є (правим) $\mathbb{Z}H$ -модулем.

Нормальну абелеву підгрупу A групи G називають *гіперцентралью зануреною в G* , якщо верхній гіперцентр групи G містить A .

Нормальну абелеву підгрупу A групи G називають *G -нільпотентно зануреною в G* , якщо верхній гіперцентр групи G , який має скінченний порядковий номер, містить A .

¹ Відповідальний за листування, e-mail: sasha.pyrka@gmail.com.

Можна переконатися в тому, що нормальна абелева підгрупа A групи G гіперцентрально занурена (відповідно, G -нільпотентно занурена) в G , якщо $\mathbb{Z}H$ -модуль A є G -гіперцентральноним (відповідно, G -нільпотентним), де $H = C_G(A)$.

Цей факт ілюструє, що застосування техніки теорії модулів над груповими кільцями дає можливість отримати критерії (узагальненої) нільпотентності груп. Існує багато прикладів ефективності такого підходу (див., наприклад, монографії [10] (розд. 13) і [13] (розд. 4, 7, 8), а також статті [2, 4–6, 8]).

Нехай G — група, H, K — такі підгрупи групи G , що $H \leq K$. Тоді фактор-групу K/H називатимемо *секцією* групи G . Якщо обидві підгрупи H, K нормальні в G , то K/H називають *фактором* групи G . Нагадаємо, що групу G називають *досконалою*, якщо $G = [G, G]$.

Якщо група G розв'язна, то кожна секція групи G не є досконалою. Групи, секції яких не є досконалими, розглянуто у статті [3]. Якщо група G нільпотентна, то її фактори задовольняють наступну сильнішу умову.

Фактор K/H називатимемо G -досконалим, якщо $[K/H, G] = K/H$. В іншому випадку говоритимемо, що K/H не є G -досконалим.

Якщо група G нільпотентна, то кожен фактор групи G не є G -досконалим. І навіть більше, очевидно, що якщо G — скінченна група, всі фактори якої не є G -досконалими, то G нільпотентна.

Фактор K/H називатимемо *центральним* (конкретніше, G -центральним), якщо $[K, G] \leq H$.

Природно виникає протилежне питання: що можна сказати про групи, які не мають G -досконалих факторів?

Одним із важливих етапів тут є з'ясування того, яким чином абелеві нормальні підгрупи занурюються в групу. Конкретніше, яким чином нормальна абелева підгрупа A групи G G -нільпотентно занурюється в G ? Отже, ми приходимо до такої задачі про модулі: коли $\mathbb{Z}G$ -модуль A є G -нільпотентним? Саме цій задачі і присвячено цю статтю. Перший природний етап — розгляд випадку, коли група G скінченна. Ми не будемо обмежуватись випадком модулів над цілочисловим груповим кільцем $\mathbb{Z}G$, а будемо розглядати випадок, коли кільце скалярів є деякою дедекіндовою областю.

2. Деякі попередні результати. Нехай A — RG -модуль. Позначимо через $[A, G]$ RG -підмодуль модуля A , породжений елементами $a(g - 1)$, де $a \in A$, $g \in G$. Інакше кажучи, $[A, G] = A\bar{\omega}(RG)$, де $\bar{\omega}(RG)$ — фундаментальний ідеал групового кільця RG .

Якщо B — RG -підмодуль модуля A , то покладемо

$$[A/B, G] = ([A, G] + B)/B.$$

Нехай B, C — такі RG -підмодулі з A , що $B \leq C$. Тоді C/B називатимемо G -фактором модуля A . Фактор C/B називають G -досконалим, якщо $[C/B, G] = C/B$. В іншому випадку говорять, що фактор C/B не є G -досконалим.

Фактор C/B називатимемо G -центральним, якщо $[C, G] \leq B$. В іншому випадку говоритимемо, що фактор C/B не є G -центральним.

Дуальним по відношенню до верхнього центрального ряду модулів є нижній центральний ряд.

Покладемо $\gamma_1(A) = A$, $\gamma_2(A) = [A, G]$, $\gamma_{\alpha+1}(A) = [\gamma_\alpha(A), G]$ для всіх порядкових чисел α і $\gamma_\lambda(A) = \bigcap_{\mu < \lambda} \gamma_\mu(A)$ для всіх граничних порядкових чисел λ . Ряд

$$A = \gamma_1(A) \geq \gamma_2(A) \geq \dots \gamma_\alpha(A) \geq \gamma_{\alpha+1}(A) \geq \dots \gamma_\delta(A)$$

називають *нижнім G -центральним рядом* модуля A . Члени цього ряду називають *G -гіпоцентрами*. Вони є RG -підмодулями модуля A , а останній член $\gamma_\delta(A)$ називають *нижнім G -гіпоцентром*, $\gamma_\delta(A) = [\gamma_\delta(A), G]$.

Скінченний ряд RG -підмодулів

$$\langle 0 \rangle = B_0 \leq B_1 \leq \dots \leq B_{k-1} \leq B_k = A$$

називають *G -центральним рядом* модуля A , якщо кожен фактор цього ряду G -центральний. Як і для груп, RG -модуль A є G -нільпотентним, якщо A має скінченний G -центральний ряд. Довжина верхнього G -центального ряду G -нільпотентного модуля збігається з довжиною нижнього G -центального ряду. При цьому обидва ряди є скінченними G -центральними рядами найменшої довжини.

Легко показати, що кожен фактор-модуль G -гіперцентального (відповідно, G -нільпотентного) RG -модуля є G -гіперцентральним (G -нільпотентним). Це означає, що якщо A — G -нільпотентний модуль, то кожен фактор модуля A не є G -досконалим. Обернене твердження також має місце.

Твердження 2.1. Нехай G — група, R — кільце, A — RG -модуль, який має скінченний RG -композиційний ряд. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним.

Доведення. Розглянемо RG -композиційний ряд

$$\langle 0 \rangle = S_0 \leq S_1 \leq \dots \leq S_{k-1} \leq S_k = A$$

модуля A . Оскільки $[S_j/S_{j-1}, G]$ — RG -підмодуль S_j/S_{j-1} і $[S_j/S_{j-1}, G] \neq [S_j/S_{j-1}, G]$, то $[S_j, G] \leq S_{j-1}$, $1 \leq j \leq k$. Це означає, що наведений вище ряд G -центральний.

Нехай R — кільце, A — модуль над кільцем R . Анулятором підмножини $S \subseteq R$ назвемо множину

$$\text{Ann}_A(S) = \{a \in A \mid ax = 0 \text{ для кожного елемента } x \in S\}.$$

Легко показати, що якщо кільце R комутативне, то анулятор кожної підмножини S кільця R є R -підмодулем модуля A .

Анулятором підмножини $B \subseteq A$ в R назвемо множину

$$\text{Ann}_R(B) = \{x \in R \mid bx = 0 \text{ для кожного елемента } b \in B\}.$$

Легко показати, що якщо кільце R комутативне, то анулятор кожної підмножини B модуля A є ідеалом кільця R .

Твердження 2.2. Нехай G — скінченна p -група порядку $m = p^s$, p — просте число, R — кільце, A — RG -модуль. Припустимо, що B — такий RG -підмодуль з A , що $\text{char}(R/\text{Ann}_R(B)) = t = p^k$ для деякого натурального числа k . Тоді член верхнього G -центального ряду модуля A , який має порядковий номер kp^s , містить B .

Доведення. Нехай b — довільний елемент з B . Тоді $bR \cong_R R/\text{Ann}_R(b)$. Включення $\text{Ann}_R(A) \leq \text{Ann}_R(a)$ показує, що $p^k b = 0$. Це означає, що адитивна група модуля A є p -групою. І навіть більше, порядок кожного елемента з A є дільником числа p^k .

Нехай $B_1 = \langle bg \mid g \in G \rangle$. Оскільки G скінченна, то B_1 також скінченна. І навіть більше, $|B_1| \leq (p^k)^m = p^{km}$, де $m = |G|$. Природний напівпрямий добуток $B_1 \rtimes G$ є скінченною p -групою. Це означає, що група $B_1 \rtimes G$ нільпотентна. З того факту, що $|B_1| \leq p^{km}$, випливає, що B_1 має G -центральный ряд, довжина якого не перевищує km . Це означає, що член верхнього G -центрального ряду модуля A , який має порядковий номер km , містить B_1 . Оскільки це має місце для кожного елемента $b \in B$, то член верхнього G -центрального ряду модуля A з порядковим номером km містить B .

Як наслідок, отримуємо такий відомий результат.

Наслідок 2.1. Нехай G — p -група, p — просте число. Припустимо, що G містить таку нільпотентну нормальну підгрупу S , що G/S скінченна. Якщо порядки елементів з S обмежені, то G нільпотентна.

Доведення. Нехай $A = S/[S, S]$. Тоді A можна розглядати як $\mathbb{Z}H$ -модуль, де $H = G/S$ — скінченна p -група. Оскільки порядки елементів з A обмежені, то $\text{char}(A/\text{Ann}_{\mathbb{Z}}(A)) = p^k$ для деякого натурального числа k . Згідно з твердженням 2.2 A є H -нільпотентним модулем. Це означає, що фактор-група $G/[S, S]$ нільпотентна. Тоді за теоремою 7 [7] G також нільпотентна.

Наслідок 2.2. Нехай G — скінченна p -група, p — просте число, R — область цілісності, A — RG -модуль. Припустимо, що $\text{char}(R) = p$. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним модулем.

Цей результат безпосередньо впливає з твердження 2.2.

Твердження 2.3. Нехай G — скінченна p -група, p — просте число, R — нетерове кільце, A — RG -модуль. Припустимо, що $\text{char}(R) = q$ — таке просте число, що $q \neq p$. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є тривіальним модулем.

Доведення. Оскільки кільце R нетерове, а група G скінченна, то групове кільце RG також нетерове. Нехай a — довільний елемент модуля A . Тоді $aR \cong_R R/\text{Ann}_R(a)$. Зокрема, це означає, що a має порядок q , звідки випливає, що адитивна група модуля A є елементарною абелевою q -групою.

Нехай C — RG -підмодуль, породжений елементом a . Тоді C — нетеровий RG -підмодуль, який містить максимальний RG -підмодуль D . Фактор C/D є RG -головним, а оскільки $[C/D, G] \neq C/D$, то $[C, G] \leq D$. Зокрема, $[C, G] \neq C$.

Припустимо, що RG -підмодуль $[C, G]$ ненульовий. Зауважимо, що цей підмодуль нетеровий, а тому він містить максимальний RG -підмодуль E . За допомогою аналогічних міркувань отримуємо, що $[[C, G], G] \leq E$, зокрема $[[C, G], G] \neq [C, G]$. Фактор $C/[[C, G], G]$ є G -нільпотентним. Оскільки адитивна група фактора $C/[[C, G], G]$ є q -групою, а G — p -групою, то $C/[[C, G], G]$ — тривіальний RG -модуль. Інакше кажучи, $[C, G] \leq [[C, G], G]$, тобто $[C, G] = [[C, G], G]$, що неможливо. Ця суперечність показує, що $[C, G] = \langle 0 \rangle$. Це означає, що $ag = a$. Оскільки це має місце для кожного елемента $a \in A$, то A — тривіальний RG -модуль.

Наступним природним кроком є розгляд ситуації, коли $\text{char}(R) = 0$. Ми розглядатимемо цей випадок, коли R є деякою специфічною дедекіндовою областю.

Нагадаємо, що кільце R називають *дедекіндовою областю*, якщо R є нетеровою областю, в якій кожен ненульовий простий ідеал максимальний.

Для R -модуля A розглянемо перетин $\text{Mon}_R(A)$ усіх ненульових R -підмодулів модуля A . R -підмодуль $\text{Mon}_R(A)$ називають *R -монолітом* модуля A . R -модуль A називатимемо *R -*

монологічним, якщо його R -монологіт ненульовий. У цьому випадку R -монологіт модуля A є єдиним простим R -підмодулем в A .

Нехай R — дедекіндова область характеристики 0, A — RG -модуль, де G — скінченна група. Припустимо, що A — RG -монологічний модуль. Позначимо через M RG -монологіт модуля A . Оскільки група G скінченна, то $A = D_1 \oplus \dots \oplus D_k$, де $D_1, \dots, D_k$ — прості R -модулі (див., наприклад, [11], теорема 5.5). І навіть більше, $D_j \cong_R R/S_j$, де S_j — максимальний ідеал з R , $1 \leq j \leq k$. Очевидно, що $S_j = S_m$ для всіх j, m . Це означає, що $\text{Ann}_R(M) = S$ є максимальним ідеалом кільця R . Зауважимо також, що розмірність $\dim_{R/S}(M)$ скінченна.

Нехай R — область цілісності, A — модуль над кільцем R . Покладемо

$$\text{Tor}_R(A) = \{a \in A \mid \text{Ann}_R(a) \neq \langle 0 \rangle\}.$$

Можна показати, що $\text{Tor}_R(A)$ є R -підмодулем модуля A . Цей підмодуль називають *R -періодичною частиною* модуля A .

R -модуль A називатимемо *R -періодичним*, якщо $A = \text{Tor}_R(A)$. R -модуль A називатимемо *вільним від R -скруту*, якщо $\text{Tor}_R(A) = \langle 0 \rangle$.

Визначимо *R -ассасинатор* модуля A за правилом

$$\text{Ass}_R(A) = \{P \mid P \text{ — такий ідеал з } R, \text{ що } \text{Ann}_A(P) \neq \langle 0 \rangle\}.$$

Якщо U є ідеалом з R , то покладемо

$$A_U = \{a \in A \mid aU^n = \langle 0 \rangle \text{ для деякого натурального } n\}.$$

Легко показати, що A_U є R -підмодулем модуля A .

R -підмодуль A_U називають *U -компонентою* модуля A . Якщо $A = A_U$, то A називають *U -модулем*. Крім того, нехай

$$\Omega_{U,k}(A) = \{a \in A \mid aU^k = \langle 0 \rangle \text{ для фіксованого } k\}.$$

Легко показати, що $\Omega_{U,k}(A)$ є R -підмодулем і

$$\Omega_{U,1}(A) \leq \Omega_{U,2}(A) \leq \dots \leq \Omega_{U,k}(A) \leq \dots, \quad A_U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_{U,k}(A).$$

Якщо A — (адитивна) абелева група, p — просте число, то $\Omega_{p\mathbb{Z},k}(A)$ — підгрупа $\{a \in A \mid |a| \leq p^k\}$.

Якщо D є дедекіндовою областю, а A — D -періодичним модулем, отримуємо канонічний розклад $A = \bigoplus_{P \in \pi} A_P$, де $\pi = \text{Ass}_D(A)$. І навіть більше, якщо B є D -підмодулем модуля A , то $(A/B)_P = (A_P + B)/B$ для кожного $P \in \text{Ass}_D(A)$ та $A/B = \bigoplus_{P \in \pi} (A_P + B)/B$ (див., наприклад, [12], наслідок 3.8).

Лема 2.1. Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, A — монологічний RG -модуль, M — RG -монологіт модуля A . Припустимо також, що $\text{Ann}_R(M) = P$ — максимальний ідеал з R . Тоді $\text{Tor}_R(A)$ є P -модулем і розмірність $\dim_{R/P}(\Omega_{P,1}(\text{Tor}_R(A)))$ скінченна.

Доведення. Як було зазначено вище, $\text{Tor}_R(A) = \bigoplus_{Q \in \pi} A_Q$, де A_Q — Q -компонента модуля A , $\pi = \text{Ass}_R(A)$. Очевидно, що A_Q є RG -підмодулем модуля A для кожного $Q \in \pi$. Із включення $M \leq A_P$ та того факту, що модуль A є RG -монологічним, випливає, що $\text{Tor}_R(A) = A_P$. Як було зазначено вище, розмірність $\dim_{R/P}(M)$ скінченна.

Покладемо $D = \Omega_{P,1}(\text{Tor}_R(A))$ і припустимо, що D має нескінченну розмірність над полем R/P . Маємо розклад $D = M \oplus B$ для деякого R -підмодуля B . Беручи до уваги R -ізоморфізм $D = Dg = Mg \oplus Bg = M \oplus Bg$, $g \in G$, отримуємо, що $M \cong D/B \cong_{R/P} D/Bg$. Зокрема, розмірність $\dim_{R/P}(M) = \dim_{R/P}(D/Bg)$ скінченна для кожного елемента $g \in G$.

Нехай $G = \{1 = g_1, \dots, g_n\}$, $C = Bg_1 \cap \dots \cap Bg_n$. Тоді C є RG -підмодулем модуля A , а розмірність $\dim_{R/P}(D/C)$ скінченна. Зокрема, підмодуль C ненульовий. З вибору C випливає, що $C \cap M = \langle 0 \rangle$, що неможливо. Ця суперечність доводить результат.

Наслідок 2.3. *Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, A — монолітичний RG -модуль, M — RG -моноліт модуля A . Припустимо також, що $\text{Ann}_R(M) = P$ — максимальний ідеал з R . Тоді $\text{Tor}_R(A)$ є артиновим R -модулем.*

Це випливає з леми 2.1 та наслідку 7.12 з монографії [12].

Нехай R — область цілісності, A — R -модуль, $0 \neq x \in R$. Говоритимемо, що A є x -подільним, якщо для кожного елемента $a \in A$ існує такий елемент $c \in A$, що $cx = a$. Іншими словами, $A = Ax$.

Модуль A називають R -подільним, якщо він x -подільний для кожного $0 \neq x \in R$.

Нехай R — дедекіндова область, A — простий R -модуль. Тоді $A \cong D/P$ для деякого максимального ідеалу P . Зауважимо, що R/P^k і P/P^{k+1} ізоморфні як R -модулі для кожного $k \in \mathbb{N}$ (див., наприклад, [12], наслідок 1.28). Зокрема, R -модуль R/P^k занурюється в R -модуль R/P^{k+1} , $k \in \mathbb{N}$. Тому можна розглядати ін'єктивну межу C_{P^∞} сім'ї R -модулів $\{R/P^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. R -модуль C_{P^∞} називають *прюферовим P -модулем*.

З визначення випливає, що C_{P^∞} є P -модулем, і навіть більше, $\Omega_{P,k}(C_{P^\infty}) \cong_R R/P^k$, $k \in \mathbb{N}$. Крім того,

$$\Omega_{P,k+1}(C_{P^\infty})/\Omega_{P,k}(C_{P^\infty}) \cong (R/P^{k+1})/(P/P^{k+1}) \cong R/P.$$

Отже, якщо C є власним R -підмодулем з C_{P^∞} , то $C = \Omega_{P,k}(C_{P^\infty})$ для деякого натурального числа k . Аналогічно, якщо $b \notin \Omega_{P,k-1}(C_{P^\infty})$, то $C = bR$.

Зазначимо також, що прюферовий P -модуль монолітичний, а його моноліт збігається з $\Omega_{P,1}(C_{P^\infty})$. Крім того, прюферовий P -модуль подільний. І навіть більше, кожен подільний P -модуль є прямою сумою прюферових P -модулів (див., наприклад, [12], лема 5.20 і теорема 5.26).

Наслідок 2.4. *Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, A — монолітичний RG -модуль, M — RG -моноліт модуля A . Припустимо також, що $\text{Ann}_R(M) = P$ — максимальний ідеал з R . Тоді $\text{Tor}_R(A)$ є прямою сумою скінченної кількості прюферових P -підмодулів та скінченнопородженого P -підмодуля.*

Це випливає з наслідку 2.3 та теореми 7.13 із монографії [12].

Лема 2.2. *Нехай G — скінченна група, R — кільце, A — RG -модуль. Припустимо, що $\mathfrak{X}$ — клас R -модулів, замкнений щодо взяття скінченних прямих сум та R -підмодулів. Якщо D — такий R -підмодуль з A , що $A/D \in \mathfrak{X}$, то A містить такий RG -підмодуль C , що $C \leq D$ і $A/C \in \mathfrak{X}$.*

Доведення. Для кожного елемента $g \in G$ маємо ізоморфізм $A/Dg = Ag/Dg \cong_R A/D$, який показує, що $A/Dg \in \mathfrak{X}$. Оскільки група G скінченна, то сім'я $\{Dg \mid g \in G\}$ також скінченна. Нехай $\{Dg \mid g \in G\} = \{D_1, \dots, D_n\}$. Покладемо $C = D_1 \cap \dots \cap D_n$. Згідно з теоремою Ремака отримуємо занурення A/C в $A/D_1 \oplus \dots \oplus A/D_n$. Оскільки $A/D_j \in \mathfrak{X}$, $1 \leq j \leq n$, то $A/C \in \mathfrak{X}$.

Наслідок 2.5. Нехай G — скінченна група, R — кільце, A — RG -модуль. Якщо S є таким R -підмодулем модуля A , що R -модуль A/D артиновий, то A містить такий RG -підмодуль C , що $C \leq S$ і A/C є артиновим R -модулем.

Лема 2.3. Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, A — монолітичний RG -модуль, M — RG -моноліт модуля A . Припустимо, що $\text{Ann}_R(M) = P$ — максимальний ідеал з R . Тоді A є R -періодичним модулем.

Доведення. Припустимо протилежне, нехай $A \neq \text{Tor}_R(A)$. Згідно з наслідком 2.4 $\text{Tor}_R(A) = D \oplus C$, де D — подільний R -підмодуль, C — скінченнопороджений R -підмодуль. З того факту, що підмодуль C є R -періодичним, випливає, що анулятор $\text{Ann}_R(C)$ ненульовий. Тоді $A = \text{Tor}_R(A) \oplus B$ для деякого R -підмодуля B (див., наприклад, [12], теорема 5.13 і твердження 8.9). Беручи до уваги R -ізоморфізм $A/B \cong_R \text{Tor}_R(A)$, отримуємо, що A/B — артиновий P -модуль. З наслідку 2.5 випливає, що A містить такий RG -підмодуль E , що $E \leq B$ та A/E — артиновий P -модуль. Зокрема, модуль A/E R -періодичний. Оскільки A не є R -періодичним, то підмодуль E ненульовий. З іншого боку, включення $M \leq \text{Tor}_R(A)$ показує, що $M \cap E = \langle 0 \rangle$, що неможливо. Отримана суперечність показує, що модуль A є R -періодичним.

Лема 2.4. Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, A — монолітичний RG -модуль, M — RG -моноліт модуля A . Припустимо, що $\text{Ann}_R(M) = P$ — максимальний ідеал з R . Тоді A є або скінченнопородженим R -модулем, або артиновим R -подільним модулем.

Доведення. Згідно з лемою 2.3 модуль A є R -періодичним. І навіть більше, за лемою 2.1 і наслідком 2.3 A — артиновий P -модуль.

Нехай $y \in P \setminus P^2$, a — довільний елемент з M . Припустимо, що існує таке натуральне число n , що рівняння $xy^n = a$ має розв'язок в A , а рівняння $xy^{n+1} = a$ не має розв'язку. Якщо b — довільний ненульовий елемент з A , то RG -підмодуль bRG має ненульовий перетин з M , і навіть більше, bRG містить M . Це означає, що існує такий елемент $u \in RG$, що $bu = a \neq 0$. Припустимо, що існує такий елемент c , що $cy^{n+1} = b$. Тоді $a = bu = (cy^{n+1})u = (cu)y^{n+1}$, що неможливо.

Як було зазначено раніше, $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_{P,k}(A)$. Припустимо, що $\Omega_{P,n+2}(A) \neq \Omega_{P,n+1}(A)$. Це означає, що $\Omega_{P,n+2}(A)P^{n+1} \neq \langle 0 \rangle$. Тоді $AP^k = Ay^k$ для всіх натуральних чисел k (див., наприклад, [12], твердження 6.2). Таким чином, існує такий елемент $d \in A$, що $dy^{n+1} = e \neq 0$. Але в цьому випадку рівняння $xy^{n+1} = e$ має розв'язок, що неможливо. Ця суперечність показує, що $\Omega_{P,n+2}(A) = \Omega_{P,n+1}(A)$ і тому $A = \Omega_{P,n+1}(A)$. З леми 2.3 і наслідку 2.4 випливає, що модуль A скінченнопороджений як R -модуль.

Припустимо тепер, що для кожного елемента a з M рівняння $xy^n = a$ має розв'язок в A для всіх натуральних чисел n . Якщо b — довільний ненульовий елемент з M , то існує такий елемент $u \in RG$, що $bu = a \neq 0$. Нехай c — такий елемент з A , що $cy^n = a$. Тоді $(cu)y^n = (cy^n)u = au = b$. Це означає, що $A = Ay^n$ для кожного натурального числа n . Оскільки A є P -модулем, це означає, що модуль A є R -подільним (див., наприклад, [12], твердження 6.1).

3. Модулі з періодично необмеженими кільцями скалярів. Нехай R — дедекіндова область характеристики 0. Говоритимемо, що R періодично необмежена, якщо для кожного максимального ідеалу S поле R/S має просту характеристику, а порядки елементів адитивної групи фактор-кільця R/S^n не обмежені для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $p = \text{char}(R/S)$. Ізоморфізм $R/S^k \cong_R S/S^{k+1}$ (див., наприклад, [12], наслідок 1.28) показує, що адитивна група фактор-кільця S/S^2 є елементарною абелевою. Це означає, що

порядок кожного елемента з R/S^2 не більший за p^2 . Використовуючи аналогічні міркування та індукцію, можна показати, що порядок кожного елемента з R/S^k не більший за p^k , $k \in \mathbb{N}$. Якщо $A \in R$ -модулем, то це означає, що порядок кожного елемента з $\Omega_{S,k}(A)$ не більший за p^k , $k \in \mathbb{N}$. З іншого боку, припустимо, що $A \neq \Omega_{S,k}(A)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. У цьому випадку $\Omega_{S,k}(A)$ містить такий елемент a , що $a \notin \Omega_{S,k-1}(A)$. Тоді $aR \cong_R R/S^n$. Це означає, що порядки елементів адитивної групи модуля A не обмежені.

Нехай G — група, R — кільце, A — RG -модуль. A називатимемо RG -квазіскінченним, якщо A не має скінченної композиційної довжини, але кожен власний RG -підмодуль з A має скінченну композиційну довжину. Очевидно, що кожен RG -квазіскінченний модуль артиновий. І навіть більше, або A містить такий власний RG -підмодуль C , що A/C є простим RG -модулем, або A є об'єднанням своїх власних підмодулів.

Навпаки, якщо A — артиновий RG -модуль, то розглянемо сім'ю

$$\mathfrak{M} = \{B \mid B - RG\text{-підмодуль з } A,$$

який має нескінченний зростаючий RG -ряд, фактори якого прості}.

Оскільки модуль A артиновий, впорядкована за включенням сім'я $\mathfrak{M}$ має мінімальний елемент C . Очевидно, що C — квазіскінченний RG -підмодуль.

Лема 3.1. Нехай G — скінченна група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — квазіскінченний RG -модуль. Якщо $A \neq [A, G]$, то A є тривіальним RG -модулем.

Доведення. Як було зазначено вище, A є артиновим RG -модулем. Оскільки група G скінченна, модуль A артиновий як R -модуль (див., наприклад, [11], теорема 5.2). Тоді A є R -періодичним (див., наприклад, [12], теорема 7.13). Маємо розклад $A = \bigoplus_{Q \in \pi} A_Q$, де A_Q — Q -компонента модуля A , $\pi = \text{Ass}_R(A)$. З того факту, що модуль A артиновий, випливає, що множина π скінченна. Якщо припустити, що A_Q є власним підмодулем модуля A , то A має RG -композиційний ряд. Отже, $A = A_P$. Інакше кажучи, A є P -модулем для деякого максимального ідеалу P . Маємо розклад

$$A = D \oplus B,$$

де D — подільний підмодуль, D — пряма сума скінченної кількості прюферових P -модулів, а B — скінченнопоряджений підмодуль. Оскільки D є подільною частиною модуля A , то D — RG -модуль. Очевидно, що D не має скінченного RG -композиційного ряду. Це означає, що $D = A$.

Нехай $C = [A, G]$. Оскільки C є власним RG -підмодулем, то він має скінченний RG -композиційний ряд. Зокрема, $C \leq \Omega_{P,n}(A)$ для деякого натурального числа n . Як зазначено вище, порядки елементів адитивної групи підмодуля C обмежені. Для кожного елемента $g \in G$ відображення $\phi : A \rightarrow C$, визначене за правилом $\phi(a) = a(g-1)$, $a \in A$, є R -ендоморфізмом. Тоді $\text{Im}(\phi) = A(g-1) \cong_R A/\text{Ker}(\phi) = C_A(g)$. Якщо припустити, що $\text{Ker}(\phi)$ є ненульовим R -підмодулем, то $A/\text{Ker}(\phi)$ — ненульовий подільний R -модуль. Як зазначено вище, у цьому випадку порядки елементів адитивної групи модуля $A/\text{Ker}(\phi)$ не є обмеженими. З іншого боку, порядки елементів адитивної групи підмодуля C обмежені, що неможливо. Отримана суперечність показує, що $C_A(g) = A$. Це має місце для всіх $g \in G$, $A = C_A(G)$.

Лема 3.2. Нехай G — скінченна група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — артиновий R -подільний RG -модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є тривіальним RG -модулем.

Доведення. Маємо розклад $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_k$, де B_j — прюферовий P -модуль [12] (теорема 7.13), а число $k = a_R(A)$ є інваріантом модуля A . Як зазначено раніше, оскільки модуль A артиновий, то A містить квазіскінченний RG -підмодуль C . Легко показати, що C є R -подільним підмодулем. Якщо $C = A$, то результат випливає з леми 3.1. Припустимо, що $A \neq C$. Маємо розклад $A = C \oplus D$ для деякого ненульового R -підмодуля D (див., наприклад, [11], теорема 5.13). Зокрема, $a_R(D) < a_R(A)$. Це означає, що $a_R(A/C) < a_R(A)$. Використовуючи цей факт та індукцію, отримуємо, що A має скінченний ряд

$$C = C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_n = A$$

таких RG -підмодулів, що $C_{j+1}/C_j \in RG$ -квазіскінченними, $1 \leq j \leq n$. Згідно з лемою 3.1 фактор C_2/C_1 тривіальний. Іншими словами, $[C_2, G] \leq C_1$. Розглянемо для кожного елемента $g \in G$ відображення $\phi : C_2 \rightarrow C_1$, визначене за правилом $\phi(a) = a(g-1)$, $a \in C_2$. Воно є R -ендоморфізмом, і тому $\text{Im}(\phi) = C_2(g-1) \cong_R C_2/\text{Ker}(\phi) = C_{C_2}(g)$. Маємо рівність $ag = a + c_g$, де $c_g = a(g-1)$. Тоді

$$ag^2 = (ag)g = (a + c_g)g = ag + c_g g = a + c_g + c_g = a + 2c_g.$$

Скориставшись індукцією, переконаємося, що $ag^n = a + nc_g$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $s = |G|$. Тоді $g^s = 1$ і $a = ag^s = a + sc_g$. Це означає, що $0 = sc_g = sa(g-1)$. Інакше кажучи, порядки елементів адитивної групи модуля $C_2(g-1)$ обмежені. Використовуючи міркування з доведення леми 3.1, отримуємо, що $C_2(g-1) = \langle 0 \rangle$. Оскільки це має місце для кожного елемента $g \in G$, то $[C_2, G] = \langle 0 \rangle$. Провівши аналогічні міркування, після скінченної кількості кроків отримаємо, що $[A, G] = \langle 0 \rangle$.

Лема 3.3. Нехай G — скінченна група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — RG -модуль, який є P -модулем для деякого максимального ідеалу P . Припустимо, що A містить такий R -модуль B , що A/B — подільний артиновий модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то $A/[G, A] \neq \Omega_{P,k}(A/[G, A])$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Покладемо $C = \bigcap_{g \in G} Bg$. Згідно з наслідком 2.5 C є RG -підмодулем, а A/C — артиновим R -модулем. Тоді A/C є прямою сумою скінченної кількості прюферових P -модулів та скінченнопородженого підмодуля D/C (див., наприклад, [12], теорема 7.13).

Оскільки підмодуль D/C скінченнопороджений і R -періодичний, то $D/C = \Omega_{P,k}(D/C)$ для деякого натурального числа k . З цього факту випливає, що A містить таку G -інваріантну підгрупу E , що $E/C = \Omega_{P,k}(A/C)$ — RG -підмодуль, який є скінченнопородженим R -підмодулем. Це означає, що $(A/C)/(E/C) \cong A/E$ є ненульовим артиновим подільним модулем. Згідно з лемою 3.2 A/E — тривіальний RG -модуль, тобто $[G, A] \leq E$. Оскільки модуль A/E R -подільний, то $A/E \neq \Omega_{P,k}(A/E)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Це означає, що $A/[G, A] \neq \Omega_{P,k}(A/[G, A])$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Нехай R — дедекіндова область, A — R -модуль, $x \in R$. Підмодуль B з A називають x -сервантним, якщо $Bx = B \cap Ax$.

Якщо L — ідеал з R , а B — x -сервантний підмодуль з A для кожного $x \in L$, то B називатимемо L -сервантним підмодулем. Підмодуль B називають сервантним, якщо він є R -сервантним.

Наслідок 3.1. Нехай G — скінченна група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — RG -модуль, який є P -модулем для деякого максимального ідеалу P . Припустимо, що $A \neq \Omega_{P,k}(A)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то $A/[G, A] \neq \Omega_{P,k}(A/[G, A])$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Припустимо спочатку, що A розкладається у пряму суму циклічних підмодулів. Використавши той факт, що $A \neq \Omega_{P,k}(A)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, можна показати, що A містить такий R -підмодуль C , що

$$A/C = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} d_n R,$$

де $\text{Ann}_R(d_n) = P^n$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $y \in P \setminus P^2$. Розглянемо R -підмодуль B/C з A/C , породжений елементами $d_n - d_n y$, $n \in \mathbb{N}$. Справджуються рівності

$$(d_1 + B)y = d_1 y + B,$$

$$(d_2 + B)y = d_2 y + B = d_2 y + d_1 - d_2 y + B = d_1 + B$$

і

$$(d_{n+1} + B)y = d_{n+1} y + B = d_{n+1} y + d_n - d_{n+1} y + B = d_n + B, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ці рівності показують, що A/B є прюферовим P -модулем.

Припустимо тепер, що A не має розкладу у пряму суму циклічних підмодулів. Тоді A містить R -підмодуль D , який задовольняє такі умови: D — пряма сума циклічних підмодулів, D — сервантний підмодуль модуля A , A/D — R -подільний модуль (див., наприклад, [12], розділ 9). Оскільки A/D є подільним P -модулем, то A/D — пряма сума прюферових P -підмодулів (див., наприклад, [12], теорема 5.26). Тоді A/D має такий підмодуль B/D , що A/B є прюферовим P -модулем. Тепер можемо застосувати лему 3.3.

Твердження 3.1. Нехай G — скінченна група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — RG -модуль, який є P -модулем для деякого максимального ідеалу P . Припустимо, що $A \neq \Omega_{P,k}(A)$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то анулятор $\text{Ann}_R([G, A])$ ненульовий.

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай $\text{Ann}_R([G, A]) = \langle 0 \rangle$. Це означає, що $\Omega_{P,k}([G, A]) \neq [G, A]$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Використовуючи аргументи з доведення наслідку 3.1, отримуємо, що $[G, A]$ містить такий R -підмодуль B , що $[G, A]/B$ є прюферовим P -модулем. Виберемо такий елемент $a \in [G, A]$, що $a \notin B$ і $(aR + B)/B = \Omega_{P,1}([G, A]/B)$. З того факту, що $[G, A]/B$ є R -подільним модулем, випливає, що A/B містить такий R -підмодуль C/B , що $A/B = ([G, A]/B) \oplus (C/B)$ (див., наприклад, [12], теорема 5.13 і твердження 8.9). Тоді $A/C \cong_R (A/B)/(C/B) \cong_R [G, A]/B$ є прюферовим P -модулем і $C \cap [G, A] = B$. Згідно з наслідком 2.5 C містить такий RG -підмодуль E , що A/E — артиновий R -модуль. Згідно з таким вибором $a \notin E$. Нехай D — такий RG -підмодуль з A , що $E \leq D$ й $a \notin D$. Тоді A/D є RG -монолітичним RG -підмодулем. Згідно з таким вибором A/D не є скінченнопородженим як R -модуль. Тоді за лемою 2.4 A/D є подільним артиновим R -модулем. З леми 3.2 випливає, що $[G, A] \leq D$. З іншого боку, $a \notin D$ та $a \in [G, A]$, що неможливо. Отримана суперечність показує, що $\text{Ann}_R([G, A]) \neq \langle 0 \rangle$.

Наслідок 3.2. Нехай G — скінченна p -група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — такий RG -модуль, який є P -модулем для деякого максимального ідеалу P , що $p = \text{char}(R/P)$. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним модулем.

Доведення. Якщо $A = \Omega_{P,k}(A)$ для деякого натурального k , то $P^k \leq \text{Ann}_R(A)$. Як зазначено вище, порядок кожного елемента з R/P^k не перевищує p^k . Згідно з твердженням 2.2 A збігається з членом верхнього G -центрального ряду модуля A , який має скінченний номер. Інакше кажучи, A є G -нільпотентним модулем.

Припустимо тепер, що $A \neq \Omega_{P,k}(A)$ для кожного натурального k . Тоді з твердження 3.1 випливає, що анулятор $\text{Ann}_R([G, A])$ ненульовий. З того факту, що A є P -модулем, випливає, що $\text{Ann}_R([G, A]) = P^s$ для деякого натурального s . Знову використовуючи твердження 2.2, переконуємося, що член верхнього G -центрального ряду модуля A , який має скінченний номер, містить $[G, A]$. Це означає, що A є G -нільпотентним модулем.

Лема 3.4. Нехай G — скінченна p -група, R — дедекіндова область, A — RG -модуль, який є Q -модулем для деякого максимального ідеалу Q . Припустимо, що $\text{char}(R/Q) = q \neq p$. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є тривіальним RG -модулем.

Доведення. Справджується рівність

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_{Q,k}(A).$$

З рівності $\text{Ann}_R(\Omega_{Q,k+1}(A)/\Omega_{Q,k}(A)) = Q$ та твердження 2.3 випливає, що кожен фактор $\Omega_{Q,k+1}(A)/\Omega_{Q,k}(A)$ є G -центральним. Нехай $a \in \Omega_{Q,2}(A)$, $g \in G$. Тоді $a(g-1) = a_1 \in \Omega_{Q,1}(A)$ і $ag = a + a_1$. Окрім того,

$$ag^2 = (ag)g = (a + a_1)g = ag + a_1g = a + a_1 + a_1 = a + 2a_1,$$

і аналогічно $ag^n = a + na_1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Якщо $|G| = p^s$, то отримуємо, що $p^s a_1 = 0$. З іншого боку, порядок кожного елемента з $\Omega_{Q,k}(A)$ ділить q^k . Це означає, що $a_1 = 0$. Отже, G -центр модуля A містить $\Omega_{Q,2}(A)$. Використовуючи аналогічні міркування та індукцію, переконуємося, що A є тривіальним модулем.

Лема 3.5. Нехай G — скінченна p -група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — RG -модуль, який є періодичним як R -модуль. Припустимо, що $\text{char}(R/P) = p$ для кожного $P \in \text{Ass}_R(A)$. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним модулем.

Доведення. Нехай $P \in \text{Ass}_R(A) = \pi$. З того факту, що $\text{char}(R/P) = p$, випливає, що адитивна група поля R/P є елементарною абелевою p -групою. Це означає, що $P = p(a + P) = pa + P$, а отже, $pa \in P$ для кожного елемента $a \in R$. Інакше кажучи, $pR \leq P$. Таке включення має місце для кожного ідеалу $P \in \pi$, тому $pR \leq \bigcap_{P \in \pi} P = L$. Кожен ідеал $P \in \pi$ анулює P -компоненту модуля A , а тому їх перетин анулює весь модуль A . Отже, $L \leq \text{Ann}_R(A)$. Оскільки $\text{char}(R) = 0$, то $pR \neq \{0\}$. З доведеного вище випливає, що ідеал L ненульовий, а отже, й анулятор $\text{Ann}_R(A)$ також ненульовий. Оскільки R є дедекіндовою областю, то $\text{Ann}_R(A)$ є добутком скінченної кількості максимальних ідеалів. Це означає, що множина $\text{Ass}_R(A)$ скінченна. Отже, модуль A розкладається у пряму суму скінченної множини своїх P -компонент. З наслідку 3.2 випливає, що кожна P -компонента модуля A є G -нільпотентною. З того факту, що множина π скінченна, випливає, що A також є G -нільпотентним модулем.

Наслідок 3.3. Нехай G — скінченна p -група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — RG -модуль, який є періодичним як R -модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним модулем.

Доведення. Маємо розклад $A = \bigoplus_{P \in \pi} A_P$, де $\pi = \text{Ass}_R(A)$. Нехай

$$\sigma = \{P \mid P \in \text{Ass}_R(A) \text{ і } \text{char}(R/P) = p\},$$

$$\tau = \pi \setminus \sigma.$$

Для модуля A маємо розклад $A = B \oplus C$, де $B = \bigoplus_{P \in \sigma} A_P$, $C = \bigoplus_{P \in \tau} A_P$. Як було видно раніше, множина σ скінченна. Згідно з лемою 3.5 RG -підмодуль B є G -нільпотентним. З леми 3.4 випливає, що кожна Q -компонента A_Q є тривіальною для всіх $Q \in \tau$. Це означає, що G -центр модуля A містить C . Отже, A є G -нільпотентним модулем.

Наслідок 3.4. Нехай G — скінченна нільпотентна група, R — періодично необмежена дедекіндова область, A — RG -модуль, який є періодичним як R -модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним модулем.

Доведення. Маємо розклад

$$G = Dr_{p \in \Pi(G)} S_p,$$

де S_p — силовська p -підгрупа групи G , $p \in \Pi(G)$. Застосуємо індукцію за порядком $|\Pi(G)|$. Якщо $\Pi(G) = p$, то результат випливає з наслідку 3.3. Припустимо тепер, що $|\Pi(G)| > 1$. Нехай $p \in \Pi(G)$. Покладемо

$$\theta = \Pi(G) \setminus p, \sigma = \{P \mid P \in \text{Ass}_R(A) \text{ і } \text{char}(R/P) = p\}, \quad \tau = \Pi \setminus \sigma.$$

Маємо розклад $A = B \oplus C$, де $B = \bigoplus_{P \in \sigma} A_P$, $C = \bigoplus_{Q \in \tau} A_Q$. Зауважимо, що адитивна група підмодуля A_Q є q -групою, де $q = \text{char}(R/Q)$, $Q \in \theta$. Це означає, що адитивна група підмодуля C є p' -групою. Маємо рівність $C = C_C(S_p) \times [S_p, C]$ (див., наприклад, [1], твердження 2.12). І навіть більше, $[S_p, [S_p, C]] = [S_p, C]$. Очевидно, що $[S_p, C]$ є RG -підмодулем. Якщо припустити, що підмодуль $[S_p, C]$ ненульовий, то з рівності $[S_p, [S_p, C]] = [S_p, C]$ випливає $[S_p, C] = [G, [S_p, C]]$, що неможливо. Ця суперечність доводить, що $[S_p, C] = \langle 0 \rangle$ або $C_C(S_p) = C$. Отже, можемо розглядати C як $R(G/S_p)$ -модуль. Згідно з індуктивним припущенням деякий G -гіперцентр модуля A , який має скінченний номер, містить C .

Покладемо $H = Dr_{q \in \theta} S_q$. Використовуючи аналогічні міркування, отримуємо $C_B(H) = B$. Отже, можемо розглядати B як $R(G/H)$ -модуль. Згідно з лемою 3.5 деякий G -гіперцентр модуля A , який має скінченний номер, містить B . Обидва ці факти вказують на те, що A є G -нільпотентним модулем.

Лема 3.6. Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, A — RG -модуль, який є періодичним як R -модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна.

Доведення. Нехай L — нільпотентний резидуал групи G . Виберемо довільний скінченнопороджений R -підмодуль K з A . Нехай S — RG -підмодуль модуля A , породжений K . Оскільки група G скінченна, то S є скінченнопородженим як R -модуль. Зауважимо, що кожен скінченнопороджений R -періодичний модуль має скінченний R -головний ряд (див., наприклад, [12], теорема 7.8). Тоді S має скінченний RG -композиційний ряд. З твердження 2.1 випливає, що S є G -нільпотентним модулем. Це означає, що фактор-група $G/C_G(S)$ нільпотентна [9], і тому $L \leq C_G(S)$. Оскільки це має місце для кожного скінченнопородженого RG -підмодуля, то $L \leq C_G(A)$, а фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна.

Твердження 3.2. Нехай G — група, R — дедекіндова область, A — RG -модуль, який є вільним від R -скруту. Тоді кожен член верхнього G -центрального ряду модуля A є сервантним RG -підмодулем.

Доведення. Розглянемо верхній G -центральный ряд

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \dots C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \dots C_\gamma$$

модуля A , і нехай a — такий елемент з A , що $ax \in C_1$ для деякого елемента $x \in R$. Тоді

$$0 = ax(g - 1) = axg - ax = agx - ax = (ag - a)x.$$

Оскільки модуль A вільний від R -скруту, то $ag - a = 0$, і тому $a(g - 1) = 0$. Це означає, що $a \in C_1$. Використовуючи трансфінітну індукцію, переконуємося, що кожен підмодуль C_α є сервантним.

Твердження 3.3. *Нехай G — група, R — дедекіндова область, A — RG -модуль, який є вільним від R -скруту. Припустимо, що модуль A G -гіперцентральный. Якщо B — RG -підмодуль модуля A , який має скінченний R -ранг n , то член верхнього G -центрального ряду модуля A з номером n містить B .*

Доведення. Скористаємось індукцією за R -рангом підмодуля B . Розглянемо верхній G -центральный ряд

$$\langle 0 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \dots C_\alpha \leq C_{\alpha+1} \leq \dots C_\gamma = A$$

модуля A . З того факту, що A є G -гіперцентральныйм модулем, випливає, що $B_1 = B \cap C_1 \neq \langle 0 \rangle$. Якщо $B_1 = B$, то все доведено. Припустимо, що $B_1 \neq B$. Згідно з твердженням 3.2 фактор-модуль A/C_1 є вільним від R -скруту. Його RG -підмодуль

$$(B + C_1/C_1) \cong_R (B/(B \cap C_1)) = B/B_1$$

має R -ранг, який менший за R -ранг підмодуля B . Згідно з індуктивним припущенням отримуємо, що гіперцентр фактор-модуля A/C_1 , який має номер $n - 1$, містить $(B + C_1/C_1)$. Тоді гіперцентр модуля A з номером n містить B .

Лема 3.7. *Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, яка має нескінченну множину простих ідеалів, A — RG -модуль, який є вільним від скруту як R -модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -гіперцентральныйм модулем, а фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна.*

Доведення. Нехай L — нільпотентний резидуал групи G . Виберемо довільний скінченно-породжений R -підмодуль K з A , і нехай S — RG -підмодуль з A , породжений K . Оскільки група G скінченна, то S є скінченнопородженим як R -модуль. Тоді

$$S = D_1 \oplus \dots \oplus D_{n-1} \oplus D_n,$$

де $D_j \cong_R R$, $1 \leq j \leq n - 1$, D_n ізоморфний деякому ідеалу з R (див., наприклад, [12], теорема 7.8). Нехай P — довільний максимальний ідеал з R . Розглядатимемо S/SP як векторний простір над полем R/P . Цей векторний простір має розмірність n . Тоді S/SP має скінченний G -композиційний ряд. З твердження 2.1 випливає, що S/SP є G -нільпотентним. З того факту, що $\dim_{R/P}(S/SP) = n$, випливає, що S/SP має скінченний G -центральный ряд, довжина якого не перевищує n . Це означає, що $[G, n S] \leq SP$.

Нехай

$$\sigma = \{P \mid P \text{ — максимальний ідеал з } R\}.$$

Оскільки множина σ нескінченна, то $\bigcap_{P \in \sigma} P = \langle 0 \rangle$. Ця рівність разом з рівністю $SP = D_1P \oplus \dots \oplus D_{n-1}P \oplus D_nP$ показують, що $\bigcap_{P \in \sigma} SP = \langle 0 \rangle$. Таким чином, отримуємо, що $[G, n S] \leq \bigcap_{P \in \sigma} SP = \langle 0 \rangle$, і тому G -гіперцентр з номером n містить S . Зокрема, S є G -нільпотентним модулем. Крім того, це означає, що фактор-група $G/C_G(S)$ нільпотентна [9], і тому $L \leq C_G(S)$. Оскільки це має місце для кожного скінченнопородженого RG -підмодуля, то A є G -гіперцентральныйм модулем, $L \leq C_G(A)$, зокрема фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна.

Теорема 3.1. Нехай G — скінченна група, R — дедекіндова область, яка має нескінченну множину простих ідеалів, A — RG -модуль, який вільний від скруту як R -модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним модулем, а фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна.

Доведення. Згідно з лемою 3.7 A є G -гіперцентральною модулем. Нехай a — довільний елемент з A , $|G| = k$. Тоді RG -підмодуль S , породжений aR , має не більше ніж k породжуючих. Оскільки група G скінченна, то S — скінченнопороджений R -модуль k елементами. Це означає, що S має R -ранг n , який не більший ніж k . Тоді

$$S = D_1 \oplus \dots \oplus D_{n-1} \oplus D_n,$$

де $D_j \cong_R R$, $1 \leq j \leq n-1$, D_n ізоморфний деякому ідеалу з R (див., наприклад, [12], теорема 7.8). Згідно з твердженням 3.3 G -гіперцентр модуля A з номером n містить S . Оскільки a — довільний елемент з A , то A збігається з G -гіперцентром, який має номер n . Зокрема, A є G -нільпотентним модулем. Це означає, що фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна [9].

Теорема 3.2. Нехай G — скінченна група, R — періодично необмежена дедекіндова область, яка має нескінченну множину простих ідеалів, A — RG -модуль. Якщо A не містить ненульових G -досконалих факторів, то A є G -нільпотентним модулем, а фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна.

Доведення. Нехай T — R -періодична частина модуля A . Тоді очевидно, що T є таким RG -підмодулем з A , що A/T вільний від R -скруту. Згідно з теоремою 3.1 фактор-модуль A/T G -нільпотентний.

Нехай M — максимальна R -незалежна підмножина з A і B — R -підмодуль модуля A , породжений M . Тоді B вільний від скруту й A/B є R -періодичним. Згідно з лемою 2.2 B містить такий RG -підмодуль C , що A/C є R -періодичним. Із включення $C \leq B$ випливає, що C є вільним від R -скруту. Зокрема, $C \cap T = \langle 0 \rangle$. Застосовуючи теорему Ремака, отримуємо, що A занурюється в $A/C \times A/T$. З наслідку 3.4 і леми 3.6 видно, що A/C є G -нільпотентним модулем. Таким чином, модуль A G -нільпотентний. Це означає, що фактор-група $G/C_G(A)$ нільпотентна [9].

Теорема 3.3. Нехай G — група. Припустимо, що G містить таку нільпотентну нормальну підгрупу S , що G/S скінченна. Якщо G не містить нетривіальних G -досконалих факторів, то G нільпотентна.

Доведення. Оскільки G/S є скінченною групою без нетривіальних досконалих факторів, то G/S нільпотентна. Нехай

$$A = S/[S, S].$$

Можемо розглядати A як $\mathbb{Z}H$ -модуль, де $H = G/S$ — скінченна нільпотентна група. Очевидно, що кільце цілих чисел є періодично необмеженою дедекіндовою областю, яка має нескінченну множину простих ідеалів. Тоді згідно з теоремою 3.2 $\mathbb{Z}H$ -модуль A є H -нільпотентним. Це означає, що фактор-група $G/[S, S]$ нільпотентна. Застосовуючи теорему 7 з роботи [7], отримуємо, що G також нільпотентна.

Леонід Курдаченко вдячний за підтримку, надану Інститутом математики Ісаака Ньютона та Единбурзьким університетом у рамках програми LMS Solidarity Supplementary Grant Program.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. A. Ballester-Bolinches, L. A. Kurdachenko, J. Otal, T. Pedraza, *Infinite groups with many permutable subgroups*, Rev. Mat. Iberoam., **24**, № 3, 745–764 (2008).
2. J. C. Beidleman, D. J. S. Robinson, *On the structure of the normal subgroups of a group: nilpotency*, Forum Math., **3**, 581–593 (1991); DOI:10.1515/form.1991.3.581.
3. C. J. B. Brookes, *Groups with every subgroup subnormal*, Bull. Lond. Math. Soc., **15**, № 3, 235–238 (1983); DOI:10.1112/blms/15.3.235.
4. C. J. B. Brookes, *Abelian subgroups and Engel elements of soluble groups*, J. Lond. Math. Soc. (2), **32**, № 3, 467–476 (1985); DOI:10.1112/jlms/s2-32.3.467.
5. C. J. B. Brookes, *Engel elements of soluble groups*, Bull. Lond. Math. Soc., **18**, № 1, 7–10 (1986); DOI:10.1112/blms/18.1.7.
6. K. W. Gruenberg, *The upper central series in soluble groups*, Illinois J. Math., **5**, № 3, 436–466 (1961); DOI:10.1215/ijm/1255630890.
7. P. Hall, *Some sufficient conditions for a group to be nilpotent*, Illinois J. Math., **2**, № 4B, 787–801 (1958); DOI:10.1215/ijm/1255448649.
8. P. Hall, *The Frattini subgroup of finitely generated groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **11**, № 1, 327–352 (1961); DOI:10.1112/plms/s3-11.1.327.
9. L. A. Kaloujnine, *Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen*, Bericht Math. Tagung Berlin, **4**, 164–172 (1953).
10. L. A. Kurdachenko, J. Otal, I. Ya. Subbotin, *Groups with prescribed quotient groups and associated module theory*, World Sci., New Jersey (2002).
11. L. A. Kurdachenko, J. Otal, I. Ya. Subbotin, *Artinian modules over group rings*, Front. Math., Birkhäuser, Basel (2007).
12. L. A. Kurdachenko, N. N. Semko, I. Ya. Subbotin, *Insight into modules over Dedekind domains*, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv (2008).
13. J. C. Lennox, D. J. S. Robinson, *The theory of infinite soluble groups*, Clarendon Press, Oxford (2004).

Одержано 08.04.23