DOI: 10.37863/umzh.v75i1.7365

УДК 517.9

О. М. Станжицький[1,2] (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
О. Д. Кічмаренко (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова),
В. В. Могильова (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”),
Т. В. Ковальчук (Держ. торговельно-економ. ун-т, Київ)

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕСКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

We consider the optimal control problem for systems with infinite memory whose models are described by functional differential equations. We prove the theorem on existence, uniqueness, and continuity of solutions of the system of functional differential equations in which the delay interval is infinite. Sufficient conditions for the existence of optimal controls in the optimal control problem for systems with infinite memory are obtained in terms of the right-hand sides of the equations of motion and the function of the quality criterion.

Розглядається задача оптимального керування системами із нескінченною пам’яттю, моделі яких описуються функціонально-диференціальними рівняннями. Доведено теорему про існування, єдиність та продовжуваність розв’язків системи функціонально-диференціальних рівнянь, в яких інтервал запізнення є нескінченним. Отримано в термінах правих частин рівнянь руху та функції критерію якості достатні умови існування оптимальних керувань задачі оптимального керування системами із нескінченною пам’яттю.

Вступ. Цю статтю присвячено дослідженню задачі оптимального керування систем, в яких інтервал запізнення є нескінченним.

Функціонально-диференціальні рівняння широко використовуються в якості моделей різноманітних еволюційних процесів, в яких поточний стан системи безпосередньо залежить від показників стану в попередні моменти часу. Наявність запізнення чинить істотний вплив на якісну поведінку системи. Права частина таких моделей є функціоналом, що суттєво ускладнює об’єкт дослідження та вимагає розробки та застосування спеціальних методів. У середині XX століття диференціальні рівняння із запізненням досліджували А. Д. Мишкіс [6], R. Bellman [1], М. М. Красовський [2], A. Halanay [12]. Широке застосування таких моделей спонукало бурхливий розвиток теорії функціонально-диференціальних рівнянь. Значний внесок в її розвиток зробили праці Л. Е. Ельсгольца і С. Б. Норкіна [13], J. K. Hale [14], Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, Д. І. Мартинюка, С. І. Трофімчука [3 – 5, 7], В. Ю. Слюсарчука [9, 17], В. І. Фодчука, І. М. Черевка, Я. Й. Бігуна [8, 10, 11] та багатьох інших математиків.

Особливе місце займають задачі оптимального керування такими системами та доведення існування розв’язків задачі оптимального керування функціонально-диференціальною системою.

В роботах [15, 16] отримано достатні умови існування оптимальних керувань для систем функціонально-диференціальних рівнянь із скінченним запізненням.

Метою цієї роботи є дослідження питання існування, єдиності та продовжуваності до межі області розв’язку системи функціонально-диференціальних рівнянь із нескінченним інтервалом запізнення, встановлення умов існування оптимального керування для них.

[1] Відповідальний за листування, e-mail: ostanzh@gmail.com.

[2] Дослідження О. М. Станжицького виконано у рамках Державної бюджетної теми НДР № 210BF38-01.

Основним результатом статті є доведення теореми про існування оптимальних керувань системою функціонально-диференціальних рівнянь. При цьому отримані достатні умови мають коефіцієнтний характер, тобто виражаються в термінах правих частин рівнянь руху та функції критерію якості.

1. Постановка задачі й основні результати. ***1.1. Постановка задачі оптимального керування системами функціонально-диференціальних рівнянь.*** Спочатку введемо необхідні позначення. Розглянемо $BC((-\infty,0];\mathbb{R}^n)$ — банахів простір неперервних вектор-функцій, визначених на $(-\infty,0]$, які діють у простір $\mathbb{R}^n$ з рівномірною метрикою

$$\|\varphi\| = \max_{-\infty<\theta\leq 0} |\varphi(\theta)|,$$

де $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, а норму матриці, узгоджену з нормою вектора, будемо позначати $\|\cdot\|$.

Нехай $L_p = L_p((\infty,0],\mathbb{R}^m)$, $p>1$, — банахів простір p-інтегровних m-вимірних вектор-функцій із стандартною нормою

$$\|\varphi\|_{L_p} = \left(\int_{-\infty}^{0} |\varphi(\omega)|^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}},$$

$x \in BC\big((-\infty,0];\mathbb{R}^n\big)$ і початкова функція $\varphi \in BC\big((-\infty,0];\mathbb{R}^n\big)$. Якщо $x(0)=\varphi(0)$, то функція

$$x(t,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t), & t\in[-\infty,0], \\ x(t), & t\geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

є неперервною на $(-\infty,T]$.

Позначимо $x_t(\varphi) \in BC\big((-\infty,0];\mathbb{R}^n\big)$ для кожного $t>0$ при $\theta\in(-\infty,0]$ як $x_t(\varphi) = x(t+\theta;\varphi)$.

Функція $x(t)$ є розв'язком початкової задачі при $t\geq 0$

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x_t),$$
$$x(s)=\varphi(s), \quad s\in(-\infty,0], \quad \varphi\in BC,$$

на $[0,\infty)$, якщо для довільного $t\geq 0$ функція $x(t,\varphi)$ (1) задовольняє співвідношення

$$x(t,\varphi) = \varphi(0) + \int_0^t f(s,x_s(\varphi))ds.$$

Нехай $t\in[0,T]$ і D — деяка область в $[0,T]\times BC$, ∂D — межа цієї області і $\bar{D} = D\cup\partial D$. Розглянемо задачу оптимального керування функціонально-диференціальною системою

$$\dot{x} = f_1(t,x_t) + \int_{-\infty}^{0} f_2(t,x_t,y)u(t,y)dy, \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad t \in (-\infty, 0], \tag{3}$$

з критерієм якості

$$J[u] = \int\limits_0^\tau L(t, x_t, u(t,\cdot))\,dt \to \inf \tag{4}$$

на $[0,T]$, де $\varphi_0 \in BC$ — фіксований елемент, такий що $(0,\varphi_0) \in D$, $x(t)$ — фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, x_t — фазовий вектор BC, τ — момент часу, коли розв'язок (t, x_t) виходить на межу ∂D, $f_1 \colon D \to \mathbb{R}^d$, $f_2 \colon D \times (-\infty, 0] \to M^{d\times m}$, де $M^{d\times m}$ — $(d\times m)$-вимірні матриці. Для кожної пари $(t,\varphi) \in D$ $f_2(t,\varphi,\cdot) \in L_q\big((-\infty,0], M^{d\times m}\big)$ з нормою

$$\|f_2(t,\varphi,\cdot)\|_{L_q} = \left(\int\limits_{-\infty}^0 |f_2(t,\varphi,y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, \quad p > 1, \quad L \colon D \times L_p \to \mathbb{R}^1.$$

Керування $u \in L_p([0,T] \times (-\infty, 0])$ таке, що $u(t,y) \in U$, U — замкнена та опукла множина в $\mathbb{R}^m$ майже для всіх t, y.

Означення 1. *Допустимими керуваннями є m-вимірні вектор-функції $u \in L_p([0,T]\times$ $\times\big([-\infty,0],\mathbb{R}^m\big))$, такі що $u(t,y) \in U$ майже для всіх $t \in [0,T]$ і $y \in (-\infty,0]$. Множину допустимих керувань позначатимемо U.*

Для задачі оптимального керування системою (2) з початковою умовою (3) серед допустимих керувань необхідно знайти такі, що доставляють мінімальне значення критерію (4).

Сформулюємо умови, які вимагатимемо для функцій, що описують поведінку системи (2).

***Умова* 1.** Відображення $f_1(t,\varphi) \colon D \to \mathbb{R}^d$ і $f_2(t,\varphi,y) \colon D \times (-\infty,0] \to M^{d\times m}$ визначені та вимірні за всіма їхніми аргументами відповідно в області D та $D_1 = \big\{(t,\varphi) \in D,\ y \in (-\infty, 0]\big\}$ і задовольняють умови

$$\begin{aligned} &|f_1(t,\varphi)| \le K(1 + \|\varphi\|_{BC}) \quad \forall (t,\varphi) \in D, \\ &\|f_2(t,\varphi,y)\| \le g(y)(1 + \|\varphi\|_{BC}), \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$g(y) \colon \int\limits_{-\infty}^0 g^q(y)dy < \infty,$$

$$\begin{aligned} &|f_1(t,\varphi_1) - f_1(t,\varphi_2)| \le K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{BC}, \\ &\|f_2(t,\varphi_1,y) - f_2(t,\varphi_2,y)\| \le g(y)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{BC}. \end{aligned} \tag{6}$$

Тепер наведемо вимоги до функції, яка входить до критерію (4).

***Умова* 2.** Нехай функція критерію якості задовольняє такі умови:

1) відображення $L(t,\varphi,z) \colon D \times L_p \to \mathbb{R}^1$ визначене і неперервне за всіма його аргументами в області $D_2 = \big\{(t,\varphi) \in D,\ z \in L_p\big\}$;

2) існує така стала $a > 0$, що

$$|L(t,\varphi_1,z) - L(t,\varphi_2,z)| \le a\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{BC}$$

для всіх $(t,\varphi_1,z), (t,\varphi_2,z) \in D_2$;

3) похідна Фреше L_u відображення L неперервна за всіма її аргументами в області D_2 та існують такі $c_1 > 0,\ \alpha > 0$, що для всіх $(t, \varphi, z) \in D_2$ виконується нерівність

$$\|L_u(t, \varphi, z)\|_{L_q} \le c_1\Big(1 + \|\varphi\|^{\alpha}_{L_p} + \|z\|^{p-1}_{L_p}\Big);$$

4) існує така стала $c > 0$, що $L(t, \varphi, z) \ge c\|z\|^p_{L_p}$ для всіх $(t, \varphi, z) \in D_2$;

5) функція $L(t, \varphi, z)$ опукла по z для всіх фіксованих $t,\ \varphi$.

Означення 2. *Розв'язком початкової задачі* (2) *на сегменті* $(-\infty, T],\ T > 0$, *називають функцію* $x(t)$, *неперервну на сегменті* $(-\infty, T]$, *для якої виконуються такі умови:*

1) $x(t) = \varphi_0(t),\ t \in (-\infty, 0]$;

2) $(t, x_t) \in D$ *на* $t \in [0, T]$;

3) *для* $t \in [0, T]$ *функція* $x(t)$ *задовольняє інтегральне рівняння*

$$x(t) = \varphi_0(0) + \int\limits_0^t \left[f_1(s, x_s) + \int\limits_{-\infty}^0 f_2(s, x_s, y)u(s, y)dy \right] ds. \tag{7}$$

1.2. Формулювання теорем. Встановимо умови існування та єдиності розв'язків системи функціонально-диференціальних рівнянь (2) з нескінченним інтервалом запізнення (3), а також їх продовжуваність до межі області.

Теорема 1. *Нехай виконується умова* 1, *а початкова функція* $\varphi_0(t)$ *рівномірно неперервна по* $t \in (-\infty, 0]$. *Тоді існує розв'язок початкової задачі* (7) *на сегменті максимальної довжини* $(-\infty, \tau],\ \tau > 0$, *і* $(\tau, x_\tau) \in \partial D$.

Наступна теорема містить умови існування оптимальної пари $\big(x^*(t), u^*(t, \theta)\big)$ для задачі (2) – (4). Оптимальне керування $u^* \in U$ на відповідній траєкторії $x^*(t)$ доставляє мінімум критерію якості (4).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* 1 *і* 2. *Тоді існує розв'язок задачі оптимального керування* (2) – (4).

2. Доведення теорем. ***2.1. Доведення теореми* 1 *про існування, єдиність та продовжуваність розв'язків до межі області.*** Зафіксуємо допустиме керування $u^* \in U$.

Спочатку доведемо локальне існування та єдиність розв'язку задачі (2) на певному сегменті $(-\infty, \alpha],\ \alpha > 0$.

Будемо використовувати стандартний принцип стискаючих відображень.

Очевидно, що існують такі $\alpha_0 > 0$ і $\beta_0 > 0$, що всі (t, φ), для яких $0 \le t \le \alpha_0$ і $\|\varphi - \varphi_0\|_{BC} \le \beta_0$, належать області D.

Далі розглянемо клас $B(\alpha, \beta_0)$ всіх неперервних на $(-\infty, \alpha]$ функцій $x(t)$ таких, що збігаються з φ_0 на $(-\infty, 0]$ і $|x(t) - \varphi_0(0)| \le \beta_0$ для $t \in [0, \alpha]$.

Множина $B(\alpha, \beta_0)$ є замкненою щодо рівномірної метрики на $(-\infty, \alpha]$. У даному випадку існує таке $\alpha_0 \ge \alpha_1 > 0$, що якщо $x(t) \in B(\alpha, \beta_0)$ при $0 < \alpha \le \alpha_1$, то виконується нерівність

$$\|x_t - \varphi_0(0)\|_{BC} \le \beta_0, \quad t \in [0, \alpha].$$

За умов рівномірної неперервності функції φ_0 на $(-\infty, 0]$ існує таке $\alpha_1 > 0$, що якщо $|\theta_1 - \theta_2| \le \alpha_1$, то

$$|\varphi_0(\theta_1) - \varphi_0(\theta_2)| \le \frac{\beta_0}{3} \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in (-\infty, 0]. \tag{8}$$

Отже, для довільного $t \in [0, \alpha_1]$ при $\alpha \leq \alpha_1$ з (8) та властивостей множини $B(\alpha, \beta_0)$ отримуємо

$$\|x_t - \varphi_0\|_{BC} \leq \sup_{\theta \in (-\infty, -t]} |x(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| + \sup_{\theta \in [-t, 0]} |x(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| \leq$$

$$\leq \sup_{\theta \in (-\infty, -t]} |\varphi_0(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| + \sup_{\theta \in [-t, 0]} |x(t+\theta) - \varphi_0(\theta)| +$$

$$+ \sup_{\theta \in [-t, 0]} |\varphi_0(\theta) - \varphi(0)| \leq \frac{\beta_0}{3} + \frac{\beta_0}{3} + \frac{\beta_0}{3} = \beta_0.$$

Далі будемо доводити, що $\alpha > 0$ можна вибрати так, щоб оператор

$$(Ax)(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), \quad t \in (-\infty, 0], \\ \varphi_0(0) + \displaystyle\int_0^t f_1(s, x_s)\, ds + \\ \quad + \displaystyle\int_0^t \int_{-\infty}^0 f_2(s, x_s, y) u(s, y)\, dy\, ds, \quad t \in [0, \alpha], \end{cases}$$

відображав множину $B(\alpha, \beta_0)$ в себе і був стискаючим.

З леми 2.1 [14] випливає, що x_t — неперервна функція по $t \in [0, \alpha]$.

Отже, за означенням 1 функція $f_1(s, x_s)$ неперервна по $s \in [0, \alpha]$, а функція

$$\int_{-\infty}^{0} f_2(s, x_s, y) u(s, y) dy \tag{9}$$

вимірна по s і задовольняє оцінку

$$\left| \int_{-\infty}^{0} f_2(s, x_s, y) u(s, y)\, dy \right| \leq C_2 \left(\int_{-\infty}^{0} |u(s, y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

для деякої сталої $C_2 > 0$. Тому будемо мати інтегровність функції (9) по s, а отже, і абсолютну неперервність інтеграла (9).

Далі оцінимо $|(Ax)(t) - \varphi_0(0)|$ при $t \in [0, \alpha]$, $\alpha \leq \alpha_0$. З (5) і (6), використовуючи теорему Фубіні та нерівність Гельдера, маємо

$$|(Ax)(t) - \varphi_0(0)| \leq \int_0^t |f_1(s, x_s)|\, ds +$$

$$+ \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{0} \|f_2(s, x_s, y)\|\, |u(s, y)|\, dy \right) ds \leq \int_0^t K(1 + \|x_s\|_{BC})\, ds +$$

$$+ \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{0} g^q(y)(1 + \|x_s\|_{BC})^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{-\infty}^{0} |u(s, y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} ds \leq$$

$$\leq K\alpha(1+\beta_0+\|\varphi_0\|_{BC})+\alpha^{\frac{1}{q}}\,(1+\beta_0+\|\varphi_0\|_{BC})C_2^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|^p dyds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далі виберемо $\alpha_2 \leq \alpha_1$ з умови

$$(1+\beta_0+\|\varphi_0\|_{BC})\left(K\alpha+C_2^{\frac{1}{q}}\alpha^{\frac{1}{q}}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|^p\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{\beta_0}{3}.$$

Отже, для всіх $\alpha \leq \alpha_1$ оператор A відображає $B(\alpha,\beta_0)$ в себе.

Далі покажемо, що існує таке $\alpha_3 \in [0,\alpha_2]$, що оператор A буде стискаючим на $B(\alpha_3,\beta_0)$.

Нехай $x, z \in B(\alpha,\beta_0)$. З (5) і (6) отримуємо

$$|(Ax)(t)-(Az)(t)| \leq \int\limits_0^t K\|x_s-z_s\|_{BC}\,ds+\int\limits_0^t g(y)\|x_s-z_s\|_{BC}\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|\,dy\,ds \leq$$

$$\leq\left(K\alpha+K\alpha^{\frac{1}{q}}C_2^{\frac{1}{q}}\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|^p\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{t\in(-\infty,\alpha]}|x(t)-z(t)|.$$

Звідси маємо

$$\sup_{t\in(-\infty,\alpha]}|(Ax)(t)-(Az)(t)|\leq$$

$$\leq\left(K\alpha+K\alpha^{\frac{1}{q}}C_2^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|^p\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\right)\sup_{t\in(-\infty,\alpha]}|x(t)-z(t)|.$$

Виберемо $0<\alpha_3\leq\alpha_2$ з умови

$$K\alpha+K\alpha^{\frac{1}{q}}C_2^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|^p\,dy\,ds\right)^{\frac{1}{p}}<1.$$

Звідси випливає, що оператор $A\colon B(\alpha_3,\beta_0)\to B(\alpha_3,\beta_0)$ є стискаючим.

Отже, на сегменті $(-\infty,\alpha_3)$ існує єдиний розв'язок початкової задачі (2).

Для доведення продовжуваності цього розв'язку до межі ∂D використаємо підхід з доведення теореми 3.2 [14]. Візьмемо до уваги, що з (5) і (6) для $(t,\varphi)\in D$ отримуємо оцінки

$$|f_1(t,\varphi)|\leq K(1+\|\varphi\|_{BC}), \tag{10}$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{0} f_2(t,\varphi,y)u(t,y)\,dy\right|\leq K(1+\|\varphi\|_{BC})C_2^{\frac{1}{q}}\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|\,dy. \tag{11}$$

Нехай $(-\infty,\tau]$ — інтервал максимальної довжини, на якому існує розв'язок $x(t)$. Для його продовження до межі ∂D потрібно показати, що для довільної замкненої множини $G\in D_{t_G}$

існує таке t_G, що $(t,x_t)\notin G$ для $t\in[t_G,\tau]$. Доведемо цей факт від супротивного. Справді, якщо це не так, то аналогічно теоремі 3.2 [14] множина $\bar Q=\big\{(t,x_t)\colon t\in(-\infty,\tau]\big\}$ замкнена й обмежена в D. Отже, з оцінок (10), (11) випливає, що існує така стала M, що для $(t,\varphi)\in\bar Q$ виконуються нерівності

$$|f_1(t,\varphi)|\le M,$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{0} f_2(t,\varphi,y)u(t,y)\,dy\right|\le M\int\limits_{-\infty}^{0}|u(s,y)|\,dy.$$

З (7) для кожного $t_1,t_2\in[0,\tau]$ отримуємо

$$|x(t_2)-x(t_1)|\le M(t_2-t_1)+MC_2(t_2-t_1)^{\frac1q}\left(\int\limits_0^T\int\limits_{-\infty}^0|u(s,y)|^p dyds\right)^{\frac1p}. \tag{12}$$

Звідси випливає, що $\big\{(t,x_t)\colon t\in(-\infty,\tau]\big\}$ належить компактній множині в D. Отже, це суперечить наслідку 3.1 [14].

Теорему доведено.

2.2. Доведення теореми про існування оптимальних керувань. Спочатку зауважимо, що керування $u(t,y)=u(y)$ є допустимим. Нехай $x(t)$ — розв'язок, який відповідає керуванню $u(y)$, і τ — момент першого виходу розв'язку (t,x_t) на межу ∂D. Далі доведемо, що $x(t)$ обмежена на $[0,\tau]$.

З (7) для $t\in[0,\tau]$ маємо

$$|x(t)|\le|\varphi_0(0)|+\int\limits_0^t K(1+\|x_s\|_{BC})\,ds+\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^0 g(y)(1+\|x_s\|_{BC})\,dy\,ds\|u\|_{L_p}\le$$

$$\le|\varphi_0(0)|+\int\limits_0^t K(1+\|x_s\|_{BC})\,ds+C_2^{\frac1q}\int\limits_0^t(1+\|x_s\|_{BC})\,ds\|u\|_{L_p}\le$$

$$\le|\varphi_0(0)|+KT+C_2^{\frac1q}\|u\|_{L_p}T+\left(K+C_2^{\frac1q}\|u\|_{L_p}\right)\int\limits_0^t\|x_s\|_{BC}\,ds=$$

$$=C_3+C_4\int\limits_0^t\|x_s\|\,ds\le C_3+C_4\int\limits_0^t\max_{s_1\in(-\infty,s]}|x(s_1)|\,ds. \tag{13}$$

Використовуючи очевидну нерівність

$$\max_{s\in(-\infty,t]}|x(s)|\le\max_{s\in(-\infty,0]}|\varphi_0(s)|+\max_{s\in[0,t]}|x(s)|,$$

а також (13), отримуємо

$$\max_{s\in[0,t]}|x(s)|\le C_5+C_4\int\limits_0^t\max_{s_1\in[0,s]}|x(s_1)|\,ds$$

для деякої сталої $C_5 > 0$. Далі, використовуючи нерівність Гронуолла, переконуємося, що

$$\max_{s\in[0,t]} |x(s)| \le C_6, \quad t \in [0,\tau],$$

для деякої сталої $C_6 > 0$, яка не залежить від t. Із цього випливає, що

$$\max_{s\in[0,\tau]} \|x_s\|_{BC} \le C_6.$$

За лемою 2.1 [14] x_t неперервна по $t \in [0,\tau]$, а з першого пункту умови 2 випливає, що $L(t, x_t, u(y))$ (де $u(t,y) = u(y)$) неперервна по t і, отже, інтеграл

$$\int_0^\tau L(t, x_t, u(y))\, dt \tag{14}$$

є обмеженим. Тому $\inf_{u\in U} J(u) < \infty$. Оскільки $J(u) \ge 0$, то існує невід'ємна нижня межа m значень $J(u)$.

Нехай $u^{(n)}(t,y)$ — мінімізуюча послідовність, при цьому монотонно $J\big(u^{(n)}\big) \to m$ при $n \to \to \infty$.

Позначимо через $x^{(n)}$ послідовність розв'язків рівняння (7), відповідних до керувань $u^{(n)}$, $(-\infty, \tau_n]$ — максимальний інтервал існування. Із теореми 1 випливає, що $\big(\tau_n, x^{(n)}_{\tau_n}\big) \in \partial D$. Далі маємо

$$m + 1 \ge \int_0^{\tau_n} L\Big(t, x_t^{(n)}, u^{(n)}\Big)\, dt \ge C \int_0^T \int_{-\infty}^0 \Big|u^{(n)}(t,y)\Big|^p\, dy\, dt \tag{15}$$

для достатньо великих n. Отже, $u^{(n)(t,y)}$ слабко компактна в $L_p([0,T] \times (-\infty, 0])$.

Тому можна вибрати підпослідовність, яку позначимо знову через $u^{(n)}(t,y)$, що є слабко збіжною до $u^* \in L_p([0,T] \times (-\infty, 0])$.

Розглянемо опуклу комбінацію

$$p_k(t,y) = \sum_{i=1}^{n(k)} \alpha_i(k) u^{(i)}(t,y)$$

елементів $u^{(i)}(t,y)$ таких, що $p_k \to u^*$ сильно в $L_p([0,T] \times (-\infty, 0])$, яка існує за лемою Мазура. Тоді існує підпослідовність $p_{kj}(t,y)$ послідовності $p_k(t,y)$ така, що майже для всіх $(t,y) \in [0,T] \times (-\infty, 0]$ збігається до $u^*(t,y)$.

Оскільки U є опуклою, то $p_{kj}(t,y) \in U$, а із замкнености множини U випливає, що $u^*(t,y) \in \in U$ майже для всіх (t,y). Отже, функція керування $u^*(t,y)$ є допустимою.

Доведемо обмеженість розв'язку $x^{(n)}$ на $(-\infty, \tau_n]$. Із (7), означення 1 та умови 1 для $t \in [0, \tau_n]$ маємо

$$\Big|x^{(n)}(t)\Big|^q \le 3^{q-1} |\varphi(0)|^q + K^q T^{\frac{q}{p}} 2^{q-1} \int_0^t \Big(1 + \Big\|x_s^{(n)}\Big\|_{BC}^q\Big)\, ds +$$

$$+\left(\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^0\left|u^{(n)}(t,y)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^0 g^q(y)\Big(1+\left\|x_s^{(n)}\right\|_{BC}^q\Big)\right)dy\,ds\le$$

$$\le 3^{q-1}|\varphi(0)|^q+K^qT^{\frac{q}{p}}2^{q-1}\int\limits_0^t\Big(1+\left\|x_s^{(n)}\right\|_{BC}^q\Big)\,ds+$$

$$+\left(\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^0\left|u^{(n)}(t,y)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}C_2\int\limits_0^t 2^{q-1}\Big(1+\left\|x_s^{(n)}\right\|_{BC}^q\Big)\,ds.$$

Із (15) та з останньої нерівності для деяких додатних сталих $C_7,\ C_8$, які не залежать від $t,\ y,\ n$, отримуємо

$$\left|x^{(n)}(t)\right|^q\le C_7+C_8\int\limits_0^t\left\|x_s^{(n)}\right\|^q ds$$

для $t\in[0,\tau_n]$. Отже,

$$\max_{s\in(-\infty,t]}\left|x^{(n)}(s)\right|\le C_9+C_8\int\limits_0^t\max_{s_1\in(-\infty,s]}\left|x^{(n)}(s_1)\right|ds$$

для деякої сталої C_9.

Тоді з нерівності Гронуолла випливає, що

$$\max_{t\in(-\infty,\tau_n]}|x^{(n)}(t)|\le C_{10},\tag{16}$$

де C_{10} — додатна стала, яка не залежить від n.

Отже, $x^{(n)}(t)$ рівномірно обмежена.

Тепер продовжимо функції $x^{(n)}(t)$ на весь сегмент $[0,T]$ таким чином:

$$y^{(n)}(t)=\begin{cases}x^{(n)}(t), & t\in[0,\tau_n],\\ x^{(n)}(\tau_n), & t\in[\tau_n,T].\end{cases}\tag{17}$$

Якщо $s_1\le s_2\le\tau_n$, то з (15) отримуємо оцінку

$$\left|y^{(n)}(s_1)-y^{(n)}(s_2)\right|\le C_{11}(s_2-s_1)+C_{12}(s_2-s_1)^{\frac{1}{q}}.\tag{18}$$

Якщо $s_1\le\tau_n\le s_2$, то аналогічно (18)

$$\left|y^{(n)}(s_1)-y^{(n)}(s_2)\right|=\left|x^{(n)}(s_1)-x^{(n)}(\tau_n)\right|\le$$

$$\le C_{11}|\tau_n-s_1|+C_{12}|\tau_n-s_1|^{\frac{1}{q}}\le C_{11}(s_2-s_1)+C_{12}(s_2-s_1)^{\frac{1}{q}}.$$

Звідси випливає рівностепенева неперервність на $[0,T]$, а з (16), (17) — рівномірна обмеженість сім'ї функцій $\left\{y^{(n)}\right\}$. Тому $\left\{y^{(n)}\right\}$ містить підпослідовність, яка рівномірно збіжна на $[0,T]$; знову позначимо її $\left\{y^{(n)}\right\}$.

Нехай $y^*(t)$ — її рівномірна границя на $[0,T]$. Вона визначена та неперервна на $[0,T]$. Позначимо через τ^* момент першого виходу y_t^* на межу ∂D:

$$\tau^* = \begin{cases} \inf\{t \in [0,T] : (t, y_t^*) \in \partial D\}, \\ T, \quad \text{якщо} \quad (t, y_t^*) \in D \quad \forall t \in [0,T]. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо

$$y_{\tau_n}^{(n)} = y^{(n)}(\tau_n + \theta) = x^{(n)}(\tau_n + \theta) = x_{\tau_n}^{(n)},$$

то τ_n буде моментом першого виходу $\left(t, y_t^{(n)}\right)$ на межу ∂D.

Покажемо, що

$$\tau^* \leq \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n. \tag{19}$$

Припустимо протилежне. Тоді

$$\tau^* > \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau.$$

Очевидно, що існує така підпослідовність τ_{n_k}, що $\tau_{n_k} \to \tau$ при $n_k \to \infty$. Тому для достатньо великих n_k маємо $\tau < \tau^*$ і

$$(\tau, y_\tau^*) \in D, \tag{20}$$

але $\left(\tau_{n_k}, y_{\tau_{n_k}}^{(n_k)}\right) \in \partial D$. З іншого боку, оскільки $y^{(n)}(t)$ рівномірно збігається до $y^*(t)$ на $(-\infty, T]$ і $y^*(t)$ рівномірно неперервна на $(-\infty, T]$, то легко бачити, що $y_{\tau_{n_k}}^{(n_k)} \to y_\tau^*$ в BC при $n_k \to \infty$. Оскільки множина ∂D є замкненою, то $\left(\tau, y_\tau^*\right) \in \partial D$. А це суперечить (20), отже, $\tau^* \leq \tau = \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n$.

Нехай $x^*(t) = y^*(t)$ для $t \in \left[0, \tau^*\right]$. Покажемо, що $x^*(t)$ є розв'язком рівняння (2), яке відповідає керуванню $u^*(t)$.

Розглянемо два випадки:

1. Нехай $\tau^* < \tau$. Тоді з теореми про характеризацію нижньої границі множина $\left\{n \in \mathbb{N} : \tau_n \leq \leq \tau^*\right\}$ буде скінченною. Звідси випливає існування такої підпослідовності $\{\tau_{n_k}\}$ послідовності τ_n, що $\tau_{n_k} > \tau^*$. Тоді $y^{(n_k)}(t) = x^{(n_k)}(t)$ для $t \in \left[0, \tau^*\right]$ і $x^{(n_k)}(t)$ збігається рівномірно до $x^*(t)$ при $n_k \to \infty$. Маємо

$$x^{(n_k)}(t) = \varphi_0(0) + \int\limits_0^t f_1\Big(s, x_s^{(n_k)}\Big)\, ds + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^0 f_2\Big(s, x_s^{(n_k)}, y\Big) u^{(n_k)}(s,y)\, dy\, ds$$

для $t \in \left[0, \tau^*\right]$. Тоді отримуємо

$$x^{(n_k)}(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t f_1\Big(s, x_s^{(n_k)}\Big)\, ds + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^0 f_2\Big(s, x_s^{(n_k)}, y\Big) u^*(s,y)\, dy\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^0 \Big(f_2\Big(s, x_s^{(n_k)}, y\Big) - f_2(s, x_s^*, y)\Big)\Big(u^{(n_k)}(s,y) - u^*(s,y)\Big)\, dy\, ds +$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^0 f_2(s, x_s^*, y)\Big(u^{(n_k)}(s,y) - u^*(s,y)\Big)\, dy\, ds. \tag{21}$$

Очевидно, що $x_t^{(n_k)} \to x_t^*$ в BC для довільного $t \in \big[0, \tau^*\big]$. Із (6) випливає, що

$$\int_0^t f_1\Big(s, x_s^{(n_k)}\Big)\, ds \to \int_0^t f_1(s, x_s^*)\, ds.$$

Далі, враховуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, маємо

$$\int_0^t \int_{-\infty}^0 f_2\Big(s, x_s^{(n_k)}, y\Big) u^*(s,y)\, dy\, ds \to \int_0^t \int_{-\infty}^0 f_2(s, x_s^*, y) u^*(s,y)\, dy\, ds.$$

Аналогічно можемо показати, що третій інтеграл у (21) буде прямувати до 0 при $n_k \to \infty$. Тоді з умови 1 щодо f_2 випливає, що вираз

$$\int_0^t \int_{-\infty}^0 f_2(s, x_s^*, y) u(s,y)\, dy\, ds$$

визначає лінійний неперервний функціонал на $L_p([0,t] \times (-\infty, 0])$.

Останній інтеграл у (21) буде прямувати до 0 внаслідок слабкої збіжності $u^{(n_k)}(s,y) \to \to u^*(s,y)$. Виконуючи граничний перехід у (21), отримуємо, що $x^*(t)$ буде розв'язком початкової задачі (2) на $[0, \tau^*]$, який відповідає керуванню $u^*(t,y)$.

2. Нехай $\tau^* = \tau$. Візьмемо довільне $t_1 \in [0, \tau]$ таке, що $t_1 < \tau^*$. Тоді множина $\big\{n \in \mathbb{N} \colon \tau_n < t_1\big\}$ буде скінченною. Якщо множина $Y = \big\{n \in \mathbb{N} \colon t_1 < \tau_n \le \tau^*\big\}$ буде скінченною, то доведення зведеться до попереднього випадку. Припустимо, що множина Y нескінченна, підпослідовність τ_{n_k} послідовності τ_n така, що $\tau_{n_k} \in Y$. Тоді для кожного $t \in [0, t_1]$ маємо $y^{(n_k)}(t) = x^{(n_k)}(t)$ і $y^*(t) = x^*(t)$. Далі, аналогічно попередньому випадку $x^*(t)$ буде розв'язком початкової задачі (2) на $[0, t_1]$, який відповідає керуванню $u^*(t,y)$, тобто

$$x^*(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t f_1(s, x_s^*)\, ds + \int_0^t \int_{-\infty}^0 f_2(s, x_s^*, y) u^*(s,y)\, dy\, ds \tag{22}$$

для $t \in [0, t_1]$. Оскільки $t_1 < \tau^*$ вибрано довільно, то рівність (22) виконується на $\big[0, \tau^*\big)$. Покажемо, що ця рівність буде виконуватись і для $t = \tau^*$. Нехай $t_n \in \big[0, \tau^*\big]$ і $t_n \to \tau^*$, тоді $x^*(t_n) \to x^*\big(\tau^*\big)$. Аналогічно нерівності (12) маємо

$$\Bigg| \int_0^{\tau^*} \left[f_1(s, x_s^*) + \int_{-\infty}^0 f_2(s, x_s^*, y) u^*(s,y) dy \right] ds -$$

$$- \int_0^{t_n} \left[f_1(s, x_s^*) + \int_{-\infty}^0 f_2(s, x_s^*, y) u^*(s,y)\, dy \right] ds \Bigg| \to 0.$$

Отже, $x^*(t)$ задовольняє рівність (22) і при $t = \tau^*$.

Покажемо нарешті, що керування $u^*(s, y)$ є оптимальним. Для цього розглянемо два випадки.

Випадок 1: $\tau^* < T$.

(A) Нехай $\tau^* < \lim_{n\to\infty} \inf \tau_n = \tau$. Тоді, аналогічно викладеному вище, існує підпослідовність τ_{n_k} послідовності τ_n така, що $\tau_{n_k} > \tau^*$ для $t \in \big[0, \tau^*\big] : y^{(n_k)}(t) = x^{(n_k)}$ і $y^*(t) = x^*(t)$.

Покажемо інтегровність функції $L\big(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t, \cdot)\big)$ на $\big[0, \tau^*\big]$. Розглянемо нерівність

$$\left|L\Big(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big) - L(t, x_t^*, u_0)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\|L_u\Big(t, x_t^*, u_0 + \lambda\Big(u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\Big)\Big)\right\|_{L_q} \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p},$$

де $u_0 = \mathrm{Const} \in U$. Звідси отримуємо

$$L\Big(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big) \leq L(t, x_t^*, u_0) +$$

$$+ \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\|L_u\Big(t, x_t^*, u_0 + \lambda\Big(u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\Big)\Big)\right\|_{L_q} \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p}.$$

Враховуючи пункт 3 умови 2, маємо

$$L\Big(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big) \leq L(t, x_t^*, u_0) C_1 \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p} +$$

$$+ C_1 \|x_t^*\|_{BC}^{\alpha} \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p} +$$

$$+ C_1 \sup_{\lambda\in[0,1]} \left\|u_0 + \lambda\Big(u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\Big)\right\|_{L_p}^{p-1} \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p}. \tag{23}$$

Перший доданок у (23) буде інтегровним на підставі (14), другий та третій доданки будуть інтегровними на $\big[0, \tau^*\big]$ на підставі (15), (16) з урахуванням рівномірної збіжності $x^{(n_k)}(t)$ до $x^*(t)$ на $\big[0, \tau^*\big]$. Інтегровність останнього доданка випливає з оцінки

$$\int_0^{\tau^*} \left(\|u_0\|_{L_p} + \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p}\right)^{p-1} \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p} dt \leq$$

$$\leq 2^{\frac{(p-1)^2}{p}} \left(\int_0^{\tau^*} \left(\|u_0\|_{L_p}^p + \left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p}^p\right) dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int_0^{\tau^*} \left(\left\|u^{(n_k)}(t,\cdot) - u_0\right\|_{L_p}^p\right) dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отже, функція $L\big(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)\big)$ на $\big[0, \tau^*\big]$ буде інтегровною.

Розглянемо характеристичну функцію $\chi_R(t)$ множини $\big\{t \in [0, T] : \big\|u^*(t,\cdot)\big\|_{L_p} < R\big\}$ для деякого $R > 0$. Оскільки $L(x, y, z)$ опукла по z, то виконується нерівність

$$L(t,x_t^*,w(t,\cdot))\chi_R(t)\geq L(t,x_t^*,u^*(t,\cdot))\chi_R(t)+$$
$$+\Big\langle L_u'(t,x_t^*,u^*(t,\cdot));w(t,\cdot)-u^*(t,\cdot)\Big\rangle\chi_R(t) \tag{24}$$

для будь-якого допустимого керування $w(t,y)\in L_p$ і $t\in\big[0,\tau^*\big]$. Тут $\big\langle L_u' w-u^*\big\rangle$ — дія лінійного неперервного функціонала L_u на $w(t,\cdot)-u^*(t,\cdot)\in L_p$. Виконуючи в (24) заміну $w(t,\cdot)=u^{(n_k)}(t,\cdot)$, маємо

$$\int\limits_0^{\tau^*}L\Big(t,x_t^*,u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\chi_R(t)\,dt\geq\int\limits_0^{\tau^*}L(t,x_t^*,u^*(t,\cdot))\chi_R(t)\,dt+$$
$$+\int\limits_0^{\tau^*}\Big\langle L_u'(t,x_t^*,u^*(t,\cdot));u^{(n_k)}(t,\cdot)-u^*(t,\cdot)\Big\rangle\chi_R(t)\,dt. \tag{25}$$

Враховуючи пункт 3 умови 2, одержуємо

$$\|L_u(t,x_t^*,u^*(t,\cdot))\|_{L_p}\chi_R(t)\leq K(1+\|x_t^*\|_{BC}^{\alpha}+R)^{p-1},$$

а тому другий доданок визначає лінійний неперервний функціонал у $L_p\big(\big[0,\tau^*\big]\times(-\infty,0]\big)$. Таким чином, другий інтеграл у (25) буде прямувати до нуля внаслідок слабкої збіжності $u^{(n_k)}(t,s)$ до $u^*(t,s)$. Тому

$$\lim_{n_k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*}L\Big(t,x_t^*,u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\chi_R(t)\,dt\geq\int\limits_0^{\tau^*}L(t,x_t^*,u^*(t,\cdot))\chi_R(t)\,dt.$$

Беручи до уваги, що $L(t,y,z)\geq 0$, $\chi_R(t)\leq 1$, $\chi_R(t)\to 1$ при $R\to\infty$, і враховуючи інтегровність $L\big(t,x_t^*,u^{(n_k)}(t,\cdot)\big)$ на $\big[0,\tau^*\big]$, з останньої нерівності маємо

$$\int\limits_0^{\tau^*}L(t,x_t^*,u^*(t,\cdot))\,dt\leq\lim_{n_k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*}L\Big(t,x_t^*,u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\,dt. \tag{26}$$

Розглянемо різницю

$$\int\limits_0^{\tau^*}\Big|L\Big(t,x_t^{(n_k)},u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)-L\Big(t,x_t^*,u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\Big|\,dt. \tag{27}$$

Беручи до уваги пункт 2 умови 2, отримуємо

$$\int\limits_0^{\tau^*}\Big|L\Big(t,x_t^{(n_k)},u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)-L\Big(t,x_t^*,u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\Big|dt\leq a\int\limits_0^{\tau^*}\Big\|x_t^{(n_k)}-x_t^*\Big\|dt\to 0,\quad n_k\to\infty. \tag{28}$$

Граничний перехід у (28) можливий на підставі теореми Лебега про мажоровану збіжність (16) та рівномірної збіжності $x_t^{(n_k)}$ до x_t^* на $\big[0,\tau^*\big]$. Тоді з (28) випливає, що вираз (27) буде прямувати до нуля при $n_k\to\infty$. Далі одержуємо

$$\lim_{n_k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*} L\Big(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\,dt \geq$$

$$\geq \lim_{n_k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*}\Big[L\Big(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big) - L\Big(t, x_t^*, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\Big]\,dt +$$

$$+\lim_{n_k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*}\Big|L\Big(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big) - L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\Big|\,dt +$$

$$+\int\limits_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\,dt. \qquad (29)$$

Вище ми показали, що перша границя у правій частині (29) буде дорівнювати нулю, а друга згідно з (26) є невід'ємною. Тоді маємо

$$m = \lim_{n_k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau_{n_k}} L\Big(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\,dt \geq$$

$$\geq \lim_{n_k\to\infty}\inf\int\limits_0^{\tau^*} L\Big(t, x_t^{(n_k)}, u^{(n_k)}(t,\cdot)\Big)\,dt \geq \int\limits_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\,dt.$$

Отже, $J\big(u^*\big) = m$ і пара $x^*(t),\ u^*(t,s)$ буде оптимальною.

(Б) Нехай $\tau^* = \tau = \lim_{m\to\infty}\inf\tau_n$. Розглянемо множину $Y = \{n \in N : t_1 < \tau_n \leq \tau^*\}$, де $t_1 \in [0, T]$ знову виберемо довільно так, щоб $t_1 < \tau^*$. Тоді достатньо розглянути випадок, коли ця множина буде нескінченною. Як і у попередньому випадку, потрібно показати, що

$$\int\limits_0^{t_1} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\,dt \leq m.$$

При граничному переході $t_1 \to \tau^*$ отримуємо, що

$$\int\limits_0^{\tau^*} L(t, x_t^*, u^*(t,\cdot))\,dt \leq m,$$

а тому $J\big(u^*\big) = m$.

Випадок 2: $\tau^* = T$. Тоді з (19) випливає, що $\tau = \lim_{n\to\infty}\inf\tau_n = \tau^*$. Отже, доведення цього випадку зводиться до попереднього випадку (п. (Б)).

Теорему доведено.

Висновки. В роботі розглянуто задачу оптимального керування функціонально-диференціальними системами із нескінченним інтервалом запізнення. Для початкової задачі було сформульовано та доведено теорему існування, єдиності та продовжуваності розв'язку до межі області. Також сформульовано і доведено теорему про існування оптимальних керувань системою функціонально-диференціальних рівнянь. Достатні умови існування оптимального керування отримано у термінах правих частин і функції критерію якості.

Література

1. Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, Москва (1967).
2. Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Наука, Москва (1959).
3. Д. И. Мартынюк, А. М. Самойленко, *О периодических решениях нелинейных систем с запаздыванием*, Мат. физика, вып. 3, 128 – 145 (1967).
4. Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, *Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием*, Вища шк., Киев (1979).
5. Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, *Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом*, Укр. мат. журн., **18**, № 3, 65 – 84 (1966).
6. А. Д. Мышкис, *Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Успехи мат. наук, **4**, вып. 5, 99 – 141 (1949).
7. А. М. Самойленко, О. П. Трофимчук, Н. Р. Банцур, *Періодичні та майже періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь з максимумами*, Доп. НАН України, № 1, 53 – 57 (1998).
8. Л. М. Сергеєва, Я. Й. Бігун, *Про глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь*, Нелінійні коливання, **14**, № 1, 100 – 110 (2011).
9. В. Ю. Слюсарчук, *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією*, Вид-во УДУВГП, Рівне (2003).
10. В. И. Фодчук, *О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра*, Укр. мат. журн., **16**, № 2, 273 – 279 (1964).
11. В. І. Фодчук, Я. Й. Бігун, І. І. Клевчук, І. М. Черевко, І. В. Якімов, *Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння*, Ін-т математики НАН України, Київ (1996).
12. A. Halanay, *On the method of averaging for differential equations with retarded argument*, J. Math. Anal. and Appl., **14**, 70 – 76 (1966).
13. Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва (1971).
14. J. K. Hale, *Theory of functional differential equations,* Springer-Verlag, New York (1977).
15. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations*, Nonlinear Dyn. and Syst. Theory, **18**, № 2, 196 – 211 (2018).
16. O. Kichmarenko, O. Stanzhytskyi, *Optimal control problems for some classes of functional-differential equations on the semi-axis*, Miskolc Math. Notes, **20**, № 2, 1021 – 1037 (2019).
17. V. E. Slyusarchuk, *The method of local linear approximation in the theory of nonlinear functional-differential equations*, Math. Sb., **201**, № 8, 1193 – 1215 (2010).

Одержано 03.11.22