DOI: 10.37863/umzh.v75i1.7347

УДК 517.929

М. О. Перестюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
В. Ю. Слюсарчук[1] (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

МЕТОД ЛОКАЛЬНОЇ ЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

For nonlinear differential equations with impulsive perturbations, we formulate a general assertion concerning the existence of bounded solutions. With the help of this assertion, we establish necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of bounded solutions of analogous linear equations. The equations are studied by using the theory of c-continuous operators and the method of local linear approximation of nonlinear equations.

Для нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями наведено загальне твердження про існування обмежених розв'язків. За допомогою цього твердження встановлено необхідні і достатні умови існування та єдиності обмежених розв'язків аналогічних лінійних рівнянь. Для дослідження рівнянь використано теорію c-неперервних операторів і метод локальної лінійної апроксимації нелінійних рівнянь.

1. Вступ. Задача існування обмежених розв'язків еволюційних рівнянь є однією з найважливіших задач теорії цих рівнянь та її застосувань (див., наприклад, [1 – 17]). Для розв'язання цієї задачі в переважній більшості використовують функціонально-аналітичні методи. Навіть у випадку лінійних рівнянь застосування цих методів до дослідження рівнянь проводиться нетривіально. У статті запропоновано метод дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями, що використовує наближення цих рівнянь лінійними системами на кулях із радіусами, залежними від цих систем. У випадку лінійних імпульсних рівнянь цей метод дає не лише достатні, а й необхідні умови існування та єдиності обмежених розв'язків відповідних рівнянь.

2. Основні позначення, простори та задача. Нехай $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ і $\mathbb{Z}$ — множини всіх дійсних, натуральних і цілих чисел відповідно, $\mathbb{T} = \{t_n : n \in \mathbb{Z}\}$ — множина дійсних чисел, для якої $t_n < t_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to-\infty} t_n = -\infty$ і $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, E — скінченновимірний банаховий простір над полем дійсних або комплексних чисел із нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(X,Y)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A\colon X \to Y$ з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y,$$

де X і Y — банахові простори з нормами $\|\cdot\|_X$ і $\|\cdot\|_Y$ відповідно.

Позначимо через $C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ банаховий простір визначених, неперервних і обмежених на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в E, для кожної з яких існують скінченні границі $\lim_{t\to t_n-0} x(t) = x(t_n-0)$ і $\lim_{t\to t_n+0} x(t) = x(t_n+0)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$, з нормою

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} = \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}} \|x(t)\|_E,$$

через $C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ банаховий простір неперервно диференційовних на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$ функцій $x \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, для кожної з яких $dx/dt \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, з нормою

[1] Відповідальний за листування, e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com.

© М. О. ПЕРЕСТЮК, В. Ю. СЛЮСАРЧУК, 2023

$$\|x\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} = \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\|x(t)\|_E,\ \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\|_E\right\},$$

а через $\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ банаховий простір двосторонніх послідовностей $\mathfrak{g} = g_n$ елементів $g_n,\ n\in\mathbb{Z}$, простору E з нормою

$$\|\mathfrak{g}\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} = \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|g_n\|_E.$$

Використовуючи декартовий добуток $X\times Y$ непорожніх множин X і Y, що за означенням є множиною всіх пар (x,y) елементів $x\in X$ і $y\in Y$, розглядаємо також банаховий простір $C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),\ i\in\{0,1\}$, пар $(x,\mathfrak{g})$ елементів $x = x(t)\in C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і $\mathfrak{g} = g_n\in\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ з нормою

$$\big\|(x,\mathfrak{g})\big\|_{C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} = \max\big\{\|x\|_{C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}, \|\mathfrak{g}\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)}\big\}.$$

Для стрибків функції $x\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ в точках множини $\mathbb{T}$, як і в [7], використаємо позначення

$$\Delta x|_{t=t_n} = x(t_n+0) - x(t_n-0),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Розглянемо неперервне відображення $F\colon(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\times E\to E$, при якому для кожної обмеженої множини $\mathcal{M}\subset E$ функція $F(t,x)$ є обмеженою на множині $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\times\mathcal{M}$ і рівномірно неперервною на кожній обмеженій підмножині $\mathcal{N}$ множини $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{T})\times E$. Також розглянемо неперервні відображення $G_n\colon E\to E,\ n\in\mathbb{Z}$, при яких для кожної обмеженої множини $\mathcal{M}\subset E$

$$\sup_{n\in\mathbb{Z},x\in\mathcal{M}}\big\|G_n(x)\big\|_E < +\infty.$$

З умов, які задовольняє F, випливає, що для кожного $x\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ функція

$$y = F(t,x(t))$$

є елементом простору $C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$.

Нас цікавитимуть умови, при виконанні яких система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} + F(t,x(t)) = f(t),\quad t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T},\\ \Delta x|_{t=t_n} + G_n(x(t_n-0)) = g_n,\quad n\in\mathbb{Z},\end{gathered}\tag{1}$$

для кожних функції $f = f(t)\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і послідовності $\mathfrak{g} = g_n\in\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ буде мати хоча б один розв'язок $x = x(t)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$.

Лівою частиною системи рівнянь (1) породжується оператор $\mathscr{I}$, що діє з $C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ в $C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$. Якщо використати оператори $\mathcal{L}\colon C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і $\mathcal{D}\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, що визначаються рівностями

$$(\mathcal{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + F(t,x(t)),\quad t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T},$$

і

$$(\mathcal{D}x)_n = \Delta x|_{t=t_n} + G_n(x(t_n-0)),\quad n\in\mathbb{Z},$$

то згідно з (1) оператор $\mathscr{I}: C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ записується за допомогою співвідношення

$$\mathscr{I}x = (\mathcal{L}x, \mathcal{D}x), \quad x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E).$$

Позначимо через $R(\mathscr{I})$ множину значень оператора $\mathscr{I}$, тобто множину

$$\big\{\mathscr{I}x : x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)\big\}.$$

Система рівнянь (1) та відповідний оператор $\mathscr{I}$ у загальному випадку є нелінійними, і з'ясування для системи (1) умов існування обмежених розв'язків для кожних функції $f = f(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ та послідовності $\mathfrak{g} = g_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ або, аналогічно, з'ясування умов виконання для оператора $\mathscr{I}$ рівності

$$R(\mathscr{I}) = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$$

не є тривіальними задачами.

3. c-Неперервні та c-компактні оператори. Наведено деякі поняття та результати з теорії c-операторів, що будуть використовуватися при дослідженні системи (1).

Будемо говорити, що послідовність елементів $x_k \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до елемента $x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ при $k \to \infty$, і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{loc}.,\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і для кожного числа $p > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T}, |t| \le p} \big\| x_k(t) - x(t) \big\|_E = 0.$$

Аналогічно, послідовність $x_k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, будемо називати *локально збіжною* до елемента $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{loc}.,\ C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо

$$x_k \xrightarrow{\text{loc}.,\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} x \qquad \text{і} \qquad \frac{dx_k}{dt} \xrightarrow{\text{loc}.,\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \frac{dx}{dt} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Послідовність $\mathfrak{g}_k = g_{k,n} \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, будемо називати *локально збіжною* до елемента $\mathfrak{g} = g_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ при $k \to \infty$ і позначатимемо

$$\mathfrak{g}_k \xrightarrow{\text{loc}.,\ \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} \mathfrak{g} \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і

$$\lim_{k\to\infty} \|g_{k,n} - g_n\|_E = 0$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогічно, будемо говорити, що послідовність $(x_k, \mathfrak{g}_k) \in C^i(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$, $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1\}$, *локально збігається* до елемента $(x, \mathfrak{g}) \in C^i(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ при $k \to \infty$, і позначатимемо

$$(x_k, \mathfrak{g}_k) \xrightarrow{\text{loc.},\ C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} (x, \mathfrak{g}) \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.},\ C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} x \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{g}_k \xrightarrow{\text{loc.},\ \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} \mathfrak{g} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Позначимо через $\mathfrak{P}$ множину, елементами якої є простори $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$, $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ і $C^i(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E),\ i \in \{0, 1\}$.

Зафіксуємо довільні простори $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \in \mathfrak{P}$. Оператор $\mathcal{A}\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ називається *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in \mathscr{X}$ і $x_k \in \mathscr{X},\ k \in \mathbb{N}$, для яких

$$x_k \xrightarrow{\text{loc.},\ \mathscr{X}} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

виконується співвідношення

$$\mathcal{A}x_k \xrightarrow{\text{loc.},\ \mathscr{Y}} \mathcal{A}x \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Якщо оператор $\mathcal{A}\colon C^i(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \to C^j(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E),\ i, j \in \{0, 1\}$, є c-неперервним і у випадку $j = 0$ для кожного числа $r > 0$ елементи множини

$$\big\{(\mathcal{A}x)(t)\colon \|x\|_{C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \le r\big\}$$

є рівномірно обмеженими на $\mathbb{R}$ і рівностепенево неперервними на кожному скінченному проміжку [18], а у випадку $j = 1$ аналогічно для кожного числа $r > 0$ елементи множини

$$\big\{(\mathcal{A}x)(t)\colon \|x\|_{C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \le r\big\} \cup \left\{\frac{d(\mathcal{A}x)(t)}{dt}\colon \|x\|_{C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \le r\right\}$$

є рівномірно обмеженими на $\mathbb{R}$ і рівностепенево неперервними на кожному скінченному проміжку, то такий оператор називається *c-компактним* (*c-цілком неперервним*).

У наступних трьох підпунктах наведемо потрібні для подальшого властивості локально збіжних послідовностей і c-неперервних операторів.

3.1. Леми про локально збіжні послідовності. Розглянемо функції $p_{k,m} \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{T}, \mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N},\ m \in \{0, 1\}$, і оператори $\mathcal{P}_{k,m}\colon C^m(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \longrightarrow C^m(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E),\ k \in \mathbb{N},\ m \in \{0, 1\}$, що визначаються рівностями

$$p_{k,m}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |t| \le 2^k, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \\ \cos^{m+1} \dfrac{\big(2^{-k}|t| - 1\big)\pi}{2}, & \text{якщо} \quad 2^k < |t| < 2^{k+1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \\ 0, & \text{якщо} \quad |t| \ge 2^{k+1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \end{cases}$$

і

$$\mathcal{P}_{k,m} = \|\mathcal{R}_{k,m}\|^{-1}_{L(C^m(\mathbb{R},\mathbb{T},E),C^m(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\mathcal{R}_{k,m}, \tag{2}$$

де

$$(\mathcal{R}_{k,m}x)(t) = p_{k,m}(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \tag{3}$$

і $x \in C^m(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$.

Очевидно, що

$$\mathcal{P}_{k,m}C^l(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \subset C^l(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E), \quad m, l \in \{0, 1\},$$

$$\mathcal{P}_{k+1,m}\mathcal{P}_{k,m} = \mathcal{P}_{k,m}\mathcal{P}_{k+1,m} = \mathcal{P}_{k,m}, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad m \in \{0,1\}, \tag{4}$$
$$\|\mathcal{P}_{k,m}\|_{L(C^m(\mathbb{R},\mathbb{T},E),C^m(\mathbb{R},\mathbb{T},E))} = 1, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad m \in \{0,1\},$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{R}_{k,1}\|_{L(C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))} = 1. \tag{5}$$

Важливою є така лема.

Лема 1. *Для кожної обмеженої послідовності* $(x_k)_{k\geq 1}$ *елементів простору* $C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, *для якої множини* $\{\mathcal{P}_{n,0}x_k : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, *передкомпактні, існують такі строго зростаюча послідовність* $(k_\nu)_{\nu\geq 1}$ *натуральних чисел і елемент* $x \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, *що*

$$x_{k_\nu} \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} x \quad \textit{при} \quad \nu \to \infty \tag{6}$$

і

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}. \tag{7}$$

Доведення. На підставі умов леми існують такі підпослідовності

$$x_{k_{1,1}}, x_{k_{1,2}}, \ldots, x_{k_{1,p}}, \ldots,$$
$$x_{k_{2,1}}, x_{k_{2,2}}, \ldots, x_{k_{2,p}}, \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{k_{n,1}}, x_{k_{n,2}}, \ldots, x_{k_{n,p}}, \ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

послідовності $(x_k)_{k\geq 1}$, що:

1) послідовності чисел $k_{l,p}$, $p \in \mathbb{N}$, є строго зростаючими для кожного $l \in \mathbb{N}$ і

$$\{k_{1,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{k_{2,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots \supset \{k_{n,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \ldots;$$

2) для кожного $m \in \mathbb{N}$ послідовність функцій $x_{k_{m,p}}$, $p \in \mathbb{N}$, є рівномірно збіжною на множині $[-m,m] \setminus \mathbb{T}$.

Тоді діагональна послідовність

$$x_{k_{1,1}}, x_{k_{2,2}}, \ldots, x_{k_{p,p}}, \ldots$$

буде рівномірно збіжною на кожній обмеженій підмножині множини $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$, і тому функція

$$x(t) = \lim_{p\to\infty} x_{k_{p,p}}(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \tag{8}$$

буде неперервною на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$.

Оскільки завдяки включенням $x_k \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, $k \geq 1$, для кожного $n \in \mathbb{Z}$ існують скінченні границі $x_k(t_n - 0) = \lim_{t\to t_n-0} x_k(t)$ і $x_k(t_n + 0) = \lim_{t\to t_n+0} x_k(t)$, $k \geq 1$, то на підставі передкомпактності множин $\{\mathcal{P}_{n,0}x_k : k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$, і рівності (8) також існують скінченні границі $x(t_n - 0) = \lim_{t\to t_n-0} x(t)$ і $x(t_n + 0) = \lim_{t\to t_n+0} x(t)$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$. Тому функція $x(t)$ буде елементом простору $C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$.

Співвідношення (7) випливає з (8) і обмеженості послідовності $(x_k)_{k\geq 1}$, а співвідношення (6) — з того, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ послідовність функцій $x_{k_{m,p}}$, $p \in \mathbb{N}$, є рівномірно збіжною на множині $[-m, m] \setminus \mathbb{T}$.

Лему 1 доведено.

Окремим випадком леми 1 є така лема.

Лема 2. *Для кожної обмеженої в просторі $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ послідовності $(x_k)_{k\geq 1}$ елементів простору $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ існують такі строго зростаюча послідовність $(k_\nu)_{\nu\geq 1}$ натуральних чисел і елемент $x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$, що*

$$x_{k_\nu} \xrightarrow{\text{loc.},\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} x \quad \textit{при} \quad \nu \to \infty$$

і

$$\|x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}.$$

3.2. c-Неперервність обернених лінійних операторів. Розглянемо довільні визначену і неперервну на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$ функцію $A = A(t)$ зі значеннями в $L(E, E)$ та двосторонню послідовність $\mathfrak{B} = B_n$, $n \in \mathbb{Z}$, елементів простору $L(E, E)$, що є елементами просторів $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, L(E, E))$ і $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, L(E, E))$ відповідно. Парі $(A, \mathfrak{B})$ поставимо у відповідність лінійний неперервний оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$, що задається співвідношенням

$$\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}x = (\mathscr{L}x, \mathscr{D}x), \quad x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E), \tag{9}$$

де

$$(\mathscr{L}x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \tag{10}$$

і

$$(\mathscr{D}x)_n = \Delta x|_{t=t_n} + B_n x(t_n - 0), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Згідно з обмеженнями на A і $\mathfrak{B}$ оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}$ є c-неперервним.

Важливою для подальших досліджень є така теорема.

Теорема 1. *Якщо оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ має неперервний обернений оператор $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$, то $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$ є c-неперервним.*

Доведення. Припустимо, що оператор $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$ не є c-неперервним. Існують такі число $\varepsilon > 0$, відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і послідовності $f_m = f_m(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ $(\|f_m\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} = 1)$ і $\mathfrak{g}_m = g_{m,n} \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ $(\|\mathfrak{g}_m\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} = 1)$, для яких

$$\|f_m(t)\|_E \leq \frac{1}{m}, \qquad t \in [-m, m] \setminus \mathbb{T}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$\|g_{m,n}\|_E \leq \frac{1}{m}, \qquad |n| \leq m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

що згідно з (9)–(11) розв'язок x_n системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx_n(t)}{dt} + A(t)x_n(t) = f_m(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \\ &\Delta x|_{t=t_n} + B_n x(t_n - 0) = g_{m,n}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{14}$$

задовольняє умову

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus\mathbb{T}} \max\left\{\|x_n(t)\|_E, \left\|\frac{dx_n(t)}{dt}\right\|_E\right\} \geq \varepsilon, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{15}$$

Використаємо оператор $\mathcal{D}\colon C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, що визначається співвідношенням

$$\mathcal{D}x = (\mathscr{L}_1 x, \mathscr{D}_1 x), \quad x\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E),$$

де

$$(\mathscr{L}_1 x)(t) = A(t)x(t), \quad t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T},$$

і

$$(\mathscr{D}_1 x)_n = B_n x(t_n - 0), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Оскільки

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} < +\infty$$

і оператор $\mathcal{D}$ є c-компактним (на підставі вимог до $A = A(t)$ і $\mathfrak{B} = B_n$), то згідно зі співвідношеннями (12), (13) і системою (14) функції множини

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x_n(t), \frac{x_n(t)}{dt}\right\}$$

рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні на кожній обмеженій множині. Тому на підставі теореми Арцела [18] та скінченної розмірності простору E існують функція $z = z(t) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і підпослідовність $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ такі, що для кожного $\gamma > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[-\gamma,\gamma]\setminus\mathbb{T}} \max\left\{\big\|x_{n_k}(t) - z(t)\big\|_E, \left\|\frac{dx_{n_k}(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt}\right\|_E\right\} = 0. \tag{16}$$

Зазначимо, що завдяки (15) і (16)

$$\sup_{t\in[a,b]\setminus\mathbb{T}} \max\left\{\big\|z(t)\big\|_E, \left\|\frac{dz(t)}{dt}\right\|_E\right\} \geq \varepsilon. \tag{17}$$

Із (12) – (14), (16) і c-неперервності оператора $\mathcal{D}$ випливає система тотожностей

$$\frac{dz(t)}{dt} + A(t)z(t) \equiv 0,$$
$$\Delta z|_{t=t_n} + B_n z(t_n - 0) \equiv 0,$$

що на підставі (17) суперечить оборотності оператора $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$.

Отже, оператор $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)\to C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ є c-неперервним.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 1.** У загальному випадку c-неперервний оператор може мати обернений неперервний оператор, що не є c-неперервним [19].

3.3. Теорема про нерухому точку для c-неперервних операторів. Позначимо через $\mathcal{B}^i[0,\rho]$ замкнену кулю радіуса ρ з центром у точці 0 у просторі $C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, тобто множину $\big\{x \in C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\colon \|x\|_{C^i(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \leq \rho\big\}$.

При встановленні існування обмежених розв'язків системи рівнянь (1) будемо використовувати таку теорему про нерухому точку.

Теорема 2. *Нехай*:

1) $\mathfrak{F}\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ *і* $\mathfrak{S}\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)\to C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ — *обмежені* c-*неперервні оператори*;

2) *справджується співвідношення* $\mathfrak{S}\mathfrak{F}\mathcal{B}^0[0,r]\subset\mathcal{B}^1[0,r]$ *для деякого числа* $r>0$.

Тоді оператор $\mathfrak{S}\mathfrak{F}\colon\mathcal{B}^0[0,r]\to\mathcal{B}^1[0,r]$ *має в* $\mathcal{B}^1[0,r]$ *нерухому точку* x^*.

Доведення. Згідно з першою умовою теореми оператор $\mathfrak{A}=\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ діє з простору $C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ у простір $C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і є c-неперервним. Цей оператор також можна розглядати як оператор, що діє у просторі $C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$. У цьому випадку завдяки теоремі Арцела [18] оператор $\mathfrak{A}$ є c-компактним. Розглянемо рівняння

$$x_n=\mathcal{P}_{n,1}\mathfrak{A}x_n, \tag{18}$$

де $\mathcal{P}_{n,1}$ — лінійний неперервний оператор, що визначається за допомогою (2).

На підставі умов, які задовольняє оператор $\mathfrak{A}$, і рівностей (4) оператор

$$\mathcal{P}_{n,1}\mathfrak{A}\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$$

цілком неперервний і $\mathcal{P}_{n,1}\mathfrak{A}\mathcal{B}^0[0,r]\subset\mathcal{B}^0[0,r]$ для кожного $n\in\mathbb{N}$. Тому завдяки теоремі Шаудера про нерухому точку [20] рівняння (18) має розв'язок $x_n^*\in\mathcal{B}^0[0,r]$, тобто

$$x_n^*=\mathcal{P}_{n,1}\mathfrak{A}x_n^*. \tag{19}$$

Завдяки другій умові теореми $\mathcal{P}_{n,1}\mathfrak{A}x_n^*\in\mathcal{B}^1[0,r]$. Тому $x_n^*\in\mathcal{B}^1[0,r]$ для кожного $n\in\mathbb{N}$.

За лемою 2 існують такі зростаюча послідовність $(n_k)_{k\geq1}$ натуральних чисел і елемент $x^*\in\mathcal{B}^0[0,r]$, що

$$x_{n_k}^*\xrightarrow{\mathrm{loc.},\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}x^*\quad\text{при}\quad k\to\infty. \tag{20}$$

Покажемо, що $\mathfrak{A}x^*=x^*$. При цьому використаємо очевидні рівності

$$\begin{gathered}x^*-\mathfrak{A}x^*=\big[\big(x^*-\mathfrak{A}x^*\big)-\big(x_{n_k}^*-\mathfrak{A}x_{n_k}^*\big)\big]+\\+\big[\big(x_{n_k}^*-\mathfrak{A}x_{n_k}^*\big)-\big(x_{n_k}^*-\mathcal{P}_{n_k,1}\mathfrak{A}x_{n_k}^*\big)\big]+\big(x_{n_k}^*-\mathcal{P}_{n_k,1}\mathfrak{A}x_{n_k}^*\big),\quad k\geq1.\end{gathered}$$

Оскільки на підставі (20), c-неперервності оператора $\mathfrak{A}\colon C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, означення і властивостей оператора $\mathcal{P}_{n,1}$ (див. (2)–(5)) і рівності (19)

$$\big(x^*-\mathfrak{A}x^*\big)-\big(x_{n_k}^*-\mathfrak{A}x_{n_k}^*\big)\xrightarrow{\mathrm{loc.},\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}0\quad\text{при}\quad k\to\infty,$$

$$\big(x_{n_k}^*-\mathfrak{A}x_{n_k}^*\big)-\big(x_{n_k}^*-\mathcal{P}_{n_k,1}\mathfrak{A}x_{n_k}^*\big)\xrightarrow{\mathrm{loc.},\ C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}0\quad\text{при}\quad k\to\infty$$

і

$$x_{n_k}^*-\mathcal{P}_{n_k,1}\mathfrak{A}x_{n_k}^*=0,\quad k\geq1,$$

то

$$\mathfrak{A}x^*=x^*.$$

Звідси, а також із включення $x^*\in\mathcal{B}^0[0,r]$ і другої умови теореми випливає твердження теореми.

Теорему 2 доведено.

4. Основний результат. Нагадаємо, що, як зазначено в п. 2, нас цікавитимуть умови, при виконанні яких система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням (1), тобто система

$$\frac{dx(t)}{dt} + F(t, x(t)) = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T},$$
$$\Delta x|_{t=t_n} + G_n(x(t_n - 0)) = g_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

для кожних функції $f = f(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ і послідовності $\mathfrak{g} = g_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ має хоча б один розв'язок $x = x(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$.

При отриманні цих умов будемо використовувати допоміжні лінійні системи з імпульсним збуренням вигляду

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \\ &\Delta x|_{t=t_n} + B_n x(t_n - 0) = g_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{21}$$

коефіцієнти $A(t)$ і B_n яких в певному сенсі (див. формулювання теореми 3 і співвідношення (22)) мало відрізняються на замкнених кулях простору E від $F(t, \cdot)$ і $G_n(\cdot)$ відповідно.

Як і в пп. 3.2, використаємо множину пар $(A, \mathfrak{B})$ визначених і неперервних на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{T}$ функцій $A = A(t)$ зі значеннями в $L(E, E)$ і двосторонніх послідовностей $\mathfrak{B} = B_n \in L(E, E)$, $n \in \mathbb{Z}$, що є елементами просторів $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, L(E, E))$ і $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, L(E, E))$ відповідно.

Множину лінійних операторів $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$, що залежать від $(A, \mathfrak{B})$, кожен з яких визначається лівою частиною системи (21), тобто співвідношеннями (9)–(11), і має обернений неперервний оператор $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})} : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E) \to$ $\to C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$, позначимо через $\mathcal{O}$.

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема 3. *Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$, для яких*

$$\sup_{x \in \mathcal{B}^0[0,r]} \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}} \left\| F(t, x(t)) - A(t)x(t) \right\|_E, \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left\| G_n(x(t_n - 0)) - B_n x(t_n - 0) \right\|_E \right\} \le$$
$$\le \frac{r}{\left\| \mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})} \right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E), C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}} - H. \tag{22}$$

Тоді для кожних $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ і $\mathfrak{g} \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ система рівнянь (1) *має хоча б один розв'язок $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільні $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E)$ і $\mathfrak{g} \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$. Нехай

$$H = \left\| (f, \mathfrak{g}) \right\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)}. \tag{23}$$

Згідно з умовами теореми для числа H, що визначається рівністю (23), існують такі число $r > 0$, пара $(A, \mathfrak{B})$ і відповідно оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$, для яких виконується співвідношення (22).

Запишемо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = A(t)x(t) - F(t, x(t)) + f(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \\ &\Delta x|_{t=t_n} + B_n(x(t_n - 0)) = B_n(x(t_n - 0)) - G_n(x(t_n - 0)) + g_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{24}$$

Очевидно, що системи рівнянь (1) і (24) рівносильні.

Використовавши оператор $\mathfrak{H}: C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, що визначається співвідношеннями

$$\begin{gathered} \mathfrak{H}x = (\mathcal{F}x, \mathcal{G}x), \\ (\mathcal{F}x)(t) = A(t)x(t) - F(t,x(t)) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T}, \end{gathered} \tag{25}$$

і

$$(\mathcal{G}x)_n = B_n(x(t_n-0)) - G_n(x(t_n-0)) + g_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $x \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$, а також оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}: C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, запишемо систему рівнянь (24) у вигляді

$$\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}x = \mathfrak{H}x. \tag{26}$$

Завдяки тому, що оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}$ має неперервний обернений $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$, рівняння (26) рівносильне рівнянню

$$x = \mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\mathfrak{H}x. \tag{27}$$

Це рівняння рівносильне системі рівнянь (1).

Покажемо, що множина розв'язків рівняння (27) не є порожньою. Застосуємо до рівняння (27) теореми 1 і 2.

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}: C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ має неперервний (а отже, й обмежений) обернений оператор $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$, який за теоремою 1 є c-неперервним.

З умов, які задовольняють функції $A(t)$ і $F(t,\cdot)$ та послідовності елементів B_n і $G(\cdot)_n$, $n \geq 1$, випливає, що оператор $\mathfrak{H}$ також є обмеженим і c-неперервним.

Отже, для операторів $\mathfrak{H}$ і $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$, що є аналогами операторів $\mathfrak{F}$ і $\mathfrak{G}$, виконується перша умова теореми 2.

Друга умова цієї теореми також виконується, тобто $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\mathfrak{H}\mathcal{B}^0[0,r] \subset \mathcal{B}^1[0,r]$. Це включення випливає з наступних співвідношень. Справді, з урахуванням (22) і (23) для кожного $x \in \mathcal{B}^0[0,r]$

$$\begin{gathered} \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\mathfrak{H}x\right\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \leq \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\|\mathfrak{H}x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} = \\ = \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))} \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\|(\mathcal{F}x)(t)\|_E, \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|(\mathcal{G}x)_n\|_E\right\} = \\ = \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))} \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\|A(t)x(t) - F(t,x(t)) + f(t)\|_E,\right. \\ \left.\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|B_n(x(t_n-0)) - G_n(x(t_n-0)) + g_n\|_E\right\} \leq \\ \leq \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))} \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}(\|A(t)x(t) - F(t,x(t))\|_E + \|f(t)\|_E),\right. \\ \left.\sup_{n\in\mathbb{Z}}(\|B_n(x(t_n-0)) - G_n(x(t_n-0))\|_E + \|g_n\|_E)\right\} \leq \end{gathered}$$

$$\le \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\left(\frac{r}{\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}} - H\right) +$$
$$+ \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\|(f,\mathfrak{g})\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} =$$
$$= r - \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}H + \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}H = r.$$

Отже, на підставі теореми 2 рівняння (27) має хоча б один розв'язок $x \in \mathcal{B}^1[0,r]$.

Завдяки рівносильності системи рівнянь (1) і рівняння (27) та довільності вибору $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і $\mathfrak{g} \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ твердження теореми є правильним.

Теорему 3 доведено.

***Зауваження* 2.** У системі (1) відображення $F(t,\cdot)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$, і $G_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{Z}$, можуть бути неліпшицевими.

5. Випадок лінійних імпульсних систем. Зафіксуємо довільні функцію $Q = Q(t) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},L(E,E))$ і послідовність $\mathfrak{R} = R_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z},L(E,E))$. Розглянемо відповідні систему лінійних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} + Q(t)x(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T},\\ \Delta x|_{t=t_n} + R_n x(t_n - 0) = g_n, \quad n \in \mathbb{Z},\end{gathered} \tag{28}$$

де $f = f(t) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і $\mathfrak{g} = g_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, та лінійний диференціальний оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}$: $C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, що має вигляд

$$\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}x = (\mathscr{L}_1 x, \mathscr{D}_1 x), \quad x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E),$$

де

$$(\mathscr{L}_1 x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} + Q(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T},$$

і

$$(\mathscr{D}_1 x)_n = \Delta x|_{t=t_n} + R_n x(t_n - 0), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Наведемо необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язку $x = x(t) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ системи (28) для кожних $f = f(t) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$ і $\mathfrak{g} = g_n \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, тобто умови оборотності оператора $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})} : C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$.

Використаємо теорему 3 та оператори $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$, що визначаються співвідношеннями (9) – (11).

Справджується таке твердження.

Теорема 4. *Для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$, для яких*

$$\sup_{x\in\mathcal{B}^0[0,r]} \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\|Q(t)x(t)) - A(t)x(t)\|_E, \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|R_n x(t_n-0) - B_n x(t_n-0)\|_E\right\} <$$
$$< \frac{r}{\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}} - H, \tag{29}$$

тоді і тільки тоді, коли лінійний оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})} : C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ має обернений неперервний оператор.

Доведення. Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$, що виконується нерівність (29). Тоді завдяки теоремі 3 для множини значень $R(\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})})$ оператора $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ виконується співвідношення

$$R(\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}) = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E). \tag{30}$$

Покажемо, що для ядра $\ker \mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}$ цього оператора справджується рівність

$$\ker \mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})} = \{0\}, \tag{31}$$

тобто для системи рівнянь

$$\begin{gathered} \frac{dx(t)}{dt} + Q(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \\ \Delta x|_{t=t_n} + R_n x(t_n - 0) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{gathered} \tag{32}$$

обмеженим розв'язком є лише нульовий розв'язок.

Запишемо систему рівнянь (32) у вигляді

$$\begin{gathered} \frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = a(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \\ \Delta x|_{t=t_n} + B_n x(t_n - 0) = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{gathered} \tag{33}$$

де

$$a(t) = (A(t) - Q(t))x(t), \ t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \tag{34}$$

і

$$b_n = (B_n - R_n)x(t_n - 0), \ n \in \mathbb{Z}. \tag{35}$$

Оскільки оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ має неперервний обернений $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$, то система рівнянь (32) рівносильна рівнянню

$$x(t) = \Big(\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}(a, \mathfrak{b})\Big)(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \tag{36}$$

в якому згідно з (33)–(35)

$$a = a(t) \quad \text{і} \quad \mathfrak{b} = b_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $x_*(t)$ — обмежений розв'язок рівняння (36), тобто

$$x_*(t) \equiv \Big(\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}(a_*, \mathfrak{b}_*)\Big)(t), \tag{37}$$

де

$$a_* = a_*(t) = (A(t) - Q(t))x_*(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{T}, \tag{38}$$

і

$$\mathfrak{b}_* = b_{*,n} = (B_n - R_n)x_*(t_n - 0), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{39}$$

На підставі (29) і (37)–(39)

$$\|x_*\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} = \big\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}(a_*, \mathfrak{b}_*)\big\|_{C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} \le$$

$$\leq \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\|(a_*,\mathfrak{b}_*)\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} =$$

$$= \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\max\{\|a_*\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)},\|\mathfrak{b}_*\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)}\} =$$

$$= \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\|Q(t)x_*(t)) - A(t)x_*(t)\|_E,\right.$$

$$\left.\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|R_nx_*(t_n-0) - B_nx_*(t_n-0)\|_E\right\} \leq \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\times$$

$$\times \sup_{\|x\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}\leq\|x_*\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}}\max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\|Q(t)x(t)) - A(t)x(t)\|_E,\right.$$

$$\left.\sup_{n\in\mathbb{Z}}\|R_nx(t_n-0) - B_nx(t_n-0)\|_E\right\} \leq$$

$$\leq \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\sup_{x\in\mathcal{B}^0[0,r]}\max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}}\|Q(t)x(t)) - A(t)x(t)\|_E,\right.$$

$$\left.\sup_{n\in\mathbb{Z}}\left\|R_nx(t_n-0) - B_nx(t_n-0)\right\|_E\right\}\frac{\|x_*\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}}{r} <$$

$$< \left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\left(\frac{r}{\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}} - H\right)\times$$

$$\times\frac{\|x_*\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}}{r} = \left(1 - \frac{H}{r}\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}\right)\|x_*\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)}.$$

Звідси та з того, що на підставі (29)

$$0 < 1 - \frac{H}{r}\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))} < 1,$$

випливає рівність

$$\|x^*\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)} = 0,$$

тобто співвідношення (31) виконується.

Отже, з рівностей (30), (31) і теореми Банаха про обернений оператор [18] випливає, що оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}\colon C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ має неперервний обернений, тобто якщо для кожного числа $H>0$ існують такі число $r>0$ й оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}\in\mathcal{O}$, для яких справджується співвідношення (29), то оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}$ має неперервний обернений.

Навпаки, нехай оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}\colon C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ має неперервний обернений, тобто $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}\in\mathcal{O}$. Зафіксуємо довільне число $H>0$ і виберемо таке число $r>0$, щоб

$$\frac{r}{\left\|\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}} - H > 0.$$

Поклавши $(A,\mathfrak{B}) = (Q,\mathfrak{R})$, отримаємо (29).

Отже, якщо оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})}$ має неперервний обернений, то для кожного числа $H>0$ існують такі число $r>0$ і оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})}\in\mathcal{O}$, для яких справджується співвідношення (29).

Теорему 4 доведено.

Із теореми 4 випливає таке твердження.

Теорема 5. *Оператор* $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})} : C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ *має обернений неперервний оператор тоді і тільки тоді, коли існує оператор* $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$, *для якого*

$$\sup_{x\in\mathcal{B}^0[0,1]} \max\left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}} \|Q(t)x(t)) - A(t)x(t)\|_E,\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|R_n x(t_n-0) - B_n x(t_n-0)\|_E \right\} <$$

$$< \frac{1}{\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}}. \tag{40}$$

Справді, нехай для деякого оператора $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$ виконується співвідношення (40). Зафіксуємо довільне число $H > 0$ і виберемо таке число $r > 0$, щоб

$$\frac{1}{\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}} -$$

$$- \sup_{x\in\mathcal{B}^0[0,1]} \max\left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}} \|Q(t)x(t)) - A(t)x(t)\|_E,\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|R_n x(t_n-0) - B_n x(t_n-0)\|_E \right\} > \frac{H}{r}.$$

Тоді буде виконуватися співвідношення (29). Тому згідно з теоремою 4 лінійний оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})} : C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ має неперервний обернений.

Навпаки, якщо оператор $\mathfrak{L}_{(Q,\mathfrak{R})} : C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ має неперервний обернений, то за теоремою 4 для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} \in \mathcal{O}$, для яких справджується співвідношення (29). З (29) випливає (40).

Отже, твердження теореми 5 є правильним.

6. Малі на нескінченності збурення лінійних імпульсних систем. Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\begin{gathered}\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = F(t,x(t)) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T},\\ \Delta x|_{t=t_n} + B_n(x(t_n-0)) = G_n(x(t_n-0)) + g_n, \quad n \in \mathbb{Z},\end{gathered} \tag{41}$$

в якій функції $A = A(t)$, $f = f(t)$ і послідовності $\mathfrak{B} = B_n$, $\mathfrak{g} = g_n$, $n \in \mathbb{Z}$, такі, як у системі рівнянь (21), а нелінійні відображення $F(t,\cdot) : E \to E$, $t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$, і $G_n(\cdot) : E \to E$, $n \in \mathbb{Z}$, такі, як у системі рівнянь (1).

Вважаємо, що виконуються такі умови:

1. Лінійний неперервний оператор $\mathfrak{L}_{(A,\mathfrak{B})} : C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$, що визначається лівою частиною системи (21), має обернений неперервний оператор $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$.

2. Справджується нерівність

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\sup_{x\in\mathcal{B}^0[0,r]} \max\left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}} \|F(t,x(t))\|_E, \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|G_n(x(t_n-0)\|_E \right\}}{r} <$$

$$< \frac{1}{\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E),C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}}. \tag{42}$$

Окремим випадком теореми 3 є таке твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* 1 *і* 2. *Тоді система рівнянь* (41) *для кожних* $(f,\mathfrak{g}) \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)$ *має хоча б один розв'язок* $x \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E)$.

Справді, зафіксуємо довільний елемент $(f, \mathfrak{g}) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{T}, E) \times \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$.

Завдяки умовам теореми для кожного числа $H > 0$ існує таке достатньо велике число $r > 0$, що виконуються співвідношення

$$\sup_{x \in \mathcal{B}^0[0,r]} \max\left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T}} \|F(t, x(t)) + f(t)\|_E, \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|G_n(x(t_n - 0) + g_n\|_E \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{x \in \mathcal{B}^0[0,r]} \max\left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T}} \|F(t, x(t))\|_E, \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|G_n(x(t_n - 0)\|_E \right\} + \|(f, \mathfrak{g})\|_{C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} \leq$$

$$\leq \frac{r}{\left\|\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}\right\|_{L(C^0(\mathbb{R},\mathbb{T},E)\times\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E), C^1(\mathbb{R},\mathbb{T},E))}} - H.$$

Тоді на підставі теореми 3 справджується твердження теореми 6.

***Зауваження* 3.** Співвідношення (42) виконується, якщо

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}\times E} \|F(t,x)\|_E + \sup_{(n,x)\in\mathbb{Z}\times E} \|G_n(x)\|_E < +\infty.$$

***Зауваження* 4.** Відображення $F(t, \cdot)\colon E \to E,\ t \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{T}$, та $G_n(\cdot)\colon E \to E,\ n \in \mathbb{Z}$, в системі (41) можуть бути такими, що виконується співвідношення (42) і

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\sup_{x\in\mathcal{B}^0[0,r]} \max\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{T}} \|F(t, x(t))\|_E, \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|G_n(x(t_n - 0)\|_E\right\}}{r} = +\infty.$$

7. Додаткові зауваження та літературні вказівки. 1. Поняття c-неперервного оператора (на мові „ε, δ”) і c-цілком неперервного оператора введено Е. Мухамадієвим [11, 12]. Вивчення цих понять було продовжено в [21 – 24] та інших роботах. Визначення c-неперервного оператора, що використовує локально збіжні послідовності, запропоновано в [25, 26].

2. Теорема 1 про c-неперервність оберненого оператора $\mathfrak{L}^{-1}_{(A,\mathfrak{B})}$ і теорема 2 про нерухому точку для c-неперервного оператора $\mathfrak{S}\mathfrak{F}\colon \mathcal{B}^0[0,r] \to \mathcal{B}^1[0,r]$, застосовані до дослідження імпульсних систем, є новими.

3. Дослідження загальних нелінійних і лінійних імпульсних рівнянь за допомогою методу локальної лінійної апроксимації нелінійних систем проведено вперше, отримані результати про обмежені розв’язки цих рівнянь (теореми 3 – 6) є новими.

4. Аналогічні дослідження диференціальних, різницевих та диференціально-функціональних рівнянь із використанням локальних лінійних наближень відповідних рівнянь виконано в [27 – 30].

Література

1. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
2. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, Москва (1970).
3. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, Москва (1970).
4. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва (1970).
5. Ю. В. Трубников, А. И. Перов, *Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями*, Наука и техника, Минск (1986).

6. А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний*, Наука, Москва (1987).
7. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Киев (1987).
8. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, В. Л. Кулик, *Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова*, Наук. думка, Киев (1990).
9. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Sci., Singapore (1995).
10. В. Ю. Слюсарчук, *Оборотність нелінійних різницевих операторів*, Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, Рівне (2006).
11. Э. Мухамадиев, *Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций*, Мат. заметки, **11**, № 3, 269–274 (1972).
12. Э. Мухамадиев, *Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений*, Мат. заметки, **30**, № 3, 443 – 460 (1981).
13. В. Е. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).
14. А. М. Самойленко, *Н. Н. Боголюбов и нелинейная механика*, Успехи мат. наук, **49**, № 5, 103 – 146 (1994).
15. М. О. Перестюк, В. Ю. Слюсарчук, *Оператор Гріна – Самойленка в теорії інваріантних множин нелінійних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **61**, № 7, 948 – 957 (2009).
16. М. О. Перестюк, В. Ю. Слюсарчук, *Системи зі збуреннями параметрів*, Нелінійні коливання, **24**, № 2, 233 – 248 (2021).
17. М. О. Перестюк, В. Ю. Слюсарчук, *Застосування функції та оператора Гріна – Самойленка до дослідження неліпшицевих диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **73**, № 12, 1669 – 1686 (2021).
18. А. М. Колмогоров, С. В. Фомін, *Елементи теорії функцій і функціонального аналізу*, Вища шк., Київ (1974).
19. В. Е. Слюсарчук, *Ненаполненность подалгебры c-непрерывных операторов в алгебре* $L(L_p, L_p)$ $(1 \leq p \leq \infty)$, Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач, Зб. наук. пр., вип. 10, 229 – 231 (1995).
20. Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу*, Мир, Москва (1977).
21. В. Е. Слюсарчук, *Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 8, 34 – 37 (1981).
22. В. Е. Слюсарчук *Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов*, Мат. сб., **130**, № 1, 86 – 104 (1986).
23. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов*, Мат. заметки, **42**, № 2, 262 – 267 (1987).
24. В. Е. Слюсарчук, *Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов*, Укр. мат. журн., **41**, № 2, 201 – 205 (1989).
25. В. Е. Слюсарчук, *Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем*, Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений, Душанбе, 102 – 103 (1987).
26. В. Е. Слюсарчук, *Слабо нелинейные возмущения импульсных систем*, Мат. физика и нелинейная механика, вып. 15, 32 – 35 (1991).
27. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь*, Нелінійні коливання, **12**, № 3, 368 – 378 (2009).
28. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь*, Укр. мат. журн., **61**, № 11, 1541 – 1556 (2009).
29. В. Е. Слюсарчук, *Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений*, Мат. сб., **201**, № 8, 103 – 126 (2010).
30. В. Ю. Слюсарчук, *Метод локальної лінійної апроксимації в теорії нелінійних рівнянь*, Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, Рівне (2011).

Одержано 13.10.22