

Віктор Юськович¹ (Національний технічний університет України „КПІ імені Ігоря Сікорського”, Київ)

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ’ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТИБКАМИ

Consider a one-dimensional stochastic differential equation with jumps

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sum_{k=1}^m b_k(X(t-))dZ_k(t),$$

where Z_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, are independent centered Lévy processes with finite second moments. We prove that if the coefficient $a(x)$ has a certain power asymptotics as $x \rightarrow \infty$ and the coefficients b_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, satisfy certain growth condition, then a solution $X(t)$ has the same asymptotics as the solution of $dx(t) = a(x(t))dt$ as $t \rightarrow \infty$ a.s.

Розглянуто одновимірне стохастичне диференціальне рівняння зі стрибками

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sum_{k=1}^m b_k(X(t-))dZ_k(t),$$

де Z_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, — незалежні центровані процеси Леві зі скінченними другими моментами. Доведено, що якщо коефіцієнт $a(x)$ має деяку степеневу асимптотику при $x \rightarrow \infty$, а коефіцієнти b_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, задовольняють певну умову на зростання, то розв’язок $X(t)$ м. н. має таку ж асимптотику при $t \rightarrow \infty$, що і розв’язок звичайного диференціального рівняння $dx(t) = a(x(t))dt$.

1. Вступ. Як правило, розглядають два типи поведінки розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь при $t \rightarrow \infty$: прямування до нескінченності та рекурентність. У цій статті будемо припускати, що розв’язок стохастичного диференціального рівняння прямує до нескінченності, та досліджувати його точну асимптотику.

Уперше це питання розглянули Гіхман і Скороход [3] для одновимірного стохастичного диференціального рівняння вигляду

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t), \quad (1)$$

де W — одновимірний вінерівський процес. Зокрема, вони знайшли достатні умови того, що $X(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, і $X(t) \sim x(t)$, $t \rightarrow \infty$, м.н., де x — розв’язок звичайного диференціального рівняння

$$dx(t) = a(x(t))dt. \quad (2)$$

Пізніше цю задачу досліджували в роботі [4]. У роботі [1] розглянуто деякі типи неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь, а в статтях [9, 10] — стохастичні диференціальні рівняння з негауссівським шумом.

У монографії [2] досліджено питання прямування до нескінченності та рекурентності розв’язку системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, а також поведінку полярного кута розв’язку двовимірного стохастичного диференціального рівняння, а в статті [12] —

¹ E-mail: viktyusk@gmail.com.

асимптотичну поведінку багатовимірних стохастичних диференціальних рівнянь шляхом порівняння з лінійними звичайними диференціальними рівняннями. У статті [13] розглянуто багатовимірне стохастичне диференціальне рівняння вигляду (1) та досліджено поведінку розв'язку при $t \rightarrow \infty$ м.н.: умови прямування модуля розв'язку до нескінченності, стабілізації кута $X(t)/|X(t)|$ та асимптотику модуля розв'язку. У статті [11] аналогічне питання вивчалось для випадку адитивного шуму Леві.

Питання про асимптотичну поведінку стохастичних диференціальних рівнянь з мультиплікативним шумом Леві не досліджене. У цій статті будемо розглядати стохастичне диференціальне рівняння зі стрибками вигляду

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sum_{k=1}^m b_k(X(t-))dZ_k(t),$$

де Z_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, — незалежні центровані процеси Леві зі скінченним другим моментом. Ми доведемо, що якщо коефіцієнт $a(t)$ має деяку степеневу асимптотику при $t \rightarrow \infty$, а коефіцієнти b_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, задовольняють певну умову на зростання, то розв'язок $X(t)$ м.н. має таку ж асимптотику при $t \rightarrow \infty$, що і розв'язок звичайного диференціального рівняння (2).

Опишемо коротко структуру статті. У пункті 2 доведено деякі леми про асимптотичну поведінку стохастичних інтегралів за вінерівським процесом та за компенсованою пуассонівською мірою. У пункті 3 встановлено два основні результати про асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі стрибками: теорему 1, в якій коефіцієнт зносу еквівалентний деякій додатній сталій, та теорему 3, в якій коефіцієнт зносу еквівалентний деякій додатній степеневій функції. В обох теоремах накладається деяка умова про швидкість зростання характеристик шуму. У пункті 4 наведено доведення леми, необхідної для доведення теорем у пункті 3.

2. Асимптотика стохастичних інтегралів. У цьому пункті ми отримаємо деякі допоміжні результати щодо асимптотики стохастичних інтегралів зі змінною верхньою межею t при $t \rightarrow \infty$.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — імовірнісний простір з потоком $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $W = W(t)$ — $\mathbb{F}$ -вінерівський процес, $N = N(dt, du)$ — $\mathbb{F}$ -пуассонівська випадкова міра на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$,² незалежна від W , з характеристичною мірою $dt \cdot \nu(du)$, де міра ν така, що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) < \infty$, $\tilde{N} = \tilde{N}(dt, du) := N(dt, du) - dt \cdot \nu(du)$.

Лема 1. Нехай $M = M(t)$ — квадратично інтегрований мартингал. Якщо $\mathbb{E}M^2(t) = O(t^\gamma)$, $t \rightarrow \infty$, для деякого $\gamma < 2$, то $\frac{M(t)}{t} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, м.н.

Доведення. З умови випливає, що існує таке $T \geq 0$, що $\mathbb{E}M^2(t) \leq Ct^\gamma$, $t \geq T$, де $C \geq 0$. Нехай $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ таке, що $2^{k+1} \geq T$. Оцінимо ймовірність:

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \left| \frac{M(t)}{t} \right| \geq \varepsilon \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{|M(t)|}{2^k} \geq \varepsilon \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \leq 2^{k+1}} |M(t)| \geq \varepsilon 2^k \right\}$$

² $\mathbb{R}_+$ позначає множину невід'ємних дійсних чисел.

$$\leq \frac{\mathbb{E}M^2(2^{k+1})}{(\varepsilon 2^k)^2} \leq \frac{C(2^{k+1})^\gamma}{\varepsilon^2 2^{2k}} = \frac{C2^\gamma}{\varepsilon^2} (2^{\gamma-2})^k \quad (\text{за нерівністю Дуба}).$$

Для $n \in \mathbb{N}$ таких, що $2^{n+1} \geq T$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{M(t)}{t} \right| \geq \varepsilon\right\} &\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{t \geq 2^n} \left| \frac{M(t)}{t} \right| \geq \varepsilon\right\} \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \left| \frac{M(t)}{t} \right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{C2^\gamma}{\varepsilon^2} \sum_{k=n}^{\infty} (2^{\gamma-2})^k. \end{aligned}$$

Останній ряд збігається до 0 при $n \rightarrow \infty$ (оскільки $\gamma - 2 < 0$), тому ймовірність на початку ланцюга нерівностей дорівнює 0. Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{M(t)}{t} \right| > 0\right\} &= 0 \implies \mathbb{P}\left\{\limsup_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{M(t)}{t} \right| = 0\right\} = 1 \\ &\implies \mathbb{P}\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{M(t)}{t} \right| = 0\right\} = 1 \implies \mathbb{P}\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0\right\} = 1, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Наслідок 1. Нехай прогресивно вимірний випадковий процес $b = b(t)$ такий, що $\mathbb{E}b^2(t) \leq C(1 + t^{2\beta})$, $t \geq 0$, для деяких $C \geq 0$ і $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$. Тоді

$$\frac{1}{t} \int_0^t b(s) dW(s) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Покладемо $M(t) = \int_0^t b(s) dW(s)$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M^2(t) &= \mathbb{E} \int_0^t b^2(s) ds && (\text{за ізометрією Іто}) \\ &= \int_0^t \mathbb{E}b^2(s) ds \leq \int_0^t C(1 + s^{2\beta}) ds = O(t^{2\beta+1}), \quad t \rightarrow \infty && (\text{за теоремою Фубіні}). \end{aligned}$$

Застосовуючи лему 1, завершуємо доведення.

Позначимо через $\mathcal{P}$ сигма-алгебру, породжену випадковими полями вигляду $c(t, u) = \zeta_0 \mathbb{I}_{t=0, u \in U_0} + \sum_{k=1}^n \zeta_k \mathbb{I}_{t \in (t_{k-1}, t_k], u \in U_k}$, де $n \in \mathbb{N}$, ζ_0 — $\mathcal{F}_0$ -вимірний випадковий величина, ζ_k — $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -вимірний випадковий величина, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $U_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \infty$.

Наслідок 2. Нехай $\mathcal{P}$ -вимірне випадкове поле $c = c(t, u)$ таке, що

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(t, u) \nu(du) \leq C(1 + t^{2\beta}), \quad t \geq 0,$$

для деяких $C \geq 0$ і $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$. Тоді

$$\frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(ds, du) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Покладемо $M(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(s, u) \tilde{N}(ds, du)$. Тоді

$$\mathbb{E} M^2(t) = \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \nu(du) ds \quad (\text{за ізометрією Іто})$$

$$= \int_0^t \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c^2(s, u) \nu(du) ds \quad (\text{за теоремою Фубіні})$$

$$\leq \int_0^t C(1 + s^{2\beta}) ds = O(t^{2\beta+1}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Застосовуючи лему 1, завершуємо доведення.

3. Асимптотика розв'язків стохастичних рівнянь. Нехай W_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, — вінерівський процес, $\tilde{N}_k$ — компенсована пуассонівська міра з компенсатором $dt \cdot \nu_k(du)$, де міра ν_k така, що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu_k(du) < \infty$, $k \in \{1, 2, \dots, l\}$, до того ж $W_1, W_2, \dots, W_m$, $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots, \tilde{N}_l$ незалежні.

Наступна теорема встановлює еквівалентність розв'язків стохастичних і звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли коефіцієнт зносу має додатну границю при $t \rightarrow \infty$, а характеристики шуму зростають не дуже швидко. Ця теорема є важливим результатом, який використовується далі (див. теорему 3) при встановленні степеневого типу зростання для розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких мають степеневе зростання.

Теорема 1. Нехай $a = a(t)$ та $b_k = b_k(t)$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, — прогресивно вимірні³ випадкові процеси, $c_k = c_k(t, u)$, $k \in \{1, 2, \dots, l\}$, — $\mathcal{P}$ -вимірні випадкові поля і $\mathbb{F}$ -узгоджений càdlàg⁴ випадковий процес $X = X(t)$ має стохастичний диференціал

$$dX(t) = a(t)dt + \sum_{k=1}^m b_k(t)dW_k(t) + \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}} c_k(t, u) \tilde{N}_k(dt, du),$$

до того ж $\mathbb{E} X^2(0) < \infty$. Припустимо, що:

(А) випадковий процес a обмежений і $a(t) \rightarrow A$, $t \rightarrow \infty$, м.н., де $A > 0$ — випадкова величина;

³Випадковий процес $a = a(t)$ назвемо прогресивно вимірним, якщо для будь-яких $t \geq 0$ звуження відображення a на множину $[0, t] \times \Omega$ є вимірним щодо сигма-алгебри $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

⁴Ми кажемо, що випадковий процес є càdlàg, якщо з імовірністю 1 його траєкторії є неперервними справа та мають ліві границі.

(Б) для деяких $C \geq 0$ і $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^m b_k^2(t) + \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}} c_k^2(t, u) \nu_k(du) \leq C(1 + |X(t-)|^{2\beta}), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Тоді $X(t) \sim At$, $t \rightarrow \infty$, м.н.

Доведення. Запишемо процес X в інтегральній формі:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t b_k(s) dW_k(s) + \sum_{k=1}^l \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_k(s, u) \tilde{N}_k(ds, du).$$

Крок 1. Спочатку перевіримо, що $\mathbb{E}X^2(t) \leq \tilde{C}(1+t^2)$, $t \geq 0$, для деякого $\tilde{C} > 0$. Аналогічно лемі 3.3.2 з книги [6] можна перевірити, що з умови (3) випливає, що $\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}X^2(t) < \infty$, $T \geq 0$. За нерівністю Коші – Буняковського

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \mathbb{E}X^2(t) &\leq \mathbb{E}X^2(0) + \mathbb{E} \left(\int_0^t a(s) ds \right)^2 \\ &\quad + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^m \int_0^t b_k(s) dW_k(s) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^l \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_k(s, u) \tilde{N}_k(ds, du) \right)^2 \right] \\ &=: E_1 + E_2(t) + E_3(t). \end{aligned}$$

Оцінимо доданки у правій частині:

$$E_1 = \mathbb{E}X^2(0) < \infty \quad \text{за припущенням,}$$

$$E_2(t) = \mathbb{E} \left(\int_0^t a(s) ds \right)^2 \leq C_1 t^2 \quad \text{для деякого } C_1 \geq 0, \text{ бо } a \text{ обмежене,}$$

$$E_3(t) = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=1}^m \int_0^t b_k(s) dW_k(s) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^l \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_k^2(s, u) \tilde{N}_k(ds, du) \right)^2 \right]$$

(оскільки W_i, W_j незалежні та $\tilde{N}_i, \tilde{N}_j$ незалежні при $i \neq j$)

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^m \left(\int_0^t b_k(s) dW_k(s) \right)^2 + \sum_{k=1}^l \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_k^2(s, u) \tilde{N}_k(ds, du) \right)^2 \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^m \int_0^t b_k^2(s) ds + \sum_{k=1}^l \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_k^2(s, u) \nu(du) ds \right] \quad (\text{за ізометрією Іто})$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \mathbb{E} \int_0^t \left(1 + |X(s-)|^{2\beta}\right) ds && \text{(за умовою (Б))} \\
&= \int_0^t \mathbb{E} \left(C(1 + |X(s-)|^{2\beta}) \right) ds && \text{(за теоремою Фубіні)} \\
&\leq C \left(t + \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds \right) && \text{(за нерівністю Єнсена).}
\end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо оцінку

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq C_2(1 + t^2) + C \int_0^t (\mathbb{E} X^2(s-))^\beta ds,$$

де⁵ $C_2 := C_1 \wedge \mathbb{E} X^2(0)$. Використовуючи лему Вендроффа (див. теорему 7.3 у [8]), яка є узагальненням леми Гронуолла – Беллмана, одержуємо

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq C_3 \left((1 - \beta)t + (1 + t^2)^{1-\beta} \right)^{\frac{1}{1-\beta}},$$

де $C_3 := (C_2 \wedge C)^{\frac{1}{1-\beta}}$, звідки неважко вивести, що

$$\mathbb{E} X^2(t) \leq \tilde{C}(1 + t^2), \quad t \geq 0,$$

де $\tilde{C} \geq 0$.

Крок 2. Знайдемо асимптотику розв'язку $X(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Поділимо стохастичне диференціальне рівняння на $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{X(t)}{t} &= \frac{X(0)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t a(s) ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^m \frac{1}{t} \int_0^t b_k(s) dW_k(s) + \sum_{k=1}^l \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_k(s, u) \tilde{N}_k(ds, du) \\
&=: T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) + T_4(t).
\end{aligned}$$

Дослідимо збіжність доданків у правій частині при $t \rightarrow \infty$. Маємо $T_1(t) = \frac{X(0)}{t} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. З умов теореми випливає, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t a(s) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = A \quad \text{м.н.}$$

⁵ $\wedge$ та $\vee$ позначають операції мінімуму та максимуму відповідно.

Для оцінки доданка T_3 зазначимо, що

$$\begin{aligned}\mathbb{E}b_k^2(t) &\leq \mathbb{E}\left(C(1 + |X(t-)|^{2\beta})\right) = C\left(1 + \mathbb{E}(X^2(t-))^\beta\right) \\ &\leq C\left(1 + (\mathbb{E}X^2(t-))^\beta\right) \quad (\text{за нерівністю Єнсена}) \\ &\leq C\left(1 + \left(\tilde{C}(1 + t^2)\right)^\beta\right) \leq C_4(1 + t^{2\beta}), \quad k \in \{1, 2, \dots, m\},\end{aligned}$$

де $C_4 \geq 0$, тому за наслідком 1

$$T_3(t) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{t} \int_0^t b_k(s) dW_k(s) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Аналогічно попередньому пункту,

$$\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} c_k^2(t, u) \nu_k(du) \leq C_4(1 + t^{2\beta}), \quad k \in \{1, 2, \dots, l\},$$

тому за наслідком 2

$$T_4(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c_k(s, u) \tilde{N}_k(ds, du) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

Таким чином, з одержаних збіжностей отримуємо твердження теореми.

Якщо замість умови (А) у попередній теоремі розглянути умову

(А') $A_- \leq a(t) \leq A_+$, $t \geq 0$, де $A_- > 0$, $A_+ > 0$ — випадкові величини,

то можна довести такий результат.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (А') та (Б). Тоді

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} a(t) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{X(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \quad \text{м.н.}$$

Для подальшого викладу необхідна наступна лема, доведення якої наведено у додатку (пункт 4).

Лема 2. Нехай $\alpha \in (0, 1)$; $f = f(x)$ — двічі неперервно диференційовна функція, така що

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & x \geq 1, \end{cases}$$

до того ж $f(x) \leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $0 < x < 1$; $c = c(x)$ — вимірна функція, така що для деяких $C \geq 0$ і $\beta \in \left[0, \frac{1+\alpha}{2}\right)$

$$c^2(x) \leq C(1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R};$$

$\nu = \nu(du)$ — міра на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, така що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) < \infty$.

Тоді:

$$(A) \int_{\mathbb{R}} (f(x + c(x)u) - f(x) - f'(x)c(x)u) \nu(du) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty;$$

$$(B) \int_{\mathbb{R}} (f(x + c(x)u) - f(x))^2 \nu(du) \leq Cx^{2(\beta-\alpha)}, \quad x \geq 1, \text{ де } C \geq 0 - \text{деяка стала.}$$

Наступна теорема є основним результатом цієї статті.

Теорема 3. Нехай X — деякий (необов'язково єдиний) розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sum_{k=1}^q h_k(X(t-))dZ_k(t), \quad (4)$$

де $a = a(x)$, $h_k = h_k(x)$, $k \in \{1, 2, \dots, q\}$, — локально обмежені вимірні функції, $Z_k = Z_k(t)$, $k \in \{1, 2, \dots, q\}$, — незалежні центровані процеси Леві зі скінченним другим моментом, $\mathbb{E}X^2(0) < \infty$. Нехай $\alpha \in [0, 1)$. Припустимо, що:

(A) $a(x) \sim Ax^\alpha$, $x \rightarrow +\infty$, де $A > 0$ — не випадкова стала;

(B) для деяких $C \geq 0$ і $2\beta \in [0, 1 + \alpha)$

$$\sum_{k=1}^q h_k^2(x) \leq C(1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (5)$$

(B) $X(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н.

Тоді

$$X(t) \sim ((1 - \alpha)At)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.} \quad (6)$$

Зауваження. Умова (B) зустрічається також у працях [3, 5], є суттєвою та не впливає з умов (A), (B). Можна довести, що для виконання умови (B) достатньо, наприклад, виконання таких умов:

коефіцієнти a і h_k , $k \in \{1, 2, \dots, q\}$, задовольняють умову Ліпшиця;

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{|x|^\alpha} > 0;$$

для деякого $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ виконуються умови:

$$\inf_{|x| \leq R} |h_k(x)| > 0 \text{ для кожного } R > 0,$$

$Z_k(t)$, $t \geq 0$, має не вироджену гауссівську компоненту або додатні стрибки з імовірністю 1.

Доведення. Справедливість теореми у випадку $\alpha = 0$ впливає з теореми 1. Далі вважаємо, що $\alpha \in (0, 1)$.

Враховуючи, що процеси Z_k , $k \in \{1, 2, \dots, q\}$, центровані і мають скінченний другий момент, за зображенням Леві – Іто маємо

$$dZ_k(t) = \sigma_k dW_k(t) + \int_{\mathbb{R}} u \tilde{N}_k(dt, du), \quad k \in \{1, 2, \dots, q\},$$

де $\sigma_k \geq 0$, W_k — вінерівський процес, $\tilde{N}_k$ — компенсована пуассонівська міра з компенсатором $dt \cdot \nu_k(du)$, міра ν_k така, що $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu_k(du) < \infty$, $k \in \{1, 2, \dots, q\}$, до того ж $W_1, W_2, \dots, W_q$, $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \dots, \tilde{N}_q$ незалежні. Тому стохастичне диференціальне рівняння (4) можна записати у вигляді

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sum_{k=1}^m \sigma_k h_k(X(t))dW_k(t) + \sum_{k=1}^l \int_{\mathbb{R}} h_k(X(t-))u\tilde{N}_k(dt, du).$$

З метою спрощення позначень розглянемо випадок $m = l = 1$ (загальний випадок розглядається аналогічно) і позначимо $b := \sigma_1 h_1$, $c := h_1$, $W := W_1$, $\tilde{N} := \tilde{N}_1$, $\nu := \nu_1$. Таким чином, далі будемо розглядати рівняння

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-))u\tilde{N}(dt, du).$$

Зауважимо, що з умови (5) випливає оцінка

$$b^2(x) + c^2(x) \leq C_0(1 + |x|^{2\beta}), \quad x \in \mathbb{R},$$

де $C_0 \geq 0$ — деяка стала.

Візьмемо функцію $f = f(x)$, як у лемі 2. Позначимо $\tilde{X}(t) = f(X(t))$. За формулою Іто зі стрибками (див. теорему 5.1 у [7])

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{a}(t)dt + \tilde{b}(t)dW(t) + \int_{\mathbb{R}} \tilde{c}(t, u)\tilde{N}(dt, du), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) &= a(X(t-))f'(X(t-)) + \frac{1}{2}b^2(X(t-))f''(X(t-)) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(f(X(t-) + c(X(t-))u) - f(X(t-)) - c(X(t-))uf'(X(t-)) \right) \nu(du) \\ &=: \tilde{a}_1(t) + \tilde{a}_2(t) + \tilde{a}_3(t), \end{aligned}$$

$$\tilde{b}(t) = b(X(t-))f'(X(t-)), \quad \tilde{c}(t, u) = f(X(t-) + c(X(t-))u) - f(X(t-)).$$

Перевіримо, що стохастичне диференціальне рівняння (7) задовольняє умови теореми 1.

Зазначимо, що коефіцієнт $\tilde{a}$ обмежений. Дослідимо його асимптотичну поведінку, дослідивши поведінку кожного з доданків $\tilde{a}_1(t)$, $\tilde{a}_2(t)$, $\tilde{a}_3(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(X(t))f'(X(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(X(t))}{X^\alpha(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AX^\alpha(t)}{X^\alpha(t)} = A \quad \text{м.н.},$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{a}_2(t)| &= \lim_{t \rightarrow \infty} |b^2(X(t))f''(X(t))| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_1|\alpha|X^{2\beta}(t)}{X^{1+\alpha}(t)} \leq C_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{X^{1+\alpha-2\beta}(t)} = 0 \quad \text{м.н.}, \end{aligned}$$

оскільки $1 + \alpha - 2\beta > 0$ і $X(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н. (тут $C_1 \geq 0$ таке, що $b^2(X(t)) \leq C_1 X^{2\beta}(t)$ при $X(t) \geq 1$);

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_3(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(f(X(t-) + c(X(t-))u) - f(X(t-)) - c(X(t-))uf'(X(t-)) \right) \nu(du) = 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \text{м.н.}$$

за пунктом (А) леми 2, оскільки $X(t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, м.н.

Отже, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}(t) = A$ м.н.

Оцінімо коефіцієнт $\tilde{b}$. Якщо $X(t-) \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \tilde{b}^2(t) &= (b(X(t-))f'(X(t-)))^2 = b^2(X(t-))(f'(X(t-)))^2 \\ &\leq \frac{C_1 X^{2\beta}(t-)}{X^{2\alpha}(t-)} \leq C_1 X^{2(\beta-\alpha)}(t-) = C_1 C_2 \tilde{X}^{\frac{2(\beta-\alpha)}{1-\alpha}}(t-), \end{aligned}$$

де $C_2 := (1 - \alpha)^{\frac{2(\beta-\alpha)}{1-\alpha}}$. Якщо ж $X(t-) < 1$, то $\tilde{b}^2(t)$ обмежене рівномірно по t деякою не випадковою сталою $C_3 \geq 0$, оскільки f' обмежена.

Отже, $b^2(t) \leq C_4 \left(1 + |\tilde{X}(t-)|^{2\tilde{\beta}}\right)$, $t \geq 0$, де $C_4 := (C_1 C_2) \wedge C_3$, $\tilde{\beta} := \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} < 1$.

Оцінімо коефіцієнт $\tilde{c}$. Якщо $X(t-) \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \tilde{c}^2(t, u) \nu(du) &= \int_{\mathbb{R}} (f(X(t-) + c(X(t-))u) - f(X(t-)))^2 \nu(du) \\ &\leq C_5 X^{2(\beta-\alpha)}(t-) = C_2 C_5 \tilde{X}^{\frac{2(\beta-\alpha)}{1-\alpha}}(t-) \quad (\text{за пунктом (Б) леми 2}), \end{aligned}$$

де $C_5 \geq 0$. Якщо ж $X(t-) < 1$, то за формулою Тейлора

$$\left(f(X(t-) + c(X(t-))u) - f(X(t-)) \right)^2 = (f'(\xi_{X(t-),u})c(X(t-))u)^2 \leq C_6 u^2,$$

де $C_6 \geq 0$, тому $\int_{\mathbb{R}} \tilde{c}^2(t, u) \nu(du)$ обмежене (тут $\xi_{x,u} \in [x \wedge (x + c(x)u), x \vee (x + c(x)u)]$).

Отже,

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{c}^2(t, u) \nu(du) \leq C_7 \left(1 + |\tilde{X}(t-)|^{2\tilde{\beta}}\right),$$

де $C_7 \geq 0$.

Таким чином, коефіцієнти $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ стохастичного диференціального рівняння (7) задовольняють умови теореми 1.

Отже, $\tilde{X}(t) \sim At$, $t \rightarrow \infty$, м.н. Виконуючи заміну

$$\tilde{X}(t) = \frac{X^{1-\alpha}(t)}{1-\alpha}, \quad X(t) \geq 1,$$

та враховуючи умову (В), отримуємо еквівалентність (6).

Теорему 3 доведено.

4. Додаток. Доведення лема 2. Для простоти нехай $C \geq 0$ — універсальна стала, яка може змінюватися від рядка до рядка.

Доведення пункту (А). Нехай $x \geq 1$. З умови випливає, що $c^2(x) \leq Cx^{2\beta}$. Розіб'ємо інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}} [\dots] \nu(du) = \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du) + \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du),$$

де $[\dots] := f(x + c(x)u) - f(x) - f'(x)c(x)u$, $K > 0$ — деяка стала.

Нехай спочатку $|u| < Kx^{1-\beta}$. За формулою Тейлора

$$f(x + c(x)u) - f(x) - f'(x)c(x)u = \frac{1}{2} f''(\xi_{x,u}) c^2(x) u^2,$$

де $\xi_{x,u} \in [x \wedge (x + c(x)u), x \vee (x + c(x)u)]$. Маємо

$$\begin{aligned} |\xi_{x,u} - x| &\leq |c(x)u| \\ \implies (\xi_{x,u} - x)^2 &\leq (c(x)u)^2 = c^2(x)u^2 \leq Cx^{2\beta}u^2 \\ \implies |\xi_{x,u} - x| &\leq Cx^\beta |u|. \end{aligned}$$

Виберемо K так, що

$$Cx^\beta |u| \leq Cx^\beta Kx^{1-\beta} = CKx \leq \frac{1}{2}x, \quad x \geq 1, \quad |u| < Kx^{1-\beta},$$

тому $\frac{1}{2}x \leq \xi_{x,u} \leq \frac{3}{2}x$. Отже,

$$\begin{aligned} \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du) &= \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} f''(\xi_{x,u}) c^2(x) u^2 \nu(du) \\ &\leq Cx^{2\beta} \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} \frac{u^2}{\xi_{x,u}^{\alpha+1}} \nu(du) \leq Cx^{2\beta} \left(\frac{1}{2}x\right)^{-(\alpha+1)} \int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) \\ &\leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

бо $1 + \alpha - 2\beta > 0$, а $\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) < \infty$.

Дослідимо тепер інтеграл за множиною $\{u \in \mathbb{R} : |u| \geq Kx^{1-\beta}\}$. Розіб'ємо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du) &= \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} f(x + c(x)u) \nu(du) \\ &\quad - f(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) - f'(x)c(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} u \nu(du) \\ &=: I_1(x) - I_2(x) - I_3(x) \end{aligned}$$

та оцінимо кожен доданок у правій частині. Зазначимо, що $f(x) \leq \frac{|x|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$. Маємо

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} f(x+c(x)u) \nu(du) \leq \frac{1}{1-\alpha} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} 1 \cdot |x+c(x)u|^{1-\alpha} \nu(du) \\ &\quad \text{(за нерівністю Гьольдера)} \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} 1^{\frac{2}{1+\alpha}} \nu(du) \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \left(|x+c(x)u|^{1-\alpha} \right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \nu(du) \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} (x+c(x)u)^2 \nu(du) \right)^{\frac{1-\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Окремо оцінимо кожен з інтегралів:

$$\begin{aligned} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) &= \int_{u^2 \geq K^2 x^{2-2\beta}} \nu(du) \\ &\quad \text{(за нерівністю Чебишова)} \\ &\leq \frac{1}{K^2 x^{2-2\beta}} \int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) \leq \frac{C}{x^{2-2\beta}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} (x+c(x)u)^2 \nu(du) &\quad \text{(за нерівністю Коші – Буняковського)} \\ &\leq 2x^2 \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) + 2c^2(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} u^2 \nu(du) \\ &\quad \text{(за формулою (8))} \\ &\leq 2x^2 \frac{C}{x^{2-2\beta}} + 2c^2(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} u^2 \nu(du) \\ &\leq Cx^{2\beta} + Cx^{2\beta} \leq Cx^{2\beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким чином, за формулами (8) і (9)

$$I_1(x) \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{C}{x^{2-2\beta}} \right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \left(Cx^{2\beta} \right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

бо $1+\alpha-2\beta > 0$. Далі

$$\begin{aligned}
I_2(x) &= f(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \\
&\leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \frac{C}{x^{2-2\beta}} \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty \quad (\text{за формулою (8)}),
\end{aligned}$$

бо $1 + \alpha - 2\beta > 0$. Нарешті

$$\begin{aligned}
|I_3(x)| &= \left| f'(x)c(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} u\nu(du) \right| \\
&\leq \frac{1}{x^\alpha} Cx^\beta \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} |u|\nu(du) = \frac{C}{x^{\alpha-\beta}} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} |u|\nu(du).
\end{aligned}$$

Окремо оцінимо інтеграл

$$\begin{aligned}
\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} |u|\nu(du) &= \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} 1 \cdot |u|\nu(du) \\
&\leq \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} 1^2 \nu(du) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} |u|^2 \nu(du) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad (\text{за нерівністю Коші – Буняковського}) \\
&\leq \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\frac{C}{x^{2-2\beta}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{x^{1-\beta}} \quad (\text{за формулою (8)}).
\end{aligned}$$

Отже,

$$|I_3(x)| \leq \frac{C}{x^{\alpha-\beta}} \frac{C}{x^{1-\beta}} \leq \frac{C}{x^{1+\alpha-2\beta}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

бо $1 + \alpha - 2\beta > 0$.

Усі три доданки $I_1(x)$, $I_2(x)$, $I_3(x)$ прямують до нуля при $x \rightarrow +\infty$, тому

$$\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} [\dots]\nu(du) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Таким чином, пункт (А) леми доведено.

Доведення пункту (Б). Нехай $x \geq 1$. З умови випливає, що $c^2(x) \leq Cx^{2\beta}$, $x \geq 1$. Розіб'ємо інтеграл

$$\int_{\mathbb{R}} [\dots]\nu(du) = \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} [\dots]\nu(du) + \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} [\dots]\nu(du),$$

де $[\dots] := (f(x + c(x)u) - f(x))^2$, $K > 0$ — деяка стала.

Нехай спочатку $|u| < Kx^{1-\beta}$. За формулою Лагранжа

$$f(x + c(x)u) - f(x) = f'(\xi_{x,u})c(x)u,$$

де $\xi_{x,u} \in [x \wedge (x + c(x)u), x \vee (x + c(x)u)]$. Як і в доведенні пункту (А), маємо $\frac{1}{2}x \leq \xi_{x,u} \leq \frac{3}{2}x$, якщо вибрати достатньо мале K . Тому

$$\begin{aligned} \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du) &= \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} (f'(\xi_{x,u}))^2 c^2(x) u^2 \nu(du) \\ &\leq Cx^{2\beta} \int_{|u| < Kx^{1-\beta}} \frac{u^2}{\xi_{x,u}^{2\alpha}} \nu(du). \end{aligned}$$

Оскільки $\alpha > 0$, то

$$\int_{|u| < Kx^{1-\beta}} \frac{u^2}{\xi_{x,u}^{2\alpha}} \nu(du) \leq \left(\frac{1}{2}x\right)^{-2\alpha} \int_{\mathbb{R}} u^2 \nu(du) \leq Cx^{-2\alpha}.$$

Таким чином,

$$\int_{|u| < Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du) \leq Cx^{2\beta} Cx^{-2\alpha} \leq Cx^{2(\beta-\alpha)}.$$

Дослідимо тепер інтеграл за множиною $\{u \in \mathbb{R} : |u| \geq Kx^{1-\beta}\}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du) \\ \text{(за нерівністю Коші – Буняковського)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} f^2(x + c(x)u) \nu(du) + f^2(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \\ &=: J_1(x) + J_2(x). \end{aligned}$$

Оцінимо кожен доданок у правій частині, використавши формули, отримані при доведенні пункту (А):

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} f^2(x + c(x)u) \nu(du) \\ &\leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} 1 \cdot |x + c(x)u|^{2(1-\alpha)} \nu(du) \\ &\text{(за нерівністю Гьольдера)} \\ &\leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} 1^{\frac{1}{\alpha}} \nu(du) \right)^{\alpha} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} (|x + c(x)u|^{2(1-\alpha)})^{\frac{1}{1-\alpha}} \nu(du) \right)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \right)^\alpha \left(\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} (x + c(x)u)^2 \nu(du) \right)^{1-\alpha} \\
&\leq \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(\frac{C}{x^{2-2\beta}} \right)^\alpha (Cx^{2\beta})^{1-\alpha} \leq Cx^{2(\beta-\alpha)} \quad (\text{за формулами (8) та (9)}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2(x) &= f^2(x) \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \leq \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} \nu(du) \\
&\leq \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^2 \frac{C}{x^{2-2\beta}} \leq Cx^{2(\beta-\alpha)} \quad (\text{за формулою (8)}).
\end{aligned}$$

Обидва доданки оцінюються як $Cx^{2(\beta-\alpha)}$, тому

$$\int_{|u| \geq Kx^{1-\beta}} [\dots] \nu(du) \leq Cx^{2(\beta-\alpha)}.$$

Лему доведено.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. V. V. Buldygin, O. A. Tymoshenko, *On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients*, Theory Stoch. Process., **16**, № 2, 12–22 (2010).
2. A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, Courier Corp. (2012).
3. I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod, *Stochastic differential equations and their applications*, Naukova Dumka, Kiev (1982).
4. G. Keller, G. Kersting, U. Rösler, *On the asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., **68**, 163–189 (1984).
5. O. I. Klesov, O. A. Tymoshenko, *Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput., **41**, 25–35 (2013).
6. H. Kunita, *Stochastic flows and jump-diffusions*, Springer (2019).
7. H. Kunita, S. Watanabe, *On square integrable martingales*, Nagoya Math. J., **30**, 209–245 (1967).
8. X. Mao, *Exponential stability of stochastic differential equations*, Marcel Dekker (1994).
9. I. Pavlyukevich, A. Pilipenko, *Generalized Peano problem with Lévy noise*, Electron. Commun. Probab., **25(85)**, 1–14 (2020).
10. A. Pilipenko, F. N. Proske, *On perturbations of an ODE with non-Lipschitz coefficients by a small self-similar noise*, Statist. Probab. Lett., **132**, 62–73 (2018).
11. A. Pilipenko, F. N. Proske, *On a selection problem for small noise perturbation in the multidimensional case*, Stochast. and Dyn., **18**, № 6, Article 1850045 (2018).
12. A. Samoilenko, O. Stanzhyts'kyi, I. Novak, *On asymptotic equivalence of solutions of stochastic and ordinary equations*, Ukr. Math. J., **63**, № 8 (2012).
13. V. Yuskovych, *On asymptotic behavior of stochastic differential equation solutions in multidimensional space*; arXiv preprint arXiv:2306.02089, 2023.

Одержано 16.07.23