DOI: 10.37863/umzh.v75i1.7308

УДК 517.927

В. А. Михайлець[1,2] (Ін-т математики Чеської академії наук, Прага; Ін-т математики НАН України, Київ),
О. М. Атласюк[2] (Ін-т математики Чеської академії наук, Прага; Ін-т математики НАН України, Київ),
Т. Б. Скоробогач (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського")

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ФРЕДГОЛЬМОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ У ДРОБОВИХ ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

We study systems of linear ordinary differential equations with the most general inhomogeneous boundary conditions in fractional Sobolev spaces on a finite interval. The Fredholm property of these problems in the corresponding pairs of Banach spaces is proved. Their indices and dimensions of the kernels and cokernels are found. We also present examples showing the constructive character of the obtained results.

Досліджено системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь із найбільш загальними неоднорідними крайовими умовами в дробових просторах Соболєва на скінченному інтервалі. Доведено фредгольмовість таких задач у відповідних парах банахових просторів, знайдено їхні індекси та вимірності ядер і коядер. Наведено приклади, що показують конструктивний характер отриманих результатів.

1. Вступ та постановка задач. Дослідження розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь є суттєвою частиною багатьох задач сучасного аналізу та його застосувань (див., наприклад, монографію [1] та наведену там бібліографію). На відміну від задач Коші розв'язки таких задач можуть не існувати або не бути єдиними.

Для неоднорідних крайових задач на скінченному інтервалі вигляду

$$Ly := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b),$$

$$By = c,$$

де матриця-функція $A(\cdot)$ і вектор-функція $f(\cdot)$ сумовні на $[a, b]$, а лінійний неперервний оператор

$$B : C\big([a, b]; \mathbb{R}^m\big) \to \mathbb{R}^m,$$

питання коректної розв'язності і неперервної залежності розв'язків за параметром у просторі $C\big([a, b]; \mathbb{R}^m\big)$ вивчав І. Т. Кігурадзе [2, 3] та його послідовники [4 – 6]. Такі задачі охоплюють всі класичні види крайових умов (двоточкові, багатоточкові, інтегральні, мішані), але не охоплюють задачі, що містять похідні невідомої функції цілого або дробового порядку у крайових умовах. Такі крайові умови пов'язані з функціональними просторами, в яких вивчається задача. Їх аналіз потребує нових підходів і методів дослідження. У випадку просторів Соболєва цілого порядку їх проаналізовано у роботах [7 – 10], а у випадку просторів Гельдера — в роботі [11].

[1] Відповідальний за листування, e-mail: mikhailets@imath.kiev.ua.

[2] Дослідження В. А. Михайлеця та О. М. Атласюк підтримано Чеською академією наук (грант RVO:67985840). Дослідження О. М. Атласюк підтримано науково-дослідною темою молодих учених НАН України, 2021 – 2022 рр. (0121U111949) та науково-дослідним проєктом спільних колективів науковців Київського національного університету імені Тараса Шевченка та НАН України, 2022 – 2023 рр. (3М 2022).

При цьому істотно використовувався аналітичний опис лінійних операторів, що неперервно діють із простору Соболєва чи $C^{(n)}$ у простір $\mathbb{C}^m$.

У даній роботі досліджується випадок *дробових* просторів Соболєва. Для таких просторів опису лінійних неперервних операторів, що діють із цих просторів у $\mathbb{C}^m$, немає, що суттєво ускладнює дослідження крайових задач.

Введемо деякі необхідні позначення для постановки задач. Нехай задано скінченний інтервал $(a,b)\subset\mathbb{R}$ та числові параметри

$$\{m,n,r\}\subset\mathbb{N},\quad s\in(1,\infty)\setminus\mathbb{N},\quad 1\le p<\infty.$$

Позначимо через $W_p^n := W_p^n([a,b];\mathbb{C})$ комплексний простір Соболєва і покладемо $W_p^0 := L_p$. Аналогічно позначимо простори Соболєва вектор-функцій $(W_p^n)^m := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^m)$ і матриць-функцій $(W_p^n)^{m\times m} := W_p^n([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, елементи яких належать функціональному простору W_p^n. Норми у цих просторах позначимо через $\|\cdot\|_{n,p}$; вони є сумами відповідних норм у W_p^n всіх елементів векторно- або матричнозначної функції. З контексту завжди зрозуміло, про норму в якому саме просторі (скалярних, вектор- чи матриць-функцій) йде мова. Якщо $m=1$, то всі ці простори збігаються. Як відомо, простори W_p^n є банаховими і сепарабельними при $p<\infty$.

Позначимо через $W_p^s := W_p^s([a,b];\mathbb{C})$, де $1\le p<\infty$ і неціле $s>1$, простір Соболєва – Слободецького всіх комплекснозначних функцій, які належать простору Соболєва $W_p^{[s]}$ і задовольняють умову

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_{[s],p} + \left(\int_a^b\int_a^b \frac{\left|f^{[s]}(x)-f^{[s]}(y)\right|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}dxdy\right)^{1/p} < +\infty,$$

де $[s]$ — ціла, а $\{s\}$ — дробова частина числа s. Тут, нагадаємо, $\|\cdot\|_{[s],p}$ — норма у просторі Соболєва $W_p^{[s]}$. Ця рівність задає норму $\|f\|_{s,p}$ на просторі W_p^s.

Розглянемо на скінченному інтервалі (a,b) лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь першого порядку

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t),\quad t\in(a,b), \tag{1}$$

$$By = c, \tag{2}$$

де матриця-функція $A(\cdot)$ належить простору $(W_p^{s-1})^{m\times m}$, вектор-функція $f(\cdot)$ — простору $(W_p^{s-1})^m$, вектор c — простору $\mathbb{C}^r$, а B є лінійним неперервним оператором

$$B\colon (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r.$$

Крайова умова (2) задає r скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь першого порядку. Вектори і вектор-функції вважаємо записаними у вигляді стовпців. У випадку $r>m$ крайова задача (1), (2) є *перевизначеною*, а при $r<m$ — *недовизначеною*. Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot)\in(W_p^s)^m$, яка задовольняє рівняння (1) при $s>1+1/p$ скрізь, а при $s\le 1+1/p$ майже скрізь на (a,b), та рівність (2), яка задає r скалярних крайових умов.

Розв'язок рівняння (1) заповнює простір $(W_p^s)^m$, якщо його права частина $f(\cdot)$ перебігає простір $(W_p^{s-1})^m$. Тому крайова умова (2) є найбільш загальною умовою для цього рівняння. Вона включає всі відомі типи класичних крайових умов (а саме, задачу Коші, дво- й багатоточкові задачі, інтегральні й мішані задачі) та численні некласичні задачі. Останній клас задач може містити похідні цілого або дробового порядку β шуканої вектор-функції, де $0 \leq \beta < s - \dfrac{1}{p}$.

Метою цієї роботи є встановлення фредгольмовості крайової задачі (1), (2); знаходження її індексу, вимірності ядра та коядра оператора неоднорідної крайової задачі через аналогічні властивості спеціальної прямокутної числової матриці. У випадку просторів Соболєва цілого порядку подібні результати отримано в роботі [12].

2. Основні результати. Запишемо неоднорідну крайову задачу (1), (2) у вигляді лінійного операторного рівняння

$$(L, B)y = (f, c),$$

де (L, B) — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L, B)\colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r. \tag{3}$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T\colon X \to Y$, де X і Y — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмовий, то його область значень $T(X)$ замкнена в Y, а індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim\ker T - \dim(Y/T(X)) \in \mathbb{Z}$$

є скінченним (див., наприклад, [13], лема 19.1.1).

Теорема 1. *Лінійний оператор* (3) *є обмеженим і фредгольмовим з індексом* $m - r$.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$ єдиний розв'язок лінійного однорідного матричного рівняння з початковою умовою Коші

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad Y(a) = I_m. \tag{4}$$

Тут O_m — нульова, а I_m — одинична $(m \times m)$-матриці. Єдиний розв'язок задачі Коші (4) належить простору $(W_p^s)^{m\times m}$.

Означення 1. *Прямокутна числова матриця*

$$M(L, B) \in \mathbb{C}^{m\times r} \tag{5}$$

є характеристичною для крайової задачі (1), (2), *якщо її j-й стовпчик є результатом дії оператора B на j-й стовпчик матриці-функції $Y(\cdot)$. Тут m — кількість скалярних диференціальних рівнянь системи* (1), *r — кількість скалярних крайових умов.*

Теорема 2. *Вимірності ядра і коядра оператора* (3) *дорівнюють відповідно вимірностям ядра і коядра характеристичної матриці*:

$$\dim\ker(L, B) = \dim\ker\big(M(L, B)\big), \tag{6}$$

$$\dim\operatorname{coker}(L, B) = \dim\operatorname{coker}\big(M(L, B)\big). \tag{7}$$

З теореми 2 випливає критерій оборотності оператора (L, B), тобто умова, за якої задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від правих частин диференціального рівняння та крайової умови.

Теорема 3. *Оператор* (L, B) *є оборотним тоді й лише тоді, коли* $r = m$ *і квадратна матриця* $M(L, B)$ *невироджена.*

3. Приклади.

***Приклад* 1.** Розглянемо лінійну *одноточкову* крайову задачу для диференціального рівняння

$$Ly(t) := y'(t) + Ay(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{8}$$

$$By = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) = c, \tag{9}$$

де A є сталою $(m \times m)$-матрицею, вектор-функція $f(\cdot)$ належить простору $(W_p^{s-1})^m$, матриці $\alpha_k \in \mathbb{C}^{r \times m}$, вектор $c \in \mathbb{C}^r$, лінійні неперервні оператори

$$B \colon (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r, \quad (L, B) \colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r,$$

вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$, а $s > n + \dfrac{1}{p} - 1$.

Позначимо через $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m \times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші

$$Y'(t) + AY(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \quad Y(a) = I_m.$$

Тоді матриця-функція $Y(\cdot)$ та її k-та похідна набирають вигляду

$$Y(t) = \exp\big(-A(t-a)\big), \quad Y(a) = I_m,$$

$$Y^{(k)}(t) = (-A)^k \exp\big(-A(t-a)\big), \quad Y^{(k)}(a) = (-A)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Підставляючи ці значення у рівність (9), маємо

$$M(L, B) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k.$$

З теореми 1 випливає, що $\operatorname{ind}(L, B) = \operatorname{ind}(M(L, B)) = m - r$. Тому за теоремою 2 одержуємо

$$\dim\ker(L, B) = \dim\ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k\right) = m - \operatorname{rank}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k\right),$$

$$\dim\operatorname{coker}(L, B) = -m + r + \dim\ker\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k\right) = r - \operatorname{rank}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (-A)^k\right).$$

Із цих формул випливає, що фредгольмові числа задачі не залежать від вибору правого кінця інтервалу $b > a$.

***Приклад* 2.** Розглянемо *двоточкову* крайову задачу для системи диференціальних рівнянь (8) з коефіцієнтом $A(t) \equiv O_m$ і крайовими умовами в точках $\{t_0, t_1\} \subset [a, b]$, що містять похідні цілих та/чи *дробових* порядків (в сенсі Капуто, див., наприклад, [14]). Вони задаються рівністю

$$By = \sum_j \alpha_{0j} y^{(\beta_{0j})}(t_0) + \sum_j \alpha_{1j} y^{(\beta_{1j})}(t_1),$$

де обидві суми скінченні, числові матриці $\alpha_{kj} \in \mathbb{C}^{r\times m}$, а невід'ємні числа β_{kj} такі, що для всіх $k \in \{1,2\}$

$$\beta_{k,0} = 0, \quad \beta_{kj} < s - 1/p.$$

Тоді, як неважко переконатися, лінійний оператор

$$B\colon (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r$$

є неперервним.

Із теореми 1 випливає, що індекс оператора (L,B) дорівнює $m-r$. Знайдемо його фредгольмові числа. У цьому випадку матриця-функція $Y(\cdot) = I_m$, а характеристична матриця має вигляд

$$M(L,B) = \sum_j \alpha_{0j} I_m^{(\beta_{0j})} + \sum_j \alpha_{1j} I_m^{(\beta_{1j})} = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0},$$

бо похідні $I_m^{(\beta_{kj})} = 0$, якщо $\beta_{kj} > 0$ [14]. Тому за теоремою 2

$$\dim\ker(L,B) = \dim\ker(\alpha_{0,0}+\alpha_{1,0}) = m - \operatorname{rank}(\alpha_{0,0}+\alpha_{1,0}),$$

$$\dim\operatorname{coker}(L,B) = -m + r + \dim\ker(\alpha_{0,0}+\alpha_{1,0}) = r - \operatorname{rank}(\alpha_{0,0}+\alpha_{1,0}).$$

Із цих формул випливає, що фредгольмові числа задачі не залежать від вибору інтервалу (a,b), точок $\{t_0,t_1\} \subset [a,b]$ і матриць $\alpha_{0,j}$, $\alpha_{1,j}$ з $j \geq 1$.

4. Попередні результати. Для доведення теорем 1 – 3 нам знадобляться два допоміжних твердження.

Введемо метричний простір матриць-функцій

$$\mathcal{Y}_p^s := \left\{ Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m} \colon \quad Y(a) = I_m, \quad \det Y(t) \neq 0 \right\}$$

з метрикою

$$d_p^s(Y,Z) := \|Y(\cdot) - Z(\cdot)\|_{s,p}.$$

Теорема 4. *Нелінійне відображення $\gamma\colon A \mapsto Y$, де $A(\cdot) \in (W_p^{s-1})^{m\times m}$, а $Y(\cdot) \in \in (AC[a,b])^{m\times m}$ є розв'язком задачі Коші* (4), *є гомеоморфізмом банахового простору $(W_p^{s-1})^{m\times m}$ на метричний простір $\mathcal{Y}_p^s$.*

Доведення теореми 4 наведено в роботі [15]. Покладемо

$$[BY] := \left(B\begin{pmatrix} y_{1,1}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,1}(\cdot) \end{pmatrix} \ldots B\begin{pmatrix} y_{1,m}(\cdot) \\ \vdots \\ y_{m,m}(\cdot) \end{pmatrix} \right) = M(L,B). \tag{10}$$

Лема 1. *Для довільної матриці-функції $Y(\cdot) \in (W_p^s)^{m\times m}$, вектора $q \in \mathbb{C}^m$ і лінійного неперервного оператора $B\colon (W_p^s)^{m\times m} \to \mathbb{C}^r$ справджується рівність*

$$B(Y(\cdot)q) = [BY]q,$$

де матриця $[BY]$ визначена рівністю (10).

Доведення. Нехай $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, матриця-функція $Y(\cdot) = (y_{ik}(\cdot))$, а вектор-стовпчик $q = (q_i)$. Позначимо $(\alpha_j) = [BY]q$ і $(\beta_j) = B(Y(\cdot)q)$. Нехай

$$B(y_k(\cdot)) =: (c_j).$$

При дії оператора B на матрицю-функцію $Y(\cdot)$ отримуємо матрицю

$$[BY] = (c_{ji}).$$

Тоді

$$(\alpha_j) = (c_{ji}) \cdot (q_i) = \left(\sum_i c_{ji} q_j\right).$$

Отже, довільний елемент α_i має вигляд

$$\alpha_j = \sum_j c_{ji} q_j,$$

але мають місце рівності

$$(\beta_j) = B((y_{ik}(\cdot)) \cdot (q_k)) = B\left(\sum_k y_{ik}(\cdot) q_k\right) =$$

$$= \sum_k (B y_{ik}(\cdot)) q_k = \sum_k (c_{jk}) q_k = \left(\sum_j c_{jk} q_j\right).$$

Із цього випливає, що $\alpha_j = \beta_j$.

Лему 1 доведено.

5. Доведення теорем. ***Доведення теореми*** **1.** Обґрунтуємо спочатку неперервність оператора (L, B). Оскільки оператор B за умовою є лінійним і неперервним, то достатньо довести неперервність оператора L, яка еквівалентна його обмеженості. Обмеженість лінійного оператора

$$L\colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m$$

випливає з означення норм у просторах Соболєва W_p^{s-1} і відомого факту, що кожен із цих просторів утворює банахову алгебру.

Доведемо тепер фредгольмовість оператора (L, B) і знайдемо його індекс. Виберемо деякий фіксований лінійний обмежений оператор $C_{r,m} : (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^r$. Оператор (L, B) допускає зображення

$$(L, B) = (L, C_{r,m}) + (0, B - C_{r,m}),$$

де оператор

$$(L, C_{r,m})\colon (W_p^s)^m \to (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^r,$$

а другий доданок є скінченновимірним оператором. Із другої теореми стійкості (див., наприклад, [16], розд. 3, § 1) випливає, що оператор (L, B) є фредгольмовим, якщо оператор $(L, C_{r,m})$ є таким і

$$\operatorname{ind}(L, B) = \operatorname{ind}(L, C_{r,m}).$$

Тому достатньо довести фредгольмовість оператора $(L, C_{r,m})$ і знайти його індекс, вибравши відповідним чином оператор $C_{r,m}$. Для цього розглянемо три випадки.

1. Нехай $r = m$. Покладемо

$$C_{m,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a)).$$

Знайдемо нуль-простір та область значень цього оператора. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{r,m})$. Тоді $Ly = 0$ і $C_{m,m}y = (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0$. Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші випливає, що $y(\cdot) = 0$. Тому $\ker(L, C_{m,m}) = \{0\}$.

Нехай $h \in (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m$ і $c \in \mathbb{C}^m$ вибрано довільним чином. Із теореми 4 випливає, що існує така вектор-функція $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$, що

$$Ly = h, \quad (y_1(a), \ldots, y_m(a)) = c.$$

Тому $\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = \left(W_p^{s-1}\right)^m \times \mathbb{C}^m$.

2. Нехай $r > m$. Покладемо

$$C_{r,m}y := (y_1(a), \ldots, y_m(a), \underbrace{0, \ldots, 0}_{r-m}) \in \mathbb{C}^r.$$

Знайдемо нуль-простір оператора $(L, C_{r,m})$. Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{r,m})$. Тоді $Ly = 0$ і $(y_1(a), \ldots, y_m(a)) = 0$. Із теореми про єдиність розв'язку задачі Коші маємо $y(\cdot) = 0$.

Запишемо множину значень оператора $(L, C_{r,m})$ у вигляді прямої суми двох підпросторів

$$\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = \operatorname{ran}(L, C_{m,m}) \oplus (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r-m}).$$

Але, як доведено раніше, $\operatorname{ran}(L, C_{m,m}) = (W_p^{s-1})^m \times \mathbb{C}^m$. Тому $\operatorname{def}\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = r - m$.

3. Нехай $r < m$. Покладемо

$$C_{r,m}y := (y_1(a), \ldots, y_r(a)) \in \mathbb{C}^r.$$

Доведемо, що

$$\dim\ker(L, C_{r,m}) = m - r,$$

$$\operatorname{def}\operatorname{ran}(L, C_{r,m}) = 0.$$

Нехай $y(\cdot)$ належить $\ker(L, C_{r,m})$. Тоді $Ly = 0$ і $(y_1(a), \ldots, y_r(a)) = 0$. Розглянемо $m - r$ задач Коші

$$Ly_k = 0, \quad C_{m,m}y_k = e_k, \quad \text{де} \quad k \in \{r+1, r+2, \ldots, m\},$$

$$e_k := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots, 0) \in C^m.$$

Із теореми 4 випливає, що розв'язки цих задач лінійно незалежні та утворюють базис у підпросторі $\ker(L, C_{r,m})$.

Сюр'єктивність оператора $(L, C_{r,m})$ випливає із вже доведеної сюр'єктивності оператора $(L, C_{m,m})$.

Отже, в кожному з трьох випадків оператор (L, B) є фредгольмовим з індексом $m - r$.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Покажемо справедливість рівності (6). Введемо такі позначення:

$$\dim\ker(L,B)=n',$$
$$\dim\ker\bigl(M\bigl(L,B\bigr)\bigr)=n''.$$

Обґрунтуємо виконання рівності

$$n'=n''. \tag{11}$$

Нехай $\dim\ker(L,B)=n'$. Тоді існує n' таких лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння $(L,B)y=(0,0)$, що

$$y_k(\cdot)\in\ker(L,B)\Leftrightarrow(\exists\,q_k\in\mathbb{C}^m: y_k(t)=Y(t)q_k,\ [BY]q_k=0)$$

згідно з лемою 1, де вектори $q_k\neq 0$, а $k\in\{1,\ldots,n'\}$. Це означає, що $r-n'$ стовпців матриці (5) лінійно залежні і $n'\le n''$.

Навпаки, нехай $\dim\ker\bigl(M\bigl(L,B\bigr)\bigr)=n''$, тоді її $r-n''$ стовпців лінійно незалежні. Це означає, що для деяких векторів $q_k\neq 0,\ k\in\{1,\ldots,n'\}$,

$$[BY]q_k=0.$$

Покладемо

$$y_k(\cdot):=Y(\cdot)q_k.$$

Тоді $y_k(\cdot)\neq 0,\ Ly_k(\cdot)=0$ і

$$By_k(\cdot)=B(Y(\cdot)q_k)=[BY]q_k=0$$

на підставі леми 1. Тому $y_k(\cdot)\in\ker(L,B)$, тоді $n'\ge n''$. Отже, виконується рівність (6).

Згідно з означенням характеристична матриця $M(L,B)$ належить простору $\mathbb{C}^{m\times r}$. Як відомо, вимірність ядра матриці є різницею числа її рядків та рангу, а вимірність коядра — різницею числа стовпців та рангу. Тоді для матриці $M(L,B)$ маємо рівність

$$\dim\operatorname{coker}\bigl(M\bigl(L,B\bigr)\bigr)=r-m+\dim\ker\bigl(M\bigl(L,B\bigr)\bigr). \tag{12}$$

Із формули знаходження індексу для оператора (L,B)

$$\operatorname{ind}(L,B):=\dim\ker(L,B)-\dim\operatorname{coker}(L,B)$$

отримуємо

$$\dim\operatorname{coker}(L,B)=r-m+\dim\ker(L,B). \tag{13}$$

Із рівностей (11) – (13) випливає рівність (7).

Теорему 2 доведено.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, VSP, Utrecht, Boston (2004).
2. И. Т. Кигурадзе, *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изд-во Тбил. ун-та, Тбилиси (1975).
3. И. Т. Кигурадзе, *Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, ВИНИТИ, **30**, 3 – 103 (1987).
4. T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets, N. V. Reva, *Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems*, Ukrainian Math. J., **65**, № 1, 77 – 90 (2013).
5. V. A. Mikhailets, O. B. Pelekhata, N. V. Reva, *Limit theorems for the solutions of boundary-value problems*, Ukrainian Math. J., **70**, № 2, 243 – 251 (2018).
6. V. A. Mikhailets, G. A. Chekhanova, *Limit theorem for general one-dimensional boundary-value problems*, J. Math. Sci., **204**, № 3, 333 – 342 (2015).
7. E. V. Gnyp, T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets, *Fredholm boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces*, Ukrainian Math. J., **67**, № 5, 658 – 667 (2015).
8. T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets, *Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces*, J. Math. Sci., **190**, № 4, 589 – 599 (2013).
9. Y. V. Hnyp, V. A. Mikhailets, A. A. Murach, *Parameter-dependent one-dimensional boundary-value problems in Sobolev spaces*, Electron. J. Different. Equat., № 81 (2017).
10. O. M. Atlasiuk, V. A. Mikhailets, *Fredholm one-dimensional boundary-value problems with parameter in Sobolev spaces*, Ukrainian Math. J., **70**, № 11, 1677 – 1687 (2019).
11. V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. O. Soldatov, *Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems*, Electron. J. Qual. Theory Different. Equat., № 87 (2016).
12. O. M. Atlasiuk, V. A. Mikhailets, *On the solvability of inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces*, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki, № 11, 3 – 7 (2019).
13. L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. III: Pseudo-differential operators*, Springer, Berlin (1985).
14. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Math. Stud., vol. 204, Elsevier (North-Holland) Sci. Publ., Amsterdam (2006).
15. V. A. Mikhailets, T. B. Skorobohach, *Fredholm boundary-value problems in Sobolev – Slobodetsky spaces*, Ukrainian Math. J., **73**, № 7, 1071 – 1083 (2021).
16. T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New York (1966).

Одержано 31.08.22