DOI: 10.37863/umzh.v75i1.7400

УДК 517.9

А. В. Дворник[1], **В. І. Ткаченко**[2] (Ін-т математики НАН України, Київ)

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗАТУХАННЯМ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

We obtain sufficient conditions for the existence of piecewise continuous almost periodic solutions to a strongly damped semilinear wave equation with impulsive action.

Отримано достатні умови існування кусково-неперервних майже періодичних розв’язків хвильового рівняння з затуханням та імпульсною дією.

1. Вступ. У банаховому просторі X розглянемо рівняння

$$\partial_t^2 u + \eta A^\theta \partial_t u + Au = f(t, u, \partial_t u), \tag{1}$$

$$u(\tau_k + 0) - u(\tau_k) = B_{11k} u(\tau_k) + B_{12k} \partial_t u(\tau_k) + I_k\big(u(\tau_k), \partial_t u(\tau_k)\big), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

$$\partial_t u(\tau_k + 0) - \partial_t u(\tau_k) = B_{21k} u(\tau_k) + B_{22k} \partial_t u(\tau_k) + J_k\big(u(\tau_k), \partial_t u(\tau_k)\big), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

де A — секторіальний оператор в $X,\ 1/2 \le \theta \le 1,\ \eta > 0,\ B_{ijk},\ i, j = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z},$ — обмежені лінійні оператори в X. Імпульсна дія відбувається в моменти часу $t = \tau_k$, $k \in \mathbb{Z}$, які рівномірно відділені один від одного.

Прикладом такого рівняння є хвильове рівняння із затуханням та імпульсною дією

$$\begin{gathered}
\partial_t^2 u + \eta(-\Delta)^\theta \partial_t u - \Delta u = f(t, x, u, \partial_t u), \qquad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \\
u(\tau_k + 0, x) - u(\tau_k, x) = I_k\big(x, u(\tau_k, x), \partial_t u(\tau_k, x)\big), \quad k \in \mathbb{Z}, \\
\partial_t u(\tau_k + 0, x) - \partial_t u(\tau_k, x) = J_k\big(x, u(\tau_k, x), \partial_t u(\tau_k, x)\big), \quad k \in \mathbb{Z}, \\
\left(u(t, x) + \nu \frac{\partial u(t, x)}{\partial n} \right) \Bigg|_{x \in \partial\Omega} = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

де $x \in \Omega,\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із гладкою межею $\partial\Omega,\ \mu = \mathrm{const} > 0,\ \nu = \mathrm{const},$ $1/2 \le \theta \le 1,\ \Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2 u/\partial x_n^2$ — лапласіан функції $u,\ \partial u(t, x)/\partial n$ — похідна вздовж зовнішньої нормалі. Моменти $t = \tau_k,\ k \in \mathbb{Z}$, імпульсної дії рівномірно відділені один від одного.

Рівняння є моделлю повздовжніх коливань в однорідному бруску, в якому наявні ефекти в’язкості. Доданок $\eta(-\Delta)^\theta \partial_t u$ вказує на те, що напруга пропорційна не лише деформації, як із законом Гука, а й швидкості деформації, як у лінеаризованому матеріалі Кельвіна. Імпульсна дія описує короткострокові зовнішні впливи.

---

[1] Відповідальний за листування, e-mail: a.dvornyk@gmail.com.

[2] Дослідження В. І. Ткаченка частково підтримано грантами Volkswagen Foundation “Dynamic Phenomena in Elasticity Problems” і “From Modelling and Analysis to Approximation”.

Рівняння вигляду (1) – (3) без імпульсної дії і з імпульсною дією досліджувалися багатьма авторами [1 – 8].

Метою цієї роботи є знаходження умов існування кусково-неперервних майже періодичних розв'язків рівняння. При цьому будемо використовувати концепцію майже періодичних функцій у сенсі робіт [9, 10]. Ці кусково-неперервні функції мають розриви першого роду по t в точках імпульсної дії $t = \tau_k$. Такі майже періодичні розв'язки активно вивчаються для різних класів систем із імпульсною дією (див. [11 – 17]).

2. Основні означення та попередні результати. Позначимо через $\|.\|$ норму в $\mathbb{R}^n$ або відповідну норму у просторі матриць. Банахів простір X має норму $\|.\|_X$.

Будемо розглядати простір $\mathcal{PC}(J, X)$, $J \subset \mathbb{R}$, усіх обмежених кусково-неперервних функцій $x\colon J \to X$ таких, що:

i) множина $\{\tau_j \in J : \tau_{j+1} > \tau_j, j \in \mathbb{Z}\}$ моментів розривів x не має скінченних граничних точок;

ii) $x(t)$ неперервна зліва: $x(\tau_j - 0) = x(\tau_j)$, й існує $\lim_{t \to \tau_j + 0} x(t) = x(\tau_j + 0)$.

Для функції $f(t)$ з простору $\mathcal{PC}(J, X)$ означимо норму $\|f\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|f(t)\|_X$.

Відповідно, $\mathcal{PC}^1(J, X)$ — це простір функцій з $\mathcal{PC}(J, X)$, які неперервно диференційовні при $t \in J$, $t \neq \tau_j$, і мають ліві та праві похідні в точках $t = \tau_j$.

Означення 1. *Ціле число p називається ε-майже періодом послідовності $\{x_k\}, x_k \in X$, якщо $\|x_{k+p} - x_k\|_X < \varepsilon$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Послідовність $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ називається майже періодичною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина її ε-майже періодів, а саме для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число l, що кожний відрізок дійсної осі довжини l містить принаймні один ε-майже період послідовності.*

Означення 2. *Строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ дійсних чисел має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина ε-майже періодів, спільних для всіх послідовностей $\{\tau_k^j\}$, де $\tau_k^j = \tau_{k+j} - \tau_k$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Послідовність $\{\tau_k\}$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць тоді й лише тоді, коли $\tau_k = ak + c_k$, де $\{c_k\}$ — майже періодична послідовність, a — додатне число [15]. За лемою 22 [10, c. 192] для послідовності $\{\tau_j\}$ з рівномірно майже періодичними послідовностями різниць існує границя

$$\lim_{T \to \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = \mu \tag{5}$$

рівномірно щодо $t \in \mathbb{R}$, де $i(s, t)$ — кількість точок τ_k, які належать інтервалу (s, t). Тоді для кожного $q > 0$ існує таке натуральне N, що кожному інтервалу довжини q належать не більш ніж N елементів послідовності $\{\tau_j\}$, тобто $i(s, t) \leq N(t - s)/q + N$.

Означення 3. *Неперервна функція $\psi\colon \mathbb{R} \to X$ майже періодична за Бором, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна множина Γ ε-майже періодів таких, що якщо $\tau \in \Gamma$, то $\|\psi(t + \tau) - \psi(t)\|_X < \varepsilon$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.*

Функція $\varphi \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, X)$ називається w-майже періодичною, якщо:

i) *строго зростаюча послідовність $\{\tau_k\}$ моментів розриву функції $\varphi(t)$ має рівномірно майже періодичні послідовності різниць;*

ii) *для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що якщо точки t' і t'' належать одному інтервалу неперервності і $|t' - t''| < \delta$, то $\|\varphi(t') - \varphi(t'')\|_X < \varepsilon$;*

iii) *для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує відносно щільна множина* Γ ε*-майже періодів таких, що якщо* $\tau \in \Gamma$, *то* $\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_X < \varepsilon$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}$, *які задовольняють умову* $|t - \tau_k| > \varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$.

Припускаємо, що для рівняння (1)–(3) виконуються такі умови:

($\mathbf{A1}$) Оператор A з областю визначення $D(A)$ в просторі X секторіальний [19] і $\inf\big\{\operatorname{Re}\xi : \xi \in \sigma(A)\big\} \geq \delta > 0$, де $\sigma(A)$ — спектр оператора A. Означуються дробові степені A^α, $\alpha \geq 0$, оператора A й інтерполяційні простори $X^\alpha = D(A^\alpha)$ з нормами $\|x\|_{X^\alpha} = \|A^\alpha x\|_X$. Оператор $-A$ є генератором аналітичної напівгрупи e^{-At}, $t \geq 0$.

($\mathbf{A2}$) Лінійні обмежені оператори $B_{ijk}\colon X \to X$ задовольняють нерівності $\|B_{ijk}u\|_{X^\beta} \leq$ $\leq b_k\|u\|_{X^\beta}$ для $u \in X^\beta$, $\beta \geq 0$, $i,j = 1,2$, $k \in \mathbb{Z}$. Послідовності операторів $\{B_{ijk}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ майже періодичні. Також майже періодична послідовність додатних чисел $\{b_k\}$ і $\sup_k b_k \leq b$.

($\mathbf{A3}$) Послідовність $\{\tau_k\}$ точок імпульсної дії має рівномірно майже періодичні послідовності різниць, й існують такі сталі $\Theta > \theta > 0$, що $\Theta \geq \tau_k - \tau_{k-1} \geq \theta$, $k \in \mathbb{Z}$.

($\mathbf{A4}$) Функція $f(t,u,\partial_t u)$ w-майже періодична по t рівномірно щодо $u, \partial_t u$ з розривами в точках послідовності τ_k, $k \in \mathbb{Z}$.

($\mathbf{A5}$) Послідовності $\big\{I_k(u,v)\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ і $\big\{J_k(u,v)\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ майже періодичні рівномірно щодо u, v.

Після заміни змінних $v = \partial_t u$ рівняння (1)–(3) можна записати як двовимірну систему у просторі $z = (u,v) \in Y = X^{\frac{1}{2}} \times X$ з нормою $\|z\|_Y = \|u\|_{X^{\frac{1}{2}}} + \|v\|_X$:

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}_{(\theta)}z + F(t,z), \tag{6}$$

$$z(\tau_k + 0) - z(\tau_k) = B_k z(\tau_k) + G_k(z(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_{(\theta)} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & \eta A^\theta \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} B_{11k} & B_{12k} \\ B_{21k} & B_{22k} \end{pmatrix},$$

$$F(t,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t,u,v) \end{pmatrix}, \qquad G_k(z) = \begin{pmatrix} I_k(z) \\ J_k(z) \end{pmatrix}.$$

Тут I — тотожний оператор в X. Оператор $\mathcal{A}_{(\theta)}$ має область визначення [1]

$$D(\mathcal{A}_{(\theta)}) = \left\{\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in X^{\frac{3}{2}-\theta} \times X^{\frac{1}{2}};\ A^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi \in X^\theta\right\}.$$

Лема 1 [1]. *Якщо оператор* A *секторіальний у просторі* X, *то для кожного* $\theta \in [1/2, 1]$ *оператор* $\mathcal{A}_{(\theta)}$ *секторіальний у просторі* $Y = X^{1/2} \times X$ *і оператор* $-\mathcal{A}_{(\theta)}$ *є генератором аналітичної напівгрупи* $e^{-\mathcal{A}_{(\theta)}t}$ *в* Y.

Далі, для $\theta \in (1/2, 1]$ *і* $\alpha \in [0,1]$ *інтерполяційні простори* $Y^\alpha_{(\theta)}$, *відповідні* $\mathcal{A}_{(\theta)}$, *означуються як*

$$D(\mathcal{A}^\alpha_{(\theta)}) = \left\{\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} : \varphi \in X^{\frac{1}{2}+(1-\theta)\alpha},\ A^{1-\theta}\varphi + 2\eta\psi \in X^{\theta\alpha}\right\} \tag{8}$$

і збігаються з інтерполяційними просторами оператора

$$\mathcal{B}_{(\theta)} = \mathcal{A}_{(\theta)} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2\eta}A^{1-\theta} \end{pmatrix}$$

в еквівалентній нормі.

При $\theta = \dfrac{1}{2}$ накладається додаткове обмеження

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\psi}{2} + \arg\left(\frac{\eta}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} - 1}\right)$$

з деяким $\psi \in (0, \pi/2)$. Інтерполяційні простори мають вигляд $D\big(\mathcal{A}^{\alpha}_{(1/2)}\big) = D\big(\mathcal{B}^{\alpha}_{(1/2)}\big) = X^{\frac{1+\alpha}{2}} \times X^{\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \in [0, 1]$.

Далі у $\mathcal{A}^{\alpha}_{(\theta)}$ і $Y^{\alpha}_{(\theta)}$ будемо пропускати індекси (θ). Норму елемента $z \in Y^{\alpha}$ будемо позначати так: $\|z\|_{\alpha} = \|\mathcal{A}^{\alpha} z\|_Y$. Для оператора $\mathcal{A}$ виконуються нерівності [19]

$$\|\mathcal{A}^{\alpha} e^{-\mathcal{A}t} z\|_Y \le C_{\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t} \|z\|_Y, \qquad z \in Y, \quad t > 0, \quad \alpha > 0,$$
$$\big\|(e^{-\mathcal{A}t} - I)z\big\|_Y \le \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^{\alpha} \|\mathcal{A}^{\alpha} z\|_Y, \qquad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1], \quad z \in Y^{\alpha}, \tag{9}$$

де $C_{\alpha} > 0$ обмежені при $\alpha \to 0+$. Також виконуються рівності $e^{-\mathcal{A}t}\mathcal{A}^{\alpha} z = \mathcal{A}^{\alpha} e^{-\mathcal{A}t} z$, де $z \in Y^{\alpha}$, $t > 0$.

3. ω-Майже періодичні розв'язки рівняння (6), (7).

Означення 4. *Функція* $z(t)\colon [t_0, t_1] \to Y$ *є розв'язком початкової задачі* $z(t_0) = z_0 \in Y$ *для рівняння* (6), (7) *на відрізку* $[t_0, t_1]$, *якщо вона неперервно диференційовна на інтервалах* $(t_0, \tau_j], (\tau_j, \tau_{j+1}], \ldots, (\tau_{j+s}, t_1]$ *з розривами першого роду в моменти часу* $t = \tau_k$, *задовольняє рівняння* (6) *при* $t \in (t_0, t_1)$, $t \ne \tau_k$, *різницеві співвідношення* (7) *при* $t = \tau_k$ *і початкову умову* $z(t_0) = z_0$.

Спочатку розглянемо лінійне рівняння

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + g(t), \qquad z(\tau_k + 0) - z(\tau_k) = B_k z(\tau_k) + g_k. \tag{10}$$

Відповідне однорідне рівняння (при $g(t) \equiv 0$, $g_k \equiv 0$) має еволюційний оператор $U(t, s)$, $U(s, s) = I$, $t \ge s$, який означується як $U(t, s) = e^{-\mathcal{A}(t-s)}$, якщо $\tau_k < s \le t \le \tau_{k+1}$, і

$$U(t, s) = e^{-\mathcal{A}(t-\tau_k)}(I + B_k)e^{-\mathcal{A}(\tau_k - \tau_{k-1})} \ldots (I + B_m)e^{-\mathcal{A}(\tau_m - s)}, \tag{11}$$

якщо $\tau_{m-1} < s \le \tau_m < \tau_{m+1} < \ldots < \tau_k < t \le \tau_{k+1}$. Для фіксованих $t > s$ оператор $U(t, s)$ обмежений у просторі Y^{α}, I — тотожний оператор в Y.

Будемо припускати виконання такої умови:

($\mathbf{A6}$) відповідне однорідне рівняння має експоненціально стійкий еволюційний оператор

$$\big\|U(t, s)u\big\|_{\alpha} \le K e^{-\beta(t-s)} \|u\|_{\alpha}, \qquad t \ge s, \quad u \in Y^{\alpha}, \tag{12}$$

з деякими сталими $\beta > 0$ і $K \ge 1$.

Зауважимо, що при виконанні нерівності $\|B_k u\|_{Y^{\gamma}} \le b_k \|u\|_{Y^{\gamma}}$ для $u \in Y^{\gamma}$, $\gamma \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}$ з нерівності (12) при деякому значенні α випливає виконання нерівності при всіх $\alpha \ge 0$.

Теорема 1. *Припустимо, що рівняння* (10) *задовольняє умови* $(\mathbf{A1})-(\mathbf{A3})$ *і* $(\mathbf{A6})$. *Нехай також функція* $g(t)\colon \mathbb{R}\to Y$ w-*майже періодична й локально гельдерова з розривами в точках* $t=\tau_k,\ k\in\mathbb{Z}$, *в яких вона неперервна зліва, і послідовність* $\{g_k\}$ *з* $g_k\in Y^{\alpha_1},\ 1\ge\alpha_1>\alpha>0$, *майже періодична.*

Тоді рівняння (10) *має єдиний* w-*майже періодичний експоненціально стійкий розв'язок* $z_0(t)\in\mathcal{PC}(\mathbb{R},Y^\alpha)$.

Доведення. Рівняння (10) має єдиний обмежений на осі розв'язок

$$z_0(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}U(t,s)g(s)ds+\sum_{\tau_j<t}U(t,\tau_j+0)g_j. \tag{13}$$

Для $t\in(\tau_i,\tau_{i+1}]$ він задовольняє оцінку

$$\|z_0(t)\|_\alpha\le\int\limits_{-\infty}^{t}\big\|\mathcal{A}^\alpha U(t,s)g(s)\big\|_Y ds+\sum_{\tau_j<t}\big\|\mathcal{A}^\alpha U(t,\tau_j+0)g_j\big\|_Y\le$$

$$\le\int\limits_{\tau_i}^{t}\big\|U(t,s)g(s)\big\|_\alpha ds+\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{\tau_{i-j-1}}^{\tau_{i-j}}\big\|U(t,s)g(s)\big\|_\alpha ds+\sum_{\tau_j<t}\|U(t,\tau_j+0)g_j\|_\alpha\le$$

$$\le\frac{K}{1-e^{-\theta\beta}}\frac{C_\alpha\Theta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\|g\|_{PC}+\frac{K}{1-e^{-\theta\beta}}\sup_j\|g_j\|_\alpha. \tag{14}$$

Тут використано оцінку

$$\int\limits_{\tau_{i-j-1}}^{\tau_{i-j}}\big\|U(t,s)g(s)\big\|_\alpha ds\le\int\limits_{\tau_{i-j-1}}^{\tau_{i-j}}\big\|U(t,\tau_{i-j})\big\|_\alpha\big\|U(\tau_{i-j},s)g(s)\big\|_\alpha ds\le$$

$$\le Ke^{-\beta(t-\tau_{i-j})}\int\limits_{\tau_{i-j-1}}^{\tau_{i-j}}\frac{C_\alpha}{(\tau_{i-j}-s)^\alpha}e^{-\beta(\tau_{i-j}-s)}\|g(s)\|_Y ds\le$$

$$\le\frac{KC_\alpha\Theta^{1-\alpha}}{1-\alpha}e^{-\beta(t-\tau_{i-j})}\|g\|_{\mathcal{PC}(\mathbb{R},Y)}.$$

Аналогічно [17] доводимо, що $z_0(t)$ — w-майже періодичний експоненціально стійкий розв'язок $z_0(t)\in\mathcal{PC}(\mathbb{R},Y^\alpha)$ рівняння (10).

Зауваження **1.** Якщо рівняння (10) задовольняє всі умови теореми 1 і функції $g_k,\ k\in\mathbb{Z}$, належать простору Y^α (а не Y^{α_1} з $\alpha_1>\alpha$), то рівняння має єдиний w-майже періодичний розв'язок $z_0(t)\in\mathcal{PC}(\mathbb{R},Y^\gamma)$ з $\gamma<\alpha$.

Теорема 2. *Припустимо, що для рівняння* (6), (7) *виконуються припущення* $(\mathbf{A1})-(\mathbf{A3})$ *і* $(\mathbf{A6})$. *Нехай також в області* $U_\rho^\alpha=\big\{z\in Y^\alpha\colon\|z\|_\alpha\le\rho\big\}$ *простору* $Y^\alpha,\ 0\le\alpha<1$, *виконуються такі умови*:

1) *функція* $F(t,z)\colon\mathbb{R}\times U_\rho^\alpha\to Y$ w-*майже періодична й локально гельдерова по* t *рівномірно щодо* $z\in U_\rho^\alpha$; *функція* F *неперервна по* z *й існують такі сталі* $N_1>0$ *і* $q>1$, *що* $\big\|F(t,z_1)-F(t,z_2)\big\|_Y\le N_1\big\|z_1-z_2\big\|_\alpha\big(1+\|z_1\|_\alpha^q+\|z_2\|_\alpha^q\big)$ *для* $z_1,z_2\in Y_\alpha$;

2) *функції* $G_k(z)\colon U_\rho^\alpha \to Y^{\alpha_1}$ *задовольняють нерівності* $\big\|\overline{G}_k(z_1) - \overline{G}_k(z_2)\big\|_{\alpha_1} \leq N_1\|z_1 - z_2\|_\alpha\big(1 + \|z_1\|_\alpha^q + \|z_2\|_\alpha^q\big)$, $1 \geq \alpha_1 > \alpha$; *послідовність* $\{G_k(u)\}$ *майже періодична рівномірно щодо* $z \in U_\rho^\alpha$;

3) *виконуються нерівності* $M_1\big(N_0 + N_1(\rho + \rho^{q+1})\big) \leq \rho$ *і* $M_1N_1(1 + 2\rho^q)) < 1$, *де*

$$M_1 = \frac{K}{1 - e^{-\beta\theta}}\left(1 + \frac{C_\alpha Q^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right), \qquad N_0 \geq \sup_t \|F(t,0)\|_0 + \sup_k \|G_k(0)\|_{\alpha_1}.$$

Тоді в області U_ρ^α *рівняння* (6), (7) *має єдиний* w*-майже періодичний розв'язок* $z_0(t) \in \mathcal{PC}(\mathbb{R}, Y^\alpha)$.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{M}_\rho$ множину w-майже періодичних функцій $\varphi\colon \mathbb{R} \to Y^\alpha$, локально гельдерових, із точками розриву τ_k, $k \in \mathbb{Z}$, які задовольняють нерівність $\|\varphi\|_{\mathcal{PC}(\mathbb{R},Y^\alpha)} \leq \rho$. У множині $\mathcal{M}_\rho$ означимо оператор

$$[\mathcal{F}\varphi](t) = \int\limits_{-\infty}^{t} U(t,s)F(s,\varphi(s))ds + \sum_{\tau_k<t} U(t,\tau_k+0)G_k(\varphi(\tau_k)).$$

За теоремою 1 функція $[\mathcal{F}\varphi](t)$ w-майже періодична. Аналогічно (14) отримуємо оцінки

$$\|[\mathcal{F}\varphi](t)\|_\alpha \leq M_1(N_0 + N_1(\rho + \rho^{q+1})), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\big\|[\mathcal{F}\varphi_1](t) - [\mathcal{F}\varphi_2](t)\big\|_\alpha \leq \int\limits_{-\infty}^{t} \|U(t,s)\|_\alpha \big\|F(s,\varphi_1(s)) - F(s,\varphi_2(s))\big\|_Y ds \,+ \\ + \sum_{\tau_k<t} \big\|U(t,\tau_k+0)\big\|_\alpha \big\|G_k(\varphi_1(\tau_k)) - G_k(\varphi_2(\tau_k))\big\|_{\alpha_1} \leq \\ \leq M_1N_1(1 + 2\rho^q)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\alpha.\end{aligned} \tag{16}$$

Функція $[\mathcal{F}\varphi](t)$ локально гельдерова. Справді, на кожному інтервалі неперервності (τ_j, τ_{j+1}), $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\big\|[\mathcal{F}\varphi](t+\delta) - [\mathcal{F}\varphi](t)\big\|_\alpha \leq \left\| \int\limits_{-\infty}^{t+\delta} U(t+\delta,s)F(s,\varphi(s))ds - \int\limits_{-\infty}^{t} U(t,s)F(s,\varphi(s))ds \right\|_\alpha + \\ + \left\| \sum_{\tau_k<t} U(t+\delta,\tau_k+0)G_k(\varphi(\tau_k)) - \sum_{\tau_k<t} U(t,\tau_k+0)G_k(\varphi(\tau_k)) \right\|_\alpha \leq \\ \leq \int\limits_{-\infty}^{t} \big\|(e^{-\mathcal{A}\delta} - I)U(t,s)F(s,\varphi(s))\big\|_\alpha ds + \int\limits_{t}^{t+\delta} \big\|e^{-\mathcal{A}(t+\delta-s)}F(s,\varphi_0(s))\big\|_\alpha ds \,+ \\ + \sum_{\tau_k<t} \big\|(e^{-\mathcal{A}\delta} - I)U(t,\tau_k+0)G_k(\varphi_0(\tau_k))\big\|_\alpha.\end{aligned} \tag{17}$$

Застосовуючи (9), (12) і (14), з (17) отримуємо існування такої додатної сталої M_2, що на кожному інтервалі $t \in (t', t'')$, який не містить точок імпульсів τ_k, виконується оцінка $\left\|\varphi_0(t + \delta) - \varphi_0(t)\right\|_\alpha \leq M_2 \delta^{\alpha_1 - \alpha}$.

З (15), (16) і умови 3 теореми випливає, що $\mathcal{F}\colon \mathcal{M}_\rho \to \mathcal{M}_\rho$ є оператором стиску на $\mathcal{M}_\rho$. Тому існує єдина нерухома точка $z_0 \in \mathcal{M}_\rho$ відображення $\mathcal{F}$, тобто

$$z_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} U(t,s) F(s, z_0(s)) ds + \sum_{\tau_k < t} U(k, \tau_k + 0) G_k(z_0(\tau_k)).$$

Аналогічно (17) перевіряємо, що функція $z_0(t)$ локально гельдерова на кожному інтервалі $(\tau_k, \tau_{k+1}),\ k \in \mathbb{Z}$.

Локальна гельдеровість функції $F(t, z_0(t))$ випливає з локальної гельдеровості функцій $F(t, u)$ і $z_0(t)$. За лемою 37 [10, с. 214] якщо $z_0(t)$ w-майже періодична і $\inf_k(\tau_{k+1} - \tau_k) > 0$, то $\{z_0(\tau_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — майже періодична послідовність. Тому за теоремою 1 лінійне неоднорідне рівняння

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A} z + F(t, z_0(t)), \qquad z(\tau_k + 0) - z(\tau_k) = B_k z + G_k(z_0(\tau_k))$$

має єдиний w-майже періодичний розв'язок. З єдиності випливає, що він збігається з $z_0(t)$.

Отже, w-майже періодична функція $z_0(t)\colon \mathbb{R} \to X^\alpha$ задовольняє рівняння (6) при $t \in (\tau_k, \tau_{k+1})$ і різницеве співвідношення (7) при $t = \tau_k$.

***Зауваження* 2.** Використовуючи ідеї робіт [17, 18], можна довести, що при умовах теореми 2 і досить малих N_0 і N_1 w-майже періодичний розв'язок $z_0(t)$ асимптотично стійкий.

За теоремою 2 функція $z_0(t) = (u_0(t), v_0(t))$ w-майже періодична як функція $\mathbb{R} \to Y^\alpha$. Тому за формулою (8) розв'язок $u_0(t)$ w-майже періодичний як функція $\mathbb{R} \to X^{\frac{1}{2} + (1-\theta)\alpha}$.

4. Хвильове рівняння з сильним затуханням та імпульсною дією. Розглянемо рівняння

$$\partial_t^2 u - \eta \Delta \partial_t u - \Delta u = f(t, x, u, \partial_t u), \qquad x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

з крайовими умовами $u(t,x)|_{x \in \partial\Omega} = 0$ та імпульсною дією в точках $\tau_k,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{gathered}
u(\tau_k + 0, x) - u(\tau_k, x) = b_{1k} u(\tau_k, x) + \\
+ \int\limits_{\xi \in \Omega} S_{1k}(x, \xi) I_{1k}(u(\tau_k, \xi), \partial_t u(\tau_k, \xi)) d\xi + g_{1k}(x), \\
\partial_t u(\tau_k + 0, x) - \partial_t u(\tau_k, x) = b_{2k} \partial_t u(\tau_k, x) + \\
+ \int\limits_{\xi \in \Omega} S_{2k}(x, \xi) I_{2k}(u(\tau_k, \xi), \partial_t u(\tau_k, \xi)) d\xi + g_{2k}(x),
\end{gathered} \tag{19}$$

де $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із гладкою межею $\partial\Omega$, $\eta = \mathrm{const} > 0$, Δu — лапласіан функції u.

Припускаємо, що виконуються такі умови:

Послідовність $\{\tau_k\}$ точок імпульсної дії задовольняє умову $(\mathbf{A3})$. Тому існує границя (5) для цієї послідовності.

Оператор Лапласа $A = -\Delta$ з крайовими умовами Діріхле у просторі $X = L^p(\Omega),\ p \geq 2$, має область означення $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, де $W^{2,p}(\Omega)$ — простір Соболєва функцій з $L^p(\Omega)$, які мають дві узагальнені похідні; $W_0^{1,p}(\Omega)$ — простір функцій з $L^p(\Omega)$, які мають узагальнену похідну й дорівнюють нулю на межі $\partial\Omega$. Оператор $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ секторіальний. Спектр $\sigma(A)$ оператора A складається з простих власних значень $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots,\ \lambda_n \to \infty,\ n \to \infty$. Відповідно означуються дробові степені оператора A й інтерполяційні простори $X^\alpha = D(A^\alpha)$ з нормами $\|x\|_{X^\alpha} = \|A^\alpha x\|$.

В області $|u| + |v| \leq \rho_1$ з деякою $\rho_1 > 0$ гладка функція $f(t, x, u, v)$ майже періодична за Бором по t рівномірно щодо x, u, v і задовольняє нерівності $|f(t, x, 0, 0)| \leq N_0$ та $|f(t, x, u_1, v_1) - f(t, x, u_2, v_2)| \leq N_1(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|)$ з додатними сталими N_0 і N_1.

Послідовності дійсних чисел $\{b_{1k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ і $\{b_{2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ майже періодичні. Послідовності $\{g_{1k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ і $\{g_{2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функцій $g_{1k}, g_{2k} \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ майже періодичні рівномірно щодо $x \in \Omega$, і $\sup_{x\in\Omega} |g_{ik}(x)| \leq N_0,\ i = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}$.

C^2-гладкі функції S_{1k} і S_{2k} такі, що $S_{1k}(x, \xi) = 0$ і $S_{2k}(x, \xi) = 0$ для всіх $x \in \partial\Omega,\ k \in \mathbb{Z}$. Послідовності $\{S_{1k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ і $\{S_{2k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ майже періодичні рівномірно щодо $x, \xi \in \Omega$.

В області $|u| + |v| \leq \rho_1$ виконуються умови $I_{ik}(0, 0) = 0$ і $|I_{ik}(u_1, v_1) - I_{ik}(u_2, v_2)| \leq$ $\leq N_1\big(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|\big)$ для $i = 1, 2,\ k \in \mathbb{Z}$. Послідовності $\big\{I_{1k}(u, v)\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ і $\big\{I_{2k}(u, v)\big\}_{k\in\mathbb{Z}}$ майже періодичні рівномірно щодо u, v.

Запишемо рівняння (18), (19) як систему (6), (7) при $\theta = 1$ зі змінними $u, v = \partial_t u$ у просторі $X^{\frac{1}{2}} \times X$. Система (6) набере вигляду

$$\frac{du}{dt} - v = 0, \qquad \frac{dv}{dt} - \eta\Delta v - \Delta u = f(t, x, u, v). \tag{20}$$

Оператор $\mathcal{A}_1$ має спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$, який складається з двох послідовностей власних значень

$$r_n = \frac{\eta\lambda_n}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2\lambda_n^2 - 4\lambda_n}, \qquad q_n = \frac{\eta\lambda_n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2\lambda_n^2 - 4\lambda_n}$$

і граничної точки $\lim_{n\to\infty} r_n = 1/\eta$. Припускаємо, що $\eta^2\lambda_0 \geq 4$. Тоді $1/\eta = \inf\{\mathrm{Re}\sigma(\mathcal{A}_1)\} > 0$.

Припустимо виконання нерівності

$$-\frac{1}{\eta} + \mu\ln(1 + b) = \beta_1 < 0, \tag{21}$$

де μ означено в (5) для послідовності $\{\tau_k\}$ і $b = \sup_{j,k} |b_{jk}|$.

Еволюційний оператор $U(t, s)$, побудований за формулою (11), задовольняє оцінку (див. [10, с. 63])

$$\|U(t, s)u\|_{L^p(\Omega)} \leq K_1 e^{\beta_1(t-s)}\|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \geq s,$$

з деякою сталою $K_1 \geq 1$. Тоді лінійна система (10) експоненціально стійка.

Функція $F\colon \mathbb{R} \times L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ задається як оператор Немицького

$$\big[F(t, u, v)\big](x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f\big(t, x, u(t, x), v(t, x)\big) \end{pmatrix}.$$

За теоремою 2 при виконанні нерівності (21) і при досить малих $N_0,\ N_1$ відповідна системі (18), (19) система (6), (7) має в деякій області U_ρ^α єдиний w-майже періодичний розв'язок $z_0(t) = (u_0(t), \partial_t u_0(t))$.

Покажемо регулярність розв'язку $z_0(t)$. За формулою (8) $u_0(t) \in X^{1/2}$, $u_0(t)+\eta v_0(t) \in X^{\alpha}$. При $\alpha \geq 1/2$ за теоремою вкладення [19] при $1 - n/p \geq \nu > 0$ виконуються вкладення $u_0(t) \in C^{\nu}(\Omega)$, $v_0(t) \in C^{\nu}(\Omega)$.

З теореми 3.5.2 [19] випливає, що функція $\dfrac{dz_0(t)}{dt} = \left(\dfrac{du_0(t)}{dt}, \dfrac{dv_0(t)}{dt}\right)$ локально гельдерова. З рівняння (20) отримуємо, що відповідні функціям $u_0, v_0 : \mathbb{R} \to X$ функції $u_*, v_* : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ задовольняють при $t \neq \tau_k$ рівність

$$\Delta\big(\eta \partial_t u_*(t,x) + u_*(t,x)\big) = \frac{\partial v_*(t,x)}{\partial t} - f\big(t, x, u_*(t,x), v_*(t,x)\big) \in C^{\nu}(\Omega).$$

Тоді $\eta \partial_t u_*(t,x) + u_*(t,x) = \tilde{f}(t,x) \in C^{2+\nu}(\Omega)$, $t \neq \tau_k$, як розв'язок еліптичного рівняння. Отже, $u_*(t,x)$ як функція t задовольняє рівняння з імпульсною дією

$$\eta \frac{du}{dt} + u = \tilde{f}(t,x), \qquad u(\tau_k + 0) - u(\tau_k) = b_{1k} u(\tau_k) + \tilde{g}_k(x), \tag{22}$$

де за формулою (19)

$$\tilde{g}_k(x) = \int\limits_{\xi \in \Omega} S_{1k}(x,\xi) I_{1k}(u_*(\tau_k,\xi), v_*(\tau_k,\xi)) d\xi + g_{1k}(x).$$

У рівнянні (22) x розглядаємо як параметр. Фундаментальний розв'язок однорідного рівняння (22) має вигляд $V(t,s) = e^{-(t-s)/\eta}$, якщо $\tau_k < s \leq t \leq \tau_{k+1}$, і

$$V(t,s) = e^{-(t-\tau_k)/\eta}(I + b_{1k}) e^{-(\tau_k - \tau_{k-1})/\eta} \ldots (I + b_{1m}) e^{-(\tau_m - s)/\eta},$$

якщо $\tau_{m-1} < s \leq \tau_m < \tau_{m+1} < \ldots < \tau_k < t \leq \tau_{k+1}$. За умови (21) однорідне рівняння експоненціально стійке: $|V(t,s)| \leq K_2 e^{\beta_1 (t-s)}$, $t \geq s$, $K_2 \geq 1$. Тоді рівняння (22) має єдиний w-майже періодичний розв'язок $u_*(t,x)$. Він задається формулою

$$u_*(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} V(t,s) \tilde{f}(s,x) ds + \sum_{\tau_k < t} V(t, \tau_k + 0) \tilde{g}_k(x).$$

Оскільки $\tilde{f}$ і $\tilde{g}_k$ C^2-гладкі по x, то і $u_*(t,x)$ C^2-гладкий по $x \in \Omega$. Отже, рівняння (18), (19) має w-майже періодичний розв'язок $u_*(t,x)$, який C^2-гладкий при $t \neq \tau_k$ і задовольняє різницеві співвідношення (19) при $t = \tau_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Література

1. A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, T. Dlotko, *Strongly damped wave problems: bootstrapping and regularity of solutions*, J. Different. Equat., **244**, № 9, 2310 – 2333 (2008).
2. A. N. Carvalho, J. W. Cholewa, *Strongly damped wave equations in* $W_0^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega)$, Discrete and Contin. Dyn. Syst., **2007**, 230 – 239 (2007).
3. T. Diagana, *Almost periodic solutions to some second-order nonautonomous differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc., **140**, № 1, 279 – 289 (2012).
4. E. Hernandez, K. Balachandran, N. Annapoorani, *Existence results for a damped second order abstract functional differential equation with impulses*, Math. Comput. Model., **50**, № 11 – 12, 1583 – 1594 (2009).
5. P. Massatt, *Limiting behavior for strongly damped nonlinear wave equations*, J. Different. Equat., **48**, № 3, 334 – 349 (1983).

6. P. Massatt, *Asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation*, Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Acad. Press (1982), p. 663 – 670 .
7. G. F. Webb, *Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation*, Canad. J. Math., **32**, № 3, 631 – 643 (1980).
8. Q. Zhang, *Global existence of ε-regular solutions for the strongly damped wave equation*, Electron. J. Qual. Theory Different. Equat., **62**, 1 – 11 (2013).
9. А. Халанай, Д. Векслер, *Качественная теория импульсных систем*, Мир, Москва (1971).
10. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Sci. Publ., Singapore (1995).
11. A. V. Dvornyk, V. I. Tkachenko, *Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions*, Ukrainian Math. J., **68**, № 11, 1673 – 1693 (2017).
12. A. V. Dvornyk, O. O. Struk, V. I. Tkachenko, *Almost periodic solutions of Lotka – Volterra systems with diffusion and impulse action*, Ukrainian Math. J., **70**, № 2, 197 – 216 (2018).
13. R. Hakl, M. Pinto, V. Tkachenko, S. Trofimchuk, *Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments*, J. Math. Anal. and Appl., **446**, № 1, 1030 – 1045 (2017).
14. A. M. Samoilenko, S. I. Trofimchuk, *Almost periodic impulsive systems*, Different. Equat., **29**, № 4, 684 – 691 (1993).
15. A. M. Samoilenko, S. I. Trofimchuk, *Unbounded functions with almost periodic differences*, Ukrainian Math. J., **43**, № 10, 1306 – 1309 (1991).
16. G. T. Stamov, *Almost periodic solutions of impulsive differential equations*, Lect. Notes Math., **2047**, Springer, Heidelberg (2012).
17. V. Tkachenko, *Almost periodic solutions of evolution differential equations with impulsive action*, Mathematical Modelling and Applications in Nonlinear Dynamics, Springer, Cham (2016), p. 161 – 205.
18. A. V. Dvornyk, V. I. Tkachenko, *On the stability of solutions of evolutionary equations with nonfixed times of pulse actions*, J. Math. Sci., **220**, № 4, 425 – 439 (2017).
19. D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lect. Notes Math., **840**, Springer, Berlin, Heidelberg (1981).

Одержано 02.12.22