DOI: 10.37863/umzh.v75i1.7373

УДК 517.9 + 519.6

В. Л. Макаров (Ін-т математики НАН України, Київ),
Н. В. Майко[1]**, В. Л. Рябічев** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

РЕАЛІЗАЦІЯ ТОЧНИХ ТРИТОЧКОВИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 2-ГО ПОРЯДКУ

We consider the exact three-point finite-difference scheme (EDS) for the Dirichlet boundary-value problem for a system of second-order ODEs. We find weaker conditions (as compared to the known conditions) under which the analyzed scheme can be represented in the divergence form. The coefficient stability of the EDS and the accuracy of the perturbed scheme are investigated. We show that the matrix coefficients and the right-hand side of the equation can be represented via the solutions of four initial-value problems on the intervals whose length is equal to the length of a grid step. The solutions of these problems can be obtained by using an arbitrary one-step method, which leads to a truncated difference scheme of a certain rank.

Досліджено точну триточкову різницеву схему (ТТРС) для системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку з крайовими умовами першого роду. Знайдено послаблені умови (порівняно з відомими), за яких можливе перетворення ТТРС до однорідного дивергентного вигляду. Доведено теореми про коефіцієнтну стійкість і точність. Показано, що коефіцієнти ТТРС можна подати через розв'язки чотирьох задач Коші на проміжках довжини кроку сітки. Розв'язки цих задач можна одержати за допомогою будь-якого однокрокового методу, що приводить до усіченої різницевої схеми відповідного рангу.

1. Вступ. Одним із найбільш поширених методів наближеного розв'язування задач математичної фізики є метод скінченних різниць [1]. Серед різницевих схем для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) 2-го порядку особливе місце посідають точні триточкові різницеві схеми (ТТРС). Вивчення таких схем бере початок з публікації [2], в якій запропоновано ТТРС для ЗДР 2-го порядку в дивергентній формі з кусково-гладкими коефіцієнтами та крайовими умовами 1-го роду. Реалізацію ТТРС у вигляді усічених схем довільного порядку точності побудовано й обґрунтовано в [3]. Поширенню цих результатів на крайові умови 3-го роду і нерівномірні сітки присвячено статтю [4], на рівняння з узагальненими розв'язками — монографію [5], а на системи ЗДР 2-го порядку — працю [6].

Окремо слід зазначити роботи [7 – 9], які дали поштовх для розвитку двох нових напрямків досліджень в теорії та реалізації ТТРС. У статтях [7, 8] запропоновано нову конструкцію коефіцієнтів та правих частин цих схем тільки через розв'язки задач Коші на проміжках завдовжки у крок сітки, а в [9] уперше конструктивно доведено існування ТТРС для квазілінійних ЗДР 2-го порядку і запропоновано та теоретично обґрунтовано алгоритм їх реалізації. Узагальнюючим підсумком робіт на той час у цих напрямках стала монографія [10], де розглянуто крайові задачі для систем нелінійних ЗДР 1-го порядку, крайові задачі для нелінійних ЗДР 2-го порядку з монотонним оператором, крайові задачі на півосі тощо.

Про актуальність точних схем та їх алгоритмічних реалізацій свідчить видання спеціалізованих тематичних випусків, метою яких є аналіз сучасного стану в цій галузі чисельного аналізу. Так, у колективній монографії [11] поруч із методологією, яка стала класичною [12],

[1] Відповідальна за листування, e-mail: mayko@knu.ua.

розглянуто концепцію так званих нестандартних різницевих схем [13], побудова яких базується на інших математичних і філософських засадах. Нову ефективну алгоритмічну реалізацію ТТРС через усічені схеми на нерівномірній сітці для систем нелінійних ЗДР 2-го порядку з похідною в правій частині запропоновано в [14] (див. також наведену там бібліографію).

Побудова ТТРС, як відомо, істотно спирається на властивості так званих шаблонних функцій (скалярних або матричних) — розв'язків двох допоміжних задач Коші для відповідного однорідного рівняння (скалярного або векторного). Відшукання таких функцій в явному вигляді можливе лише в окремих випадках, а тому актуальним питанням теорії і практики є побудова для ТТРС їх ефективних алгоритмічних реалізацій — усічених схем довільного порядку точності. Один із підходів (див., наприклад, [3]) ґрунтується на розвиненні шаблонних функцій у степеневий ряд (за степенями кроку h сітки), коефіцієнти якого виражаються через кратні інтеграли за допомогою рекурентних формул, та заміні цих рядів їх скінченними сумами. Інший підхід, як зазначено вище, запропоновано в [7, 8], де для визначення коефіцієнтів і правої частини ТТРС у вузлі x_i сітки потрібно розв'язати чотири допоміжні задачі Коші: дві задачі на відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ (вперед) та дві на відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ (назад). Розв'язуючи кожну із них яким-небудь однокроковим методом (наприклад, розкладом за формулою Тейлора, методом Рунге – Кутти тощо), точність якого узгоджена з гладкістю коефіцієнтів і правої частини рівняння, одержують усічену схему заданого порядку точності. Мета даної роботи полягає в узагальненні результатів [6] та поширенні результатів [7, 8] на першу крайову задачу для векторного рівняння [6].

Стаття складається із вступу і чотирьох пунктів. Пункт 2 доповнює відомі результати [6] щодо властивостей шаблонних матричних функцій. Зауважимо, що в [6] знайдено достатні умови, за яких ТТРС може бути зведена до однорідного дивергентного вигляду. Ці умови пов'язані з вимогою комутативності матричних коефіцієнтів і фактично приводять вихідну матрично-векторну задачу до скалярного випадку. Дотепер питання про існування ТТРС у дивергентній формі для систем ЗДР 2-го порядку із симетричними матричними коефіцієнтами без вимог їх комутативності залишалося відкритим. Проблемі послаблення зазначених достатніх умов присвячено пункт 3. У пункті 4 досліджено коефіцієнтну стійкість і точність збуреної ТТРС, а в пункті 5 доведено теорему про точність усіченої схеми, якщо її коефіцієнти виражаються через розв'язки чотирьох задач Коші, знайдені однокроковим методом відповідного порядку точності.

2. Точна триточкова різницева схема. Розглянемо крайову задачу

$$L^{(P,Q)}u \equiv \frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{d\vec{u}}{dx}\right) - Q(x)\vec{u} = -\vec{f}(x), \quad x \in (0;1), \tag{1}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}(1) = \vec{0}, \tag{2}$$

де $P(x)$, $Q(x)$ — задані квадратні матриці порядку n, $\vec{f}(x)$ — заданий вектор, $\vec{u}(x)$ — шуканий розв'язок. Елементи матричних функцій $P(x)$, $Q(x)$ і векторної функції $\vec{f}(x)$ є дійсними функціями певного порядку гладкості на $[0;1]$.

Введемо скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$:

$$(\vec{u}(x), \vec{v}(x)) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(x).$$

Нехай $\bar{\omega} = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N\ (h = 1/N)\}$ — рівномірна сітка на $[0; 1]$. Далі будуть потрібні сіткові множини $\omega = \{x_i = ih,\ i = 1, \ldots, N-1\}$, $\omega^+ = \{x_i = ih,\ i = 1, \ldots, N\}$.

Визначимо шаблонні матричні функції $V_\alpha^{(i)}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, як розв'язки задач Коші

$$L^{(P,Q)} V_\alpha^{(i)}(x) = 0, \qquad x \in (x_{i-1}; x_{x+1}), \quad \alpha = 1, 2, \tag{3}$$

$$V_1^{(i)}(x_{i-1}) = 0, \qquad P(x_{i-1}) \frac{dV_1^{(i)}}{dx}(x_{i-1}) = E, \tag{4}$$

$$V_2^{(i)}(x_{i+1}) = 0, \qquad P(x_{i+1}) \frac{dV_2^{(i)}}{dx}(x_{i+1}) = -E, \tag{5}$$

де 0 — нуль-матриця, E — одинична матриця.

Визначимо векторну функцію $\vec{v}_3^{\,i}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, як розв'язок крайової задачі

$$\begin{gathered} L^{(P,Q)} \vec{v}_3^{\,(i)}(x) = -\vec{f}(x), \quad x \in (x_{i-1}; x_{x+1}), \\ \vec{v}_3^{\,(i)}(x_{i-1}) = \vec{0}, \qquad \vec{v}_3^{\,(i)}(x_{i+1}) = \vec{0}. \end{gathered} \tag{6}$$

Для зручності наведемо потрібні нам основні результати, доведення яких можна знайти в [6].

Лема 1 [6]. *Нехай матриці $P(x)$ і $Q(x)$ задовольняють умови*

$$\begin{gathered} (P(x)\vec{u}(x), \vec{u}(x)) > 0, \qquad (Q(x)\vec{u}(x), \vec{u}(x)) \geq 0 \\ \forall x \in [0; 1] \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in C([0; 1]; \mathbb{R}^n). \end{gathered} \tag{7}$$

Тоді шаблонні матричні функції $V_\alpha^{(i)}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, мають такі властивості: 1) $V_\alpha^{(i)}(x)$ *лінійно незалежні*; 2) $V_\alpha^{(i)}(x)$ *невироджені*, *тобто*

$$\det V_1^{(i)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_{i-1}; x_{x+1}], \qquad \det V_2^{(i)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}; x_{x+1}).$$

У наступному твердженні матричні функції $V_\alpha^{(i)}(x)$ використано для побудови точної триточкової різницевої схеми.

Лема 2 [6]. *Нехай виконуються умови* (7). *Тоді для задачі* (1), (2) *існує точна триточкова різницева схема і вона має вигляд*

$$\begin{gathered} \vec{u}_i = V_1^{(i)}(x_i)[V_1^{(i)}(x_{i+1})]^{-1} \vec{u}_{i+1} + V_2^{(i)}(x_i)[V_2^{(i)}(x_{i-1})]^{-1} \vec{u}_{i-1} + \vec{v}_3^{\,(i)}(x_i), \\ \vec{u}_0 = \vec{u}_N = \vec{0}. \end{gathered} \tag{8}$$

Дослідимо тепер матричні функції $V_\alpha^{(i)}(x)$, доповнивши лему 3 з [6] новими властивостями.

Лема 3. *Нехай виконуються умови* (7) *та умови*

$$P(x) = P^*(x), \qquad Q(x) = Q^*(x) \quad \forall x \in [0; 1]. \tag{9}$$

Тоді шаблонні матричні функції $V_\alpha^{(i)}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, мають такі властивості:

1) $V_1^{(i)}(x_{i+1}) = V_2^{(i)^*}(x_{i-1})$;

2) $V_1^{(i+1)}(x_{i+1}) = V_2^{(i)^*}(x_i)$;

3) $V_1^{(i)}(x_{i+1}) \;=\; V_2^{(i)^*}(x_i)\left\{E + \int_{x_{i-1}}^{x_i} Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi)d\xi\right\} + \left\{E + \int_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)^*}(x_i)Q(\xi)d\xi\right\} \times$
$\times V_1^{(i)}(x_i)$;

4) $V_\alpha^{(i)^*}(x)P(x)\dfrac{dV_\alpha^{(i)}(x)}{dx} = \dfrac{dV_\alpha^{(i)^*}(x)}{dx}P(x)V_\alpha^{(i)}(x),\ x \in [x_{i-1}; x_{i+1}],\ \alpha = 1, 2$;

5) $V_1^{(i)^*}(x)\left\{E + \int_{x_{i-1}}^{x} Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi)d\xi\right\} = \left\{E + \int_{x_{i-1}}^{x} V_1^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)d\xi\right\}V_1^{(i)}(x)$,
$x \in [x_{i-1}; x_{i+1}]$;

6) $V_2^{(i)^*}(x)\left\{E + \int_{x}^{x_{i-1}} Q(\xi)V_2^{(i)}(\xi)d\xi\right\} = \left\{E + \int_{x}^{x_{i+1}} V_2^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)d\xi\right\}V_2^{(i)}(x)$,
$x \in [x_{i-1}; x_{i+1}]$.

Доведення. Властивості 1 – 3 доводяться подібно до [1, с. 189] з невеликими змінами. Доведемо властивість 4 для $\alpha = 1$ (доведення для $\alpha = 2$ аналогічне). З двох рівнянь

$$V_1^{(i)^*}(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(P(\xi)\frac{dV_1^{(i)}(\xi)}{d\xi}\right) = V_1^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}],$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dV_1^{(i)^*}(\xi)}{d\xi}P(\xi)\right)V_1^{(i)}(\xi) = V_1^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}],$$

отримуємо рівність

$$V_1^{(i)^*}(\xi)\frac{d}{d\xi}\left(P(\xi)\frac{dV_1^{(i)}(\xi)}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dV_1^{(i)^*}(\xi)}{d\xi}P(\xi)\right)V_1^{(i)}(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}],$$

інтегруючи яку від $\xi = x_{i-1}$ до $\xi = x$, маємо

$$V_1^{(i)^*}(\xi)P(\xi)\frac{dV_1^{(i)}(\xi)}{d\xi}\Bigg|_{x_{i-1}}^{x} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \frac{dV_1^{(i)^*}}{d\xi}P(\xi)\frac{dV_1^{(i)}(\xi)}{d\xi}d\xi =$$

$$= \frac{dV_1^{(i)^*}(\xi)}{d\xi}P(\xi)V_1^{(i)}(\xi)\Bigg|_{x_{i-1}}^{x} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \frac{dV_1^{(i)^*}}{d\xi}P(\xi)\frac{dV_1^{(i)}(\xi)}{d\xi}d\xi.$$

Враховуючи початкові умови, одержуємо

$$V_1^{(i)^*}(x)P(x)\frac{dV_1^{(i)}(x)}{dx} = \frac{dV_1^{(i)^*}(x)}{dx}P(x)V_1^{(i)}(x), \quad x \in [x_{i-1}; x_{i+1}].$$

Доведемо тепер властивість 5. Інтегруючи рівності

$$\frac{d}{d\xi}\left(P(\xi)\frac{dV_1^{(i)}(\xi)}{d\xi}\right) = Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}],$$

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dV_1^{(i)^*}(\xi)}{d\xi}P(\xi)\right) = V_1^{(i)^*}(\xi)Q(\xi), \quad \xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}],$$

від $\xi = x_{i-1}$ до $\xi = x$ та враховуючи початкові умови, отримуємо

$$P(x)\frac{dV_1^{(i)}(x)}{dx} = E + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi)d\xi, \quad x \in [x_{i-1}; x_{i+1}],$$

$$\frac{dV_1^{(i)^*}(x)}{dx}P(x) = E + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} V_1^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)d\xi, \quad x \in [x_{i-1}; x_{i+1}].$$

Помножимо перше рівняння на $V_1^{(i)^*}(x)$ зліва, а друге на $V_1^{(i)}(x)$ справа. Тоді властивість 5 буде випливати з властивості 4. Доведення властивості 6 аналогічне доведенню властивості 5. Для цього достатньо замінити $V_1^{(i)}$ на $V_2^{(i)}$, виконати інтегрування від $\xi = x$ до $\xi = x_{i+1}$ та скористатися відповідними початковими умовами.

Лему 3 доведено.

Означення. *Матричну функцію $G^{(i)}(x,\xi)$, яка задовольняє умови*

$$L_x^{(P,Q)}G^{(i)}(x,\xi) \equiv \frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dG^{(i)}(x,\xi)}{dx}\right) - Q(x)G^{(i)}(x,\xi) = 0, \qquad x \in (x_{i-1}; x_{i+1}), \quad x \neq \xi,$$

$$G^{(i)}(x_{i-1},\xi) = G^{(i)}(x_{i+1},\xi) = 0,$$

$$\left[G^{(i)}(x,\xi)\right]_{x=\xi} = 0, \qquad \left[P(x)\frac{dG^{(i)}(x,\xi)}{dx}\right]_{x=\xi} = -E,$$

називають функцією Гріна оператора $L^{(P,Q)}$ на відрізку $[x_{i-1}; x_{i+1}]$.

Запис $[v(x)]_{x=\xi} \equiv v(\xi+0) - v(\xi-0)$ означає стрибок функції $v(x)$ у точці $x = \xi$.

Наступна лема містить явний вигляд функції Гріна $G^{(i)}(x,\xi)$, знайдений за допомогою шаблонних матричних функцій $V_\alpha^{(i)}(x)$.

Лема 4 [6]. *Нехай виконуються умови* (7) *і* (9). *Тоді матрична функція Гріна $G^{(i)}(x,\xi)$ має вигляд*

$$G^{(i)}(x,\xi) = \begin{cases} V_1^{(i)}(x)\left[V_1^{(i)}(x_{i+1})\right]^{-1}V_2^{(i)^*}(\xi), & x \le \xi, \\ V_2^{(i)}(x)\left[V_1^{(i)^*}(x_{i+1})\right]^{-1}V_1^{(i)^*}(\xi), & \xi \le x, \end{cases} \qquad x,\xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}]. \tag{10}$$

***Наслідок* 1.** *Для матричної функції Гріна $G^{(i)}(x,\xi)$ справджуються такі співвідношення*:

$$G^{(i)}(x,\xi) = G^{(i)*}(\xi,x) \quad \forall x,\xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}],$$

$$\left[G^{(i)}(x_i,x_i)\right]^{-1} = \left[V_1^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1} + \left[V_1^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)d\xi +$$

$$+\Big[V_2^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}+\Big[V_2^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}V_2^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)d\xi. \tag{11}$$

Доведення. Як і в [6] (наслідок 1), перше співвідношення випливає безпосередньо із зображення (10). Доведемо друге співвідношення. За властивістю 3 леми 3 маємо

$$\Big[G^{(i)}(x_i,x_i)\Big]^{-1}=\Big[V_2^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}V_1^{(i)}(x_{i+1})\Big[V_1^{(i)}(x_i)\Big]^{-1}=$$

$$=\Big[V_1^{(i)}(x_i)\Big]^{-1}+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi)d\xi\,\Big[V_1^{(i)}(x_i)\Big]^{-1}+$$

$$+\Big[V_2^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}+\Big[V_2^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}V_2^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)d\xi. \tag{12}$$

З властивості 5 леми 3 випливає рівність

$$\Big[V_1^{(i)}(x_i)\Big]^{-1}+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}Q(\xi)V_1^{(i)}(\xi)d\xi\,\Big[V_1^{(i)}(x_i)\Big]^{-1}=$$

$$=\Big[V_1^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}+\Big[V_1^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}V_1^{(i)^*}(\xi)Q(\xi)d\xi. \tag{13}$$

Підставляючи (13) у (12), одержуємо формулу (11).

Наслідок 2 [6]. *Векторний розв'язок* $\vec v_3^{(i)}(x)$ *крайової задачі* (6) *має вигляд*

$$\vec v_3^{(i)}(x)=V_2^{(i)}(x)\Big[V_1^{(i)^*}(x_{i+1})\Big]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}V_1^{(i)^*}(\xi)\vec f(\xi)d\xi+$$

$$+V_1^{(i)}(x)\Big[V_1^{(i)}(x_{i+1})\Big]^{-1}\int\limits_{x}^{x_{i+1}}V_2^{(i)^*}(\xi)\vec f(\xi)d\xi,\quad x\in[x_{i-1};x_{i+1}].$$

Теорема 1 [6]. *Нехай виконуються умови* (7) *і* (9). *Тоді ТТРС* (8) *можна перетворити до вигляду*

$$\Lambda\vec u\equiv\frac{1}{h}\left\{\left[\frac{1}{h}V_2^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\vec u_{x,\,i}-\left[\frac{1}{h}V_1^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\vec u_{\bar x,\,i}\right\}-D_i\vec u_i=-\vec\varphi_i,\quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

$$\vec u_0=\vec 0,\qquad \vec u_N=\vec 0, \tag{14}$$

де

$$D_i = \frac{1}{h}\Big[V_1^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)*}(\xi)Q(\xi)d\xi + \frac{1}{h}\Big[V_2^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)*}(\xi)Q(\xi)d\xi, \qquad (15)$$

$$\vec{\varphi}_i = \frac{1}{h}\Big[V_1^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)*}(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi + \frac{1}{h}\Big[V_2^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)*}(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi. \qquad (16)$$

Доведення. Застосовуючи леми 3 і 4 та наслідок 1, записуємо ТТРС (8) у вигляді

$$\Big[G^{(i)}(x_i,x_i)\Big]^{-1}\vec{u}_i = [V_2^{(i)*}(x_i)]^{-1}\vec{u}_{i+1} +$$

$$+ [V_1^{(i)*}(x_i)]^{-1}\vec{u}_{i-1} + \Big[G^{(i)}(x_i,x_i)\Big]^{-1}\vec{v}_3^{(i)}(x_i), \qquad (17)$$

де

$$\Big[G^{(i)}(x_i,x_i)\Big]^{-1} = \Big[V_2^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}V_1^{(i)}(x_{i+1})\Big[V_1^{(i)}(x_i)\Big]^{-1} =$$

$$= \Big[V_1^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}V_2^{(i)}(x_{i-1})\Big[V_2^{(i)}(x_i)\Big]^{-1}.$$

Перетворимо доданок $\big[G^{(i)}(x_i,x_i)\big]^{-1}\vec{v}_3^{(i)}(x_i)$ в (17) за допомогою наслідку 2:

$$\Big[G^{(i)}(x_i,x_i)\Big]^{-1}\vec{v}_3^{(i)}(x_i) =$$

$$= \Big[V_1^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)*}(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi + \Big[V_2^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)*}(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi. \qquad (18)$$

Підставляючи (18) і (11) у рівність (17), одержуємо схему

$$[V_2^{(i)*}(x_i)]^{-1}(\vec{u}_{i+1}-\vec{u}_i) + [V_1^{(i)*}(x_i)]^{-1}(\vec{u}_{i-1}-\vec{u}_i) +$$

$$+\left\{\Big[V_1^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)*}(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi + \Big[V_2^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)*}(\xi)\vec{f}(\xi)d\xi\right\} -$$

$$-\left\{\Big[V_1^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)*}(\xi)Q(\xi)d\xi + \Big[V_2^{(i)*}(x_i)\Big]^{-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)*}(\xi)Q(\xi)d\xi\right\}\vec{u}_i = \vec{0},$$

що і доводить теорему.

***Наслідок* 3** ([6], лема 6). *Нехай виконуються умови* (7) *і* (9) *та справджуються співвідношення*

$$V_\alpha^{(i)}(x) = V_\alpha^{(i)*}(x), \qquad i = 1,2,\ldots,N-1, \quad \alpha = 1,2. \qquad (19)$$

Тоді ТТРС (8) *можна подати в дивергентному вигляді*

$$\begin{gathered}\Lambda u \equiv (A\vec{u}_{\bar{x}})_x - D\vec{u} = -\vec{\varphi}, \quad x \in \omega, \\ \vec{u}(0) = \vec{0}, \qquad \vec{u}(1) = \vec{0},\end{gathered} \tag{20}$$

де

$$A_i = A(x_i) = \left[\frac{1}{h} V_1^{(i)}(x_i)\right]^{-1}. \tag{21}$$

Для зведення ТТРС до дивергентного вигляду можна скористатися методом факторизації. Помножимо (14) зліва на матрицю Ψ_i і будемо шукати її з умови дивергентності

$$\Psi_{i+1}\left[\frac{1}{h} V_1^{(i+1)^*}(x_{i+1})\right]^{-1} = \Psi_i\left[\frac{1}{h} V_1^{(i+1)}(x_{i+1})\right]^{-1}.$$

Знайдемо розв'язок цього матричного різницевого рівняння 1-го порядку:

$$\begin{gathered}\Psi_{i+1} = \Psi_0\left[V_1^{(1)}(x_1)\right]^{-1}\left[V_1^{(1)^*}(x_1)\right]\times \\ \times\left[V_1^{(2)}(x_2)\right]^{-1}\left[V_1^{(2)^*}(x_2)\right]\times\ldots\times\left[V_1^{(i+1)}(x_{i+1})\right]^{-1}\left[V_1^{(i+1)^*}(x_{i+1})\right] = \\ = \Psi_0\prod_{j=1}^{i+1}\left[V_1^{(j)}(x_j)\right]^{-1}\left[V_1^{(j)^*}(x_j)\right].\end{gathered}$$

Тоді ТТРС (14) набирає вигляду

$$\begin{gathered}\frac{1}{h}\left\{\Psi_i\left[\frac{1}{h} V_1^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\vec{u}_{\bar{x},i}\right\}_{x,i} - \Psi_i D_i \vec{u}_i = -\Psi_i\vec{\varphi}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \vec{u}_0 = \vec{u}_N = \vec{0}.\end{gathered}$$

3. Умови для дивергентного вигляду ТТРС. З наслідку 3 випливає, що самоспряженість шаблонних матричних функцій є достатньою умовою для зведення ТТРС (8) (або (14)) до однорідного дивергентного вигляду. В [6] знайдено достатню умову існування таких шаблонних матричних функцій. Точніше, якщо разом з умовами (7) і (9) виконуються умови комутативності

$$\begin{gathered}P(x)P(\xi) = P(\xi)P(x), \qquad Q(x)Q(\xi) = Q(\xi)Q(x), \qquad P(x)Q(\xi) = Q(\xi)P(x) \\ \forall x, \xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1,\end{gathered} \tag{22}$$

то шаблонні матричні функції $V_\alpha^{(i)}(x)$ мають властивість (19). Однак, як зазначено в [6, с. 1201], при виконанні умов (7), (9), (22) вихідна система розпадається (зводиться до скалярного випадку). Побудуємо приклад, який демонструє, що умова комутативності (22) не є необхідною для самоспряженості шаблонних матричних функцій $V_\alpha^{(i)}(x)$.

Розглянемо задачу Коші (3), (4) при $n = 2$:

$$P(x) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \quad m = \mathrm{const} > 0, \ \ p = \mathrm{const} > 0, \ \ m \neq p,$$

$$Q(x) = \begin{bmatrix} a(x) & 1 \\ 1 & b(x) \end{bmatrix},$$

$$a(x), b(x) \in C^2[0;1], \quad (Q(x)\vec{u}, \vec{u}) \geq 0 \quad \forall x \in [0;1] \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2.$$

Позначивши її розв'язок через $V_1^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x) \\ v_{21}(x) & v_{22}(x) \end{bmatrix}$, запишемо систему (3) і початкові умови (4) у вигляді

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v''_{11}(x) & v''_{12}(x) \\ v''_{21}(x) & v''_{22}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x) & 1 \\ 1 & b(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x) \\ v_{21}(x) & v_{22}(x) \end{bmatrix}, \quad x \in (x_{i-1};\ x_{i+1}), \tag{23}$$

$$V_1^{(i)}(x_{i-1}) \equiv \begin{bmatrix} v_{11}(x_{i-1}) & v_{12}(x_{i-1}) \\ v_{21}(x_{i-1}) & v_{22}(x_{i-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{dV_1^{(i)}(x_{i-1})}{dx} \equiv \begin{bmatrix} v'_{11}(x_{i-1}) & v'_{12}(x_{i-1}) \\ v'_{21}(x_{i-1}) & v'_{22}(x_{i-1}) \end{bmatrix} = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/p \end{bmatrix}.$$

Далі будуть потрібні похідні

$$\frac{d^2 V_1^{(i)}(x_{i-1})}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^3 V_1^{(i)}(x_{i-1})}{dx^3} = P^{-1} Q(x_{i-1}) P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(x_{i-1}) & 1 \\ 1 & b(x_{i-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a(x_{i-1})}{m^2} & \dfrac{1}{mp} \\ \dfrac{1}{mp} & \dfrac{b(x_{i-1})}{p^2} \end{bmatrix}.$$

Із системи (23) знайдемо

$$mv''_{11} = a(x)v_{11} + v_{21},$$

$$pv''_{21} = v_{11} + b(x)v_{21}.$$

Виключивши $v_{11} = pv''_{21} - b(x)v_{21}$ з першого рівняння, одержимо, що функція $v_{21}(x)$ є розв'язком задачі Коші для ЗДР 4-го порядку:

$$mp\frac{d^4 v_{21}(x)}{dx^4} + \big[-mb(x) - pa(x)\big]\frac{d^2 v_{21}(x)}{dx^2} -$$

$$- 2mb'(x)\frac{dv_{21}(x)}{dx} + \big[a(x)b(x) - mb''(x) - 1\big]v_{21} = 0, \tag{24}$$

$$v_{21}(x_{i-1}) = 0, \quad \frac{dv_{21}(x_{i-1})}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 v_{21}(x_{i-1})}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 v_{21}(x_{i-1})}{dx^3} = \frac{1}{mp}.$$

Аналогічно з (23) отримаємо систему

$$mv_{12}'' = a(x)v_{12} + v_{22},$$

$$pv_{22}'' = v_{12} + b(x)v_{22},$$

що після виключення $v_{22} = mv_{12}'' - a(x)v_{12}$ з другого рівняння приведе до задачі Коші для ЗДР 4-го порядку щодо функції $v_{12}(x)$:

$$pm\frac{d^4v_{12}(x)}{dx^4} + [-pa(x) - mb(x)]\frac{d^2v_{12}(x)}{dx^2} - 2pa'(x)\frac{dv_{12}(x)}{dx} + \\ + \big[b(x)a(x) - pa''(x) - 1\big]v_{12} = 0, \tag{25}$$

$$v_{12}(x_{i-1}) = 0, \qquad \frac{dv_{12}(x_{i-1})}{dx} = 0, \qquad \frac{d^2v_{12}(x_{i-1})}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3v_{12}(x_{i-1})}{dx^3} = \frac{1}{mp}.$$

Очевидно, якщо функції $a(x)$ і $b(x)$ задовольняють умову

$$a'(x) = b'(x) \quad \forall x \in [x_{i-1};\ x_{i+1}],$$

то (24) і (25) перетворюються на одну й ту саму задачу Коші, а отже, $v_{12}(x) = v_{21}(x)$ $\forall x \in$ $\in [x_{i-1}; x_{i+1}]$, і матрична функція $V_1^{(i)}(x)$ є симетричною.

Зокрема, при $m = 1,\ p = 1/2,\ a(x) \equiv 1,\ b(x) \equiv 1$ додатна визначеність матриці $P(x)$ і невід'ємність матриці $Q(x)$ для всіх $x \in [0; 1]$ очевидні. Безпосередньо знаходимо

$$V_1^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(x - x_{i-1})}{3} + \dfrac{\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i-1})\big)}{3\sqrt{3}} & -\dfrac{2(x - x_{i-1})}{3} + \dfrac{2\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i-1})\big)}{3\sqrt{3}} \\ -\dfrac{2(x - x_{i-1})}{3} + \dfrac{2\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i-1})\big)}{3\sqrt{3}} & \dfrac{2(x - x_{i-1})}{3} + \dfrac{4\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i-1})\big)}{3\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Аналогічно маємо

$$V_2^{(i)}(x) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2(x - x_{i+1})}{3} - \dfrac{\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i+1})\big)}{3\sqrt{3}} & \dfrac{2(x - x_{i+1})}{3} - \dfrac{2\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i+1})\big)}{3\sqrt{3}} \\ \dfrac{2(x - x_{i+1})}{3} - \dfrac{2\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i+1})\big)}{3\sqrt{3}} & -\dfrac{2(x - x_{i+1})}{3} - \dfrac{4\operatorname{sh}\big(\sqrt{3}(x - x_{i+1})\big)}{3\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що матриці $P(x)$ і $Q(x)$ не задовольняють умови комутативності (22), оскільки

$$P(x)Q(\xi) - Q(\xi)P(x) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a(\xi) & 1 \\ 1 & b(\xi) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a(\xi) & 1 \\ 1 & b(\xi) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ma(\xi) & m \\ p & pb(\xi) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ma(\xi) & p \\ m & pb(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & m - p \\ p - m & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{при} \quad m \neq p$$

$$\forall x, \xi \in [x_{i-1}; x_{i+1}].$$

4. Коефіцієнтна стійкість ТТРС. Дослідимо на коефіцієнтну стійкість ТТРС (20). Подібно до $G^{(i)}(x,\xi)$ позначимо через $G(x,\xi)$ матричну функцію Гріна оператора $L^{(P,Q)}$ на відрізку $[0;1]$. Визначимо шаблонні матричні функції $V_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2$, як розв'язки задач Коші

$$
\begin{gathered}
L^{(P,Q)}V_\alpha(x) = 0, \qquad 0 < x < 1, \quad \alpha = 1,2, \\
V_1(0) = 0, \qquad P(0)\frac{dV_1(0)}{dx} = E, \\
V_2(1) = 0, \qquad P(1)\frac{dV_2(1)}{dx} = -E.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Аналогічно лемі 4 можна довести, що функція Гріна $G(x,\xi)$ має вигляд

$$
G(x,\xi) = \begin{cases} V_1(x)[V_1(1)]^{-1}V_2^*(\xi), & x \le \xi, \\ V_2(x)\big[V_1^*(1)\big]^{-1}V_1^*(\xi), & \xi \le x, \end{cases} \qquad x,\xi \in [0;1]. \tag{27}
$$

Нехай $G^h(x,\xi)$ — матрична функція Гріна оператора Λ різницевої задачі (20), а $V_\alpha^h(x)$, $\alpha = 1,2$, — розв'язки різницевих задач Коші

$$
\begin{gathered}
\Lambda V_\alpha^h(x) = 0, \qquad x \in \omega, \quad \alpha = 1,2, \\
V_1^h(0) = 0, \qquad \left[\frac{1}{h}V_1^{(1)}(x_1)\right]^{-1} V_{1\bar{x}}^h(x_1) = E, \\
V_2^h(1) = 0, \qquad \left[\frac{1}{h}V_2^{(N-1)}(x_{N-1})\right]^{-1} V_{2\bar{x}}^h(1) = -E.
\end{gathered} \tag{28}
$$

Лема 5. *Нехай виконуються умови* (7), (9) *і* (19). *Тоді справджується рівність*

$$
G^h(x,\xi) = G(x,\xi) \quad \forall x,\xi \in \bar{\omega}.
$$

Доведення. Оскільки $V_1^{(1)}(x) = V_1(x)$ $\forall x \in [0;x_2]$, то матрична функція $V_1(x)$ задовольняє початкові умови задачі Коші (28):

$$
V_1(0) = 0, \quad \left[\frac{1}{h}V_1^{(1)}(x_1)\right]^{-1} \frac{V_1(x_1) - V_1(0)}{h} = E,
$$

а отже, при $\alpha = 1$ різницева схема (28) є точною для (26) і $V_1^h(x) = V_1(x)$ $\forall x \in \bar{\omega}$. Аналогічно $V_2^h(x) = V_2(x)$ $\forall x \in \bar{\omega}$. Звідси випливає твердження леми.

Введемо норму матриці, узгоджену з нормою вектора:

$$
\|A\| = \sup_{\vec{u}\neq\vec{0}} \frac{\|A\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}, \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u},\vec{u})} = \left(\sum_{k=1}^n u_k^2\right)^{1/2}.
$$

Лема 6. *Нехай матриці* $P(x)$, $Q(x)$ *задовольняють умову* (9) *та умови*

$$
\begin{gathered}
C_1(\vec{u},\ \vec{u}) \le (P(x)\vec{u},\ \vec{u}) \le C_2(\vec{u},\ \vec{u}), \qquad 0 \le (Q(x)\vec{u},\ \vec{u}) \le C_2(\vec{u},\ \vec{u}) \\
\forall x \in [0;1] \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n \quad (C_1 > 0).
\end{gathered} \tag{29}
$$

Тоді для матричних функцій $V_\alpha(x),\ \alpha = 1, 2,$ *задачі* (26) *виконуються оцінки*

$$\|V_\alpha(x)\| \le \frac{1}{C_1} \exp\left(\frac{C_2}{2C_1}\right) \quad \forall x \in [0; 1], \tag{30}$$

$$\|V_{\alpha\bar{x}}(x)\| \le \frac{1}{C_1} \exp\left(\frac{C_2}{2C_1}\right) \quad \forall x \in [x_1; 1], \quad \alpha = 1, 2. \tag{31}$$

Доведення. З умов (9) і (29) випливають оцінки

$$\|P^{-1}(x)\| \le \frac{1}{C_1}, \quad \|Q(x)\| \le C_2 \quad \forall x \in [0; 1].$$

Розглянемо випадок $\alpha = 1$ (доведення при $\alpha = 2$ аналогічне). Зінтегрувавши рівняння

$$\frac{d}{d\eta}\left(P(\eta)\frac{dV_1(\eta)}{d\eta}\right) = Q(\eta)V_1(\eta)$$

від $\eta = 0$ до $\eta = \xi$ з урахуванням початкової умови та помноживши обидві його частини зліва на матрицю $P^{-1}(\xi)$, одержимо

$$\frac{dV_1(\xi)}{d\xi} = P^{-1}(\xi) + P^{-1}(\xi)\int_0^\xi Q(\eta)V_1(\eta)d\eta.$$

Інтегруючи тепер від $\xi = 0$ до $\xi = x$ та враховуючи початкову умову, маємо

$$V_1(x) = \int_0^x P^{-1}(\xi)d\xi + \int_0^x P^{-1}(\xi)\int_0^\xi Q(\eta)V_1(\eta)d\eta d\xi, \quad x \in [0; 1]. \tag{32}$$

Внаслідок умов (29) звідси випливає нерівність

$$\|V_1(x)\| \le \int_0^x \|P^{-1}(\xi)\|d\xi + \int_0^x \|P^{-1}(\xi)\| \int_0^\xi \|Q(\eta)\|\|V_1(\eta)\|d\eta\, d\xi \le$$

$$\le \frac{x}{C_1} + \frac{C_2 x}{C_1}\int_0^x \|V_1(\eta)\|d\eta, \quad x \in [0; 1],$$

яку можна записати у вигляді

$$\frac{\|V_1(x)\|}{x} \le \frac{1}{C_1} + \frac{C_2}{C_1}\int_0^x \eta\frac{\|V_1(\eta)\|}{\eta}d\eta, \quad x \in (0; 1].$$

Застосувавши лему Беллмана – Гронуолла [15, с. 134 – 135], отримаємо

$$\frac{\|V_1(x)\|}{x} \le \frac{1}{C_1}\exp\left(\frac{C_2}{C_1}\int_0^x \eta d\eta\right) = \frac{1}{C_1}\exp\left(\frac{C_2 x^2}{2C_1}\right), \quad x \in (0; 1],$$

тобто

$$\|V_1(x)\| \le \frac{x}{C_1}\exp\left(\frac{C_2x^2}{2C_1}\right), \quad x\in[0;1], \tag{33}$$

а отже, й оцінку (30).

Доведемо тепер оцінку (31). Внаслідок (32) маємо

$$V_1(x_i)-V_1(x_{i-1})=\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}P^{-1}(\xi)d\xi+\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}P^{-1}(\xi)\int\limits_0^{\xi}Q(\eta)V_1(\eta)d\eta\,d\xi, \quad i=1,2,\ldots,N,$$

звідки випливає нерівність

$$\big\|V_1(x_i)-V_1(x_{i-1})\big\| \le \frac{x_i-x_{i-1}}{C_1}+\frac{C_2(x_i-x_{i-1})}{C_1}\int\limits_0^{x_i}\|V_1(\eta)\|d\eta, \quad i=1,2,\ldots,N.$$

Використовуючи оцінку (33), одержуємо

$$\left\|\frac{V_1(x_i)-V_1(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right\| \le \frac{1}{C_1}+\frac{C_2}{C_1}\int\limits_0^{x_i}\frac{\eta}{C_1}\exp\left(\frac{C_2\eta^2}{2C_1}\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_1}\left(\exp\left(\frac{C_2x_i^2}{2C_1}\right)-1\right)=\frac{1}{C_1}\exp\frac{C_2x_i^2}{2C_1}, \quad i=1,2,\ldots,N,$$

що й доводить оцінку (31).

Лему 6 доведено.

Знайдемо тепер оцінки для функції Гріна $G^h(x,\xi)$ та її різницевих похідних.

Лема 7. *Нехай виконуються умови* (7), (9), (19) *і* (29). *Тоді справджуються оцінки*

$$\max_{x\in\omega,\ \xi\in\omega^+}\|G_{\bar\xi}(x,\xi)\| \le M_1, \tag{34}$$

$$\max_{x\in\omega^+}\sum_{\xi\in\omega^+}h\|G_{\bar\xi\bar x}(x,\xi)\| \le 3M_1, \tag{35}$$

де $M_1=\dfrac{1}{C_1^2}\exp^2\left(\dfrac{C_2}{2C_1}\right)\Big\|\,[V_1(1)]^{-1}\Big\|$.

Доведення. Оцінка (34) безпосередньо випливає із зображення

$$G_{\bar\xi}(x,\xi)=\begin{cases}V_1(x)[V_1(1)]^{-1}V_{2\bar\xi}^*(\xi), & x\le\xi,\\ V_2(x)\big[V_1^*(1)\big]^{-1}V_{1\bar\xi}^*(\xi), & \xi\le x,\end{cases} \quad x\in\omega, \quad \xi\in\omega^+,$$

і леми 6. Щоб довести оцінку (35), знайдемо

$$G_{\bar\xi\bar x}(x,\xi)=\begin{cases}V_{1\bar x}(x)[V_1(1)]^{-1}V_{2\bar\xi}^*(\xi), & x<\xi,\\ V_{2\bar x}(x)\big[V_1^*(1)\big]^{-1}V_{1\bar\xi}^*(\xi), & \xi<x,\\ \dfrac{1}{h}\Big\{V_{1\bar x}(x)[V_1(1)]^{-1}V_2^*(x)-V_{2\bar x}(x)\big[V_1^*(1)\big]^{-1}V_1^*(x-h)\Big\}, & \xi=x,\end{cases} \quad x,\xi\in\omega^+.$$

Тоді з урахуванням леми 6 маємо

$$\sum_{\xi\in\omega^+} h\|G_{\bar{\xi}\bar{x}}(x,\xi)\| = \sum_{\xi\in\omega^+,\,\xi\neq x} h\|G_{\bar{\xi}\bar{x}}(x,\xi)\| + h\|\,G_{\bar{\xi}\bar{x}}(x,\xi)\big|_{\xi=x}\| \leq$$

$$\leq \frac{3}{C_1^2}\exp^2\left(\frac{C_2}{2C_1}\right)\left\|\,[V_1(1)]^{-1}\right\|, \quad x\in\omega^+.$$

Лему 7 доведено.

Разом із ТТРС (20) розглянемо збурену різницеву схему

$$\tilde{\Lambda}\vec{y} \equiv \frac{1}{h}\left\{\left[\frac{1}{h}\tilde{V}_1^{(i+1)}(x_{i+1})\right]^{-1}\vec{y}_{x,\,i} - \left[\frac{1}{h}\tilde{V}_1^{(i)}(x_i)\right]^{-1}\vec{y}_{\bar{x},\,i}\right\} - \tilde{D}_i\vec{y}_i = -\tilde{\vec{\varphi}}_i, \quad i=1,2,\ldots,N-1,$$

$$\vec{y}_0 = \vec{y}_N = \vec{0}, \tag{36}$$

або в безіндексній формі

$$\tilde{\Lambda}\vec{y} \equiv (\tilde{A}\vec{y}_{\bar{x}})_x - \tilde{D}\vec{y} = -\tilde{\vec{\varphi}}(x), \quad x\in\omega,$$

$$\vec{y}(0) = 0, \qquad \vec{y}(1) = \vec{0}. \tag{37}$$

Тоді похибка $\vec{z}(x) = \vec{u}(x) - \vec{y}(x),\ x\in\bar{\omega}$, є розв'язком дискретної задачі

$$\Lambda\vec{z} \equiv (A\vec{z}_{\bar{x}})_x - D\vec{z} = -\vec{\psi}(x), \quad x\in\omega,$$

$$\vec{z}(0) = 0, \quad \vec{z}(1) = \vec{0}, \tag{38}$$

де

$$\vec{\psi}(x) = \Big((A(x) - \tilde{A}(x))\vec{y}_{\bar{x}}\Big)_x - (D(x) - \tilde{D}(x))\vec{y} + \vec{\varphi}(x) - \tilde{\vec{\varphi}}(x).$$

Теорема 2 (про коефіцієнтну стійкість). *Нехай виконуються умови* (7), (9), (19) *і* (29). *Тоді ТТРС* (20) *є коефіцієнтно стійкою і для неї справджуються оцінки*

$$\max_{x\in\omega}\|\vec{z}(x)\| \leq M_1\Bigg\{\max_{\xi\in\omega^+}\|\vec{y}_{\bar{\xi}}(\xi)\|\sum_{\xi\in\omega^+} h\|A(\xi) - \tilde{A}(\xi)\| +$$

$$+\max_{\eta\in\omega}\|\vec{y}(\eta)\|\sum_{\xi\in\omega^+} h\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta) - \tilde{D}(\eta)\| + \sum_{\xi\in\omega^+} h\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta) - \tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\|\Bigg\}, \tag{39}$$

$$\max_{x\in\omega^+}\|\vec{z}_{\bar{x}}(x)\| \leq 3M_1\Bigg\{\max_{\xi\in\omega^+}\|\vec{y}_{\bar{\xi}}(\xi)\|\max_{\xi\in\omega^+}\|A(\xi) - \tilde{A}(\xi)\| +$$

$$+\max_{\eta\in\omega}\|\vec{y}(\eta)\|\max_{\xi\in\omega^+}\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta) - \tilde{D}(\eta)\| + \max_{\xi\in\omega^+}\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta) - \tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\|\Bigg\}, \tag{40}$$

де M_1 — *додатна стала, визначена в лемі* 7.

Доведення. З огляду на лему 5 розв’язок задачі (38) можна подати у вигляді

$$\vec{z}(x) = \sum_{\xi\in\omega} hG(x,\xi)\vec{\psi}(\xi) = \sum_{\xi\in\omega} hG(x,\xi)\Big[\Big(A(\xi)-\tilde{A}(\xi)\Big)\vec{y}_{\bar{\xi}}(\xi)\Big]_{\xi} -$$

$$-\sum_{\xi\in\omega} hG(x,\xi)\left[\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\Big(D(\eta)-\tilde{D}(\eta)\Big)\vec{y}(\eta)\right]_{\xi} -$$

$$-\sum_{\xi\in\omega} hG(x,\xi)\left[\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\Big(\vec{\varphi}(\eta)-\tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\Big)\right]_{\xi}, \quad x\in\omega.$$

Підсумовуючи тут частинами, одержуємо

$$\vec{z}(x) = -\sum_{\xi\in\omega^+} hG_{\bar{\xi}}(x,\xi)\Big[\Big(A(\xi)-\tilde{A}(\xi)\Big)\vec{y}_{\bar{\xi}}(\xi)\Big] +$$

$$+\sum_{\xi\in\omega^+} hG_{\bar{\xi}}(x,\xi)\left[\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\Big(D(\eta)-\tilde{D}(\eta)\Big)\vec{y}(\eta)\right] +$$

$$+\sum_{\xi\in\omega^+} hG_{\bar{\xi}}(x,\xi)\left[\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\Big(\vec{\varphi}(\eta)-\tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\Big)\right], \quad x\in\omega. \tag{41}$$

Звідси випливає нерівність

$$\|\vec{z}(x)\| \le \max_{\xi\in\omega^+}\|G_{\bar{\xi}}(x,\xi)\|\Bigg\{\max_{\xi\in\omega^+}\|\vec{y}_{\bar{\xi}}(\xi)\|\sum_{\xi\in\omega^+} h\|A(\xi)-\tilde{A}(\xi)\| +$$

$$+\max_{\eta\in\omega}\|\vec{y}(\eta)\|\sum_{\xi\in\omega^+} h\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta)-\tilde{D}(\eta)\| + \sum_{\xi\in\omega^+} h\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta)-\tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\|\Bigg\}, \quad x\in\omega,$$

яка на підставі леми 7 дає оцінку (39).

Для встановлення оцінки (40) скористаємося формулою (41). Знайдемо

$$\vec{z}_{\bar{x}}(x) = -\sum_{\xi\in\omega^+} hG_{\bar{\xi}\bar{x}}(x,\xi)\Big[\Big(A(\xi)-\tilde{A}(\xi)\Big)\vec{y}_{\bar{\xi}}(\xi)\Big] +$$

$$+\sum_{\xi\in\omega^+} hG_{\bar{\xi}\bar{x}}(x,\xi)\left[\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\Big(D(\eta)-\tilde{D}(\eta)\Big)\vec{y}(\eta)\right] +$$

$$+\sum_{\xi\in\omega^+} hG_{\bar{\xi}\bar{x}}(x,\xi)\left[\sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\Big(\vec{\varphi}(\eta)-\tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\Big)\right], \quad x\in\omega.$$

Тоді

$$\|\vec{z}_{\bar{x}}(x)\| \leq \sum_{\xi\in\omega^+} h\|G_{\bar{\xi}\bar{x}}(x,\xi)\| \left\{ \max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{y}_{\bar{\xi}}(\xi)\| \max_{\xi\in\omega^+} \|A(\xi) - \tilde{A}(\xi)\| + \right.$$

$$\left. + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{y}(\eta)\| \max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta) - \tilde{D}(\eta)\| + \max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta) - \tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\| \right\}, \quad x \in \omega^+,$$

звідки за лемою 7 одержуємо нерівність (40).

Теорему 2 доведено.

Наслідком теореми 2 є такий результат.

Теорема 3 (про точність). *Нехай виконуються припущення теореми* 2 *і коефіцієнти ТТРС* (20) *та збуреної схеми* (37) *задовольняють умови*

$$\max_{\xi\in\omega^+} \|A(\xi) - \tilde{A}(\xi)\| \leq M_2 h^n, \quad \max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta) - \tilde{D}(\eta)\| \leq M_2 h^n,$$

$$\max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta) - \tilde{\vec{\varphi}}(\eta)\| \leq M_2 h^n, \tag{42}$$

$$\max_{\xi\in\omega^+} \|A(\xi)\| \leq M_3, \qquad \max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta))\| \leq M_3, \qquad \max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta)\| \leq M_3, \tag{43}$$

де M_2 *і* M_3 *— деякі додатні сталі, не залежні від* h. *Тоді для похибки* $\vec{z}(x) = \vec{u}(x) - \vec{y}(x)$ *справджується оцінка*

$$\max_{x\in\omega} \|\vec{z}(x)\| + \max_{x\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{x}}(x)\| \leq Mh^n, \tag{44}$$

де $M > 0$ *— не залежна від* h *стала,* $h \in (0; h_0)$, $h_0 > 0$ *— фіксоване число.*

Доведення. Встановимо спочатку оцінки для величин $\max_{x\in\omega} \|\vec{y}(x)\|$ і $\max_{x\in\omega^+} \|\vec{y}_{\bar{x}}(x)\|$ у нерівностях (39), (40). Підставляючи $\vec{u}(x) = \vec{z}(x) + \vec{y}(x)$ в ТТРС (20), отримуємо різницеву задачу

$$\Lambda\vec{y} \equiv (A\vec{y}_{\bar{x}})_x - D\vec{y} = -(A\vec{z}_{\bar{x}})_x + D\vec{z} - \vec{\varphi}(x), \quad x \in \omega,$$

$$\vec{y}(0) = 0, \quad \vec{y}(1) = \vec{0}. \tag{45}$$

За аналогією з доведенням теореми 1, враховуючи умови (43), одержуємо оцінки

$$\max_{x\in\omega} \|\vec{y}(x)\| \leq M_1 \left\{ \max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| \sum_{\xi\in\omega^+} h\|A(\xi)\| + \right.$$

$$\left. + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| \sum_{\xi\in\omega^+} h \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta)\| + \sum_{\xi\in\omega^+} h \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta)\| \right\} \leq$$

$$\leq M_1 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| + 1 \right], \tag{46}$$

$$\max_{x\in\omega^+} \|\vec{y}_{\bar{x}}(x)\| \leq 3M_1 \left\{ \max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| \max_{\xi\in\omega^+} \|A(\xi)\| + \right.$$

$$\left. + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| \max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|D(\eta)\| + \max_{\xi\in\omega^+} \sum_{\eta=0}^{\xi-h} h\|\vec{\varphi}(\eta)\| \right\} \leq$$

$$\leq 3M_1 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| + 1 \right]. \tag{47}$$

З огляду на нерівності (46), (47), враховуючи умову (42), перетворюємо тепер оцінки (39), (40):

$$\max_{x\in\omega} \|\vec{z}(x)\| \leq M_1 \left\{ 3M_1 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| + 1 \right] M_2 h^n + \right.$$

$$\left. + M_1 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| + 1 \right] M_2 h^n + M_2 h^n \right\} =$$

$$= 4M_1^2 M_2 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| \right] h^n + M_1 M_2 (4M_1 M_3 + 1) h^n,$$

$$\max_{x\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{x}}(x)\| \leq 3M_1 \left\{ M_1 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| + 1 \right] M_2 h^n + \right.$$

$$\left. + 3M_1 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| + 1 \right] M_2 h^n + M_2 h^n \right\} =$$

$$= 12M_1^2 M_2 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| \right] h^n + 3M_1 M_2 (4M_1 M_3 + 1) h^n.$$

Додаючи ці нерівності, маємо

$$\max_{x\in\omega} \|\vec{z}(x)\| + \max_{x\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{x}}(x)\| \leq$$

$$\leq 16M_1^2 M_2 M_3 \left[\max_{\xi\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{\xi}}(\xi)\| + \max_{\eta\in\omega} \|\vec{z}(\eta)\| \right] h^n + 4M_1 M_2 (4M_1 M_3 + 1) h^n.$$

Якщо $h \in (0; h_0)$, де $h_0 = \left(32M_1^2 M_2 M_3\right)^{-1/n}$, то

$$\max_{x\in\omega} \|\vec{z}(x)\| + \max_{x\in\omega^+} \|\vec{z}_{\bar{x}}(x)\| \leq 8M_1 M_2 (4M_1 M_3 + 1) h^n.$$

Позначаючи $M = 8M_1 M_2 (4M_1 M_3 + 1)$, одержуємо оцінку (44).

Теорему 3 доведено.

5. Алгоритмічна реалізація ТТРС. Згідно з основною ідеєю, зазначеною у вступі, коефіцієнти A_i, D_i і праву частину $\vec{\varphi}_i$ ТТРС (20) потрібно подати тільки через розв'язки задач Коші. Зауважимо, що це можна зробити без припущення про симетричність шаблонних матричних функцій $V_\alpha^{(i)}(x)$. Для A_i таке зображення є очевидним:

$$A_i = A(x_i) = \left[\frac{1}{h} V_1^{(i)}(x_i)\right]^{-1}. \tag{48}$$

Подамо тепер через розв'язки задач Коші матричний коефіцієнт D_i. Інтегруючи рівняння

$$\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dV_1^{(i)}}{dx}\right) - Q(x)V_1^{(i)}(x) = 0$$

від $x = x_{i-1}$ до $x = x_i$ та враховуючи початкову умову, одержуємо

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} Q(x)V_1^{(i)}(x)dx = \left(P(x)\frac{dV_1^{(i)}}{dx}\right)\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} = P(x_i)\frac{dV_1^{(i)}(x_i)}{dx} - E.$$

Тоді

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)^*}(x)Q(x)dx = \frac{dV_1^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i) - E. \tag{49}$$

Аналогічно знаходимо

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)^*}(x)Q(x)dx = -E - \frac{dV_2^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i). \tag{50}$$

Тоді D_i набирає вигляду

$$D_i = \frac{1}{h}\left[V_1^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\left\{\frac{dV_1^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i) - E\right\} + \frac{1}{h}\left[V_2^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\left\{-\frac{dV_2^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i) - E\right\},$$

тобто

$$D_i = \frac{1}{h}\left[V_1^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\left[M_1^{(i)}(x_i) - E\right] - \frac{1}{h}\left[V_2^{(i)^*}(x_i)\right]^{-1}\left[M_2^{(i)}(x_i) + E\right], \tag{51}$$

де

$$M_\alpha^{(i)}(x) = \frac{dV_\alpha^{(i)^*}(x)}{dx}P(x), \quad \alpha = 1, 2. \tag{52}$$

Розглянемо тепер $\vec{\varphi}_i$. Введемо дві нові допоміжні векторні функції $\vec{w}_1^{(i)}(x)$ і $\vec{w}_2^{(i)}(x)$ як розв'язки задач Коші

$$L^{(P,Q)}\vec{w}_\alpha^{(i)}(x) = -\vec{f}(x), \quad x_{i-1} < x < x_{i+1}, \quad \alpha = 1, 2, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{53}$$

$$\vec{w}_1^{(i)}(x_{i-1}) = \frac{d\vec{w}_1^{(i)}}{dx}(x_{i-1}) = 0, \tag{54}$$

$$\vec{w}_2^{(i)}(x_{i+1}) = \frac{d\vec{w}_2^{(i)}}{dx}(x_{i+1}) = 0. \tag{55}$$

Виконуючи нескладні перетворення, знаходимо

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} V_1^{(i)^*}(x)\vec{f}(x)dx = \frac{dV_1^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i)\vec{w}_1^{(i)}(x_i) - V_1^{(i)^*}(x_i)P(x_i)\frac{d\vec{w}_1^{(i)}(x_i)}{dx},$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} V_2^{(i)^*}(x)\vec{f}(x)dx = -\frac{dV_2^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i)\vec{w}_2^{(i)}(x_i) + V_2^{(i)^*}(x_i)P(x_i)\frac{d\vec{w}_2^{(i)}(x_i)}{dx}.$$

Тоді $\vec{\varphi}_i$ набирає вигляду

$$\vec{\varphi}_i = \frac{1}{h}\Big[V_1^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}\frac{dV_1^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i)\vec{w}_1^{(i)}(x_i) - \frac{1}{h}P(x_i)\frac{d\vec{w}_1^{(i)}(x_i)}{dx} -$$
$$- \frac{1}{h}\Big[V_2^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}\frac{dV_2^{(i)^*}(x_i)}{dx}P(x_i)\vec{w}_2^{(i)}(x_i) + \frac{1}{h}P(x_i)\frac{d\vec{w}_2^{(i)}(x_i)}{dx}.$$

Вводячи тут позначення $\vec{l}_\alpha^{(i)}(x) = P(x)\dfrac{d\vec{w}_\alpha^{(i)}(x)}{dx}$, $\alpha = 1, 2$, одержуємо

$$\vec{\varphi}_i = \frac{1}{h}\Big[V_1^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}M_1^{(i)}(x_i)\vec{w}_1^{(i)}(x_i) - \frac{1}{h}\vec{l}_\alpha^{(i)}(x_i) -$$
$$- \frac{1}{h}\Big[V_2^{(i)^*}(x_i)\Big]^{-1}M_2^{(i)}(x_i)\vec{w}_2^{(i)}(x_i) + \frac{1}{h}\vec{l}_\alpha^{(i)}(x_i). \tag{56}$$

Зазначимо, що у скалярному випадку формули (48), (51), (56) перетворюються на аналогічні формули, виведені в роботі [8].

Таким чином, із формул (48), (51), (56) випливає, що для визначення коефіцієнтів A_i, D_i і правої частини $\vec{\varphi}_i$ ТТРС (20) в кожному вузлі $x_i \in \omega$ потрібно розв'язати чотири задачі Коші: задачу (3), (4) і задачу (53), (54) на проміжку $[x_{i-1}; x_i]$ (вперед) та задачу (3), (5) і задачу (53), (55) на проміжку $[x_i; x_{i+1}]$ (назад). Для наближеного розв'язування кожної з них можна застосувати будь-який однокроковий метод (метод розкладу за формулою Тейлора, метод Рунге – Кутти тощо).

Для спрощення викладу застосуємо метод розкладу за формулою Тейлора (див. також [8], леми 4 і 5). Одержані наближення матричних функцій $V_\alpha^{(i)}(x)$, $M_\alpha^{(i)}(x)$ та векторних функцій $\vec{w}_\alpha^{(i)}(x)$, $\vec{l}_\alpha^{(i)}(x)$ позначатимемо за допомогою верхнього індексу, наприклад:

$$\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{d^k V_\alpha^{(i)}(x_{i+(-1)^\alpha})}{dx^k}(x - x_{i+(-1)^\alpha})^k, \quad \alpha = 1, 2.$$

Лема 8. *Нехай матриці* $P(x)$ *і* $Q(x)$ *задовольняють умови* (7) *і* (9), *елементи матриці* $P(x)$ *належать класу* $C^{n+1}[0;1]$, *елементи матриці* $Q(x)$ *і компоненти вектора* $\vec{f}(x)$ — *класу* $C^n[0;1]$. *Тоді справджуються співвідношення*

$$V_\alpha^{(i)}(x_i) = \overset{(n)}{V}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \overset{(n)}{R}{}_\alpha^{(i)}, \quad \textit{де} \quad \left\| \overset{(n)}{R}_\alpha \right\| = O(h^{n+1}), \tag{57}$$

$$M_\alpha^{(i)}(x_i) = \overset{(n+1)}{M}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \overset{(n+1)}{S}{}_\alpha^{(i)}, \quad \textit{де} \quad \left\| \overset{(n+1)}{S}{}_\alpha^{(i)} \right\| = O(h^{n+2}), \tag{58}$$

$$\vec{w}_\alpha^{(i)}(x_i) = \overset{(n+1)}{\vec{w}}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \overset{(n+1)}{\vec{b}}{}_\alpha^{(i)}, \quad \textit{де} \quad \left\| \overset{(n+1)}{\vec{b}}{}_\alpha^{(i)} \right\| = O(h^{n+2}), \tag{59}$$

$$\vec{l}_\alpha^{(i)}(x_i) = \overset{(n)}{\vec{l}}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \overset{(n)}{\vec{g}}{}_\alpha^{(i)}, \quad \textit{де} \quad \left\| \overset{(n)}{\vec{g}}{}_\alpha^{(i)} \right\| = O(h^{n+1}), \tag{60}$$

$$\alpha = 1, 2, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Доведення. З умов леми випливає, що елементи матричної функції $V_\alpha^{(i)}(x)$ і компоненти векторної функції $\vec{w}_\alpha(x)$ належать класу $C^{n+2}[0;1]$, а компоненти матричної функції $M_\alpha^{(i)}(x)$ і векторної функції $\vec{l}_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2,$ — класу $C^{n+1}[0;1]$. Тоді формули (57), (59) і (60) випливають із розкладів за формулою Тейлора в точках $x_{i+(-1)^\alpha}$ із залишковим членом в інтегральній формі.

Доведемо формулу (58). З урахуванням (52) і формули Лейбніца для похідної добутку матриць маємо

$$M_\alpha^{(i)}(x_i) = \overset{(n)}{M}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \frac{\left((-1)^{\alpha+1}h\right)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^{n+1} M_\alpha^{(i)}(\tilde{x}_\alpha)}{dx^{n+1}} =$$

$$= \overset{(n)}{M}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \frac{\Big((-1)^{\alpha+1}h\Big)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dx^n} \Big(V_\alpha^{(i)*}(x) Q(x) \Big)(\tilde{x}_\alpha) =$$

$$= \overset{(n)}{M}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \frac{\Big((-1)^{\alpha+1}h\Big)^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ V_\alpha^{(i)*}(\tilde{x}_\alpha) Q^{(n)}(\tilde{x}_\alpha) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{d^k V_\alpha^{(i)*}(\tilde{x}_\alpha)}{dx^k} Q^{(n-k)}(\tilde{x}_\alpha) \right\},$$

де $\tilde{x}_\alpha \in (x_{i-2+\alpha}; x_{i-1+\alpha})$, $\alpha = 1, 2$. Перетворюючи вираз у фігурних дужках до вигляду

$$V_\alpha^{(i)*}(\tilde{x}_\alpha) Q^{(n)}(\tilde{x}_\alpha) = \int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha} \frac{d V_\alpha^{(i)*}(t)}{dt} dt \, Q^{(n)}(\tilde{x}_\alpha),$$

$$\frac{d^k V_\alpha^{(i)*}(\tilde{x}_\alpha)}{dx^k} = \frac{d^k V_\alpha^{(i)*}(x_{i+(-1)^\alpha})}{dx^k} + \int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha} \frac{d^{k+1} V_\alpha^{(i)*}(t)}{dt^{k+1}} dt,$$

$$Q^{(n-k)}(\tilde{x}_\alpha) = Q^{(n-k)}(x_{i+(-1)^\alpha}) + \int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha} Q^{(n-k+1)}(t) dt,$$

одержуємо зображення

$$M_\alpha^{(i)}(x_i) = \overset{(n)}{M}{}_\alpha^{(i)}(x_i) + \frac{\Big((-1)^{\alpha+1}h\Big)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{d^k V_\alpha^{(i)*}(x_{i+(-1)^\alpha})}{dx^k} Q^{(n-k)}(x_{i+(-1)^\alpha}) +$$

$$+\frac{\Big((-1)^{\alpha+1}h\Big)^{n+1}}{(n+1)!}\left\{\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\frac{dV_\alpha^{(i)^*}(t)}{dt}dt\,Q^{(n)}(\tilde{x}_\alpha)+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{d^kV_\alpha^{(i)^*}(x_{i+(-1)^\alpha})}{dx^k}\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}Q^{(n-k+1)}(t)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\frac{d^{k+1}V_\alpha^{(i)^*}(t)}{dt^{k+1}}dtQ^{(n-k)}(x_{i+(-1)^\alpha})+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\frac{d^{k+1}V_\alpha^{(i)^*}(t)}{dt^{k+1}}dt\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}Q^{(n-k+1)}(t)dt\right\}=$$

$$=\overset{(n)}{M}{}_\alpha^{(i)}(x_i)+\frac{((-1)^{\alpha+1}h)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}M_\alpha^{(i)}(x_{i+(-1)^\alpha})}{dx^{n+1}}+\overset{(n+1)}{S}{}_\alpha^{(i)}=$$

$$=\overset{(n+1)}{M}{}_\alpha^{(i)}(x_i)+\overset{(n+1)}{S}{}_\alpha^{(i)},$$

де для залишкового члена $\overset{(n+1)}{S}{}_\alpha^{(i)}$ справджується оцінка

$$\left\|\overset{(n+1)}{S}{}_\alpha^{(i)}\right\|\le\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\{\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\left\|\frac{dV_\alpha^{(i)^*}(t)}{dt}\right\|dt\,\left\|Q^{(n)}(\tilde{x}_\alpha)\right\|+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left\|\frac{d^kV_\alpha^{(i)^*}(x_{i+(-1)^\alpha})}{dx^k}\right\|\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\left\|Q^{(n-k+1)}(t)\right\|dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left\|\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\frac{d^{k+1}V_\alpha^{(i)^*}(t)}{dt^{k+1}}dt\right\|\left\|Q^{(n-k)}(x_{i+(-1)^\alpha})\right\|+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\left\|\frac{d^{k+1}V_\alpha^{(i)^*}(t)}{dt^{k+1}}\right\|dt\int\limits_{x_{i+(-1)^\alpha}}^{\tilde{x}_\alpha}\left\|Q^{(n-k+1)}(t)\right\|dt\right\}=O(h^{n+2}).$$

Це доводить формулу (58), а з нею і лему.

Лема 9. *Нехай виконуються умови* (7), (9), (19), (29) *і*

$$\overset{(n)}{A}(x_i)=\left[\frac{1}{h}\overset{(n)}{V}{}_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^{-1},\tag{61}$$

$$\overset{(n)}{D}(x_i) = \frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i)\right]^{-1}\left[\overset{(n+1)}{M_\alpha}{}^{(i)}(x_i) + (-1)^\alpha E\right], \tag{62}$$

$$\overset{(n)}{\vec{\varphi}_i}(x_i) = \frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left\{\left[\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i)\right]^{-1}\overset{(n+1)}{M_\alpha}{}^{(i)}(x_i)\,\overset{(n+1)}{\vec{w}_\alpha}{}^{(i)}(x_i) - \overset{(n)}{\vec{l}_\alpha^{(i)}}\right\}, \tag{63}$$

$$\alpha = 1, 2, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Тоді справджуються співвідношення

$$\left\|\overset{(n)}{A}(x_i) - A(x_i)\right\| = O(h^n), \tag{64}$$

$$\left\|\overset{(n)}{D}(x_i) - D(x_i)\right\| = O(h^n), \tag{65}$$

$$\left\|\overset{(n)}{\vec{\varphi}_i}(x_i) - \vec{\varphi}_i(x_i)\right\| = O(h^n), \tag{66}$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Доведення. Рівність (64) випливає з формул (21), (61), (57) і оцінки [16, с. 157]

$$\left\|\overset{(n)}{A}(x_i) - A(x_i)\right\| = \left\|\left[\frac{1}{h}\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i)\right]^{-1} - \left[\frac{1}{h}V_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^{-1}\right\| \le$$

$$\le \frac{\left\|\frac{1}{h}\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i) - \frac{1}{h}V_\alpha^{(i)}(x_i)\right\|\left\|\left[\frac{1}{h}V_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^{-1}\right\|^2}{1 - \left\|\frac{1}{h}\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i) - \frac{1}{h}V_\alpha^{(i)}(x_i)\right\|\left\|\left[\frac{1}{h}V_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^{-1}\right\|} = \frac{O(h^n)O(1)}{1 - O(h^n)O(1)} = O(h^n).$$

Рівність (65) виводимо з формул (51), (62), (58), (64) і зображення

$$\overset{(n)}{D}(x_i) - D_i = \frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i)\right]^{-1}\left[\overset{(n+1)}{M_\alpha^{(i)}}(x_i) + (-1)^\alpha E\right] -$$

$$-\frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[V_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^{-1}\left[M_\alpha^{(i)}(x_i) + (-1)^\alpha E\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left\{\left[\frac{1}{h}V_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^{-1}\left[\overset{(n+1)}{M_\alpha^{(i)}}(x_i) - M_\alpha^{(i)}(x_i)\right] +\right.$$

$$\left. + \left(\left[\frac{1}{h}\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i)\right]^{-1} - \left[\frac{1}{h}V_\alpha^{(i)}(x_i)\right]^{-1}\right)\left[\overset{(n+1)}{M_\alpha^{(i)}}(x_i) + (-1)^\alpha E\right]\right\},$$

звідки

$$\left\| \overset{(n)}{D}(x_i) - D_i \right\| \le \frac{1}{h^2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \left\| \left[\frac{1}{h} V_\alpha^{(i)}(x_i) \right]^{-1} \right\| \left\| \overset{(n+1)}{M_\alpha^{(i)}}(x_i) - M_\alpha^{(i)}(x_i) \right\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \left[\frac{1}{h} \overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i) \right]^{-1} - \left[\frac{1}{h} V_\alpha^{(i)}(x_i) \right]^{-1} \right\| \left\| \overset{(n+1)}{M_\alpha^{(i)}}(x_i) + (-1)^\alpha E \right\| \right\} =$$

$$= \frac{1}{h^2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left[O(1) O(h^{n+2}) + O(h^n) O(h^2) \right] = O(h^n).$$

Аналогічно з формул (56), (63), (58) – (60) і (64) одержуємо співвідношення (66).

Наслідком доведених тверджень є такий результат.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови леми* 9. *Тоді при достатньо малих h для похибки $\vec{z}(x) = \vec{u}(x) - \vec{y}(x),\ x \in \bar{\omega}$, схеми* (37) *з коефіцієнтами і правою частиною*

$$\tilde{A}(x_i) = \overset{(n)}{A}(x_i), \qquad \tilde{D}(x_i) = \overset{(n)}{D}(x_i), \qquad \tilde{\vec{\varphi}}(x_i) = \overset{(n)}{\vec{\varphi}_i}(x_i),$$

визначеними в (61) – (63), *справджується оцінка* (44).

Доведення безпосередньо випливає з леми 9 і теореми 3.

Зауваження. Використовуючи методику [17], можна показати, що у випадку парного n точність різницевої схеми (37) з коефіцієнтом

$$\overset{(n)}{D}(x_i) = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha+1} \left[\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i) \right]^{-1} \left[\overset{(n)}{M_\alpha^{(i)}}(x_i) + (-1)^\alpha E \right]$$

замість (62) і правою частиною

$$\overset{(n)}{\vec{\varphi}_i}(x_i) = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{2} (-1)^{\alpha+1} \left\{ \left[\overset{(n)}{V_\alpha^{(i)}}(x_i) \right]^{-1} \overset{(n)}{M_\alpha^{(i)}}(x_i) \overset{(n)}{\vec{w}_\alpha^{(i)}}(x_i) - \overset{(n)}{\vec{l}_\alpha^{(i)}} \right\}$$

замість (63) також є величиною $O(h^n)$.

Література

1. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, Москва (1989).
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, Докл. АН СССР, **122**, № 4, 562 – 565 (1958).
3. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **1**, № 1, 5 – 63 (1961).
4. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Об однородных разностных схемах*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **3**, № 1, 425 – 430 (1961).
5. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высш. шк., Москва (1989).
6. В. Л. Макаров, И. Л. Макаров, В. Г. Приказчиков, *Точные разностные схемы и схемы любого порядка точности для систем дифференциальных уравнений второго порядка*, Дифференц. уравнения, **15**, № 7, 1194 – 1205 (1979).

7. А. А. Самарский, В. Л. Макаров, *О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами*, Докл. АН СССР, **312**, № 3, 538 – 543 (1990).
8. А. А. Самарский, В. Л. Макаров, *О реализации точных трехточечных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами*, Дифференц. уравнения, **26**, № 7, 1254 – 1265 (1990).
9. А. А. Самарский, В. Л. Макаров, *Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация*, Докл. АН СССР, **312**, № 4, 795 – 800 (1990).
10. I. P. Gavrilyuk, M. Hermann, V. L. Makarov, M. Kutniv, *Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs*, Internat. Ser. Numer. Math., **159**, Birkhäuser, Basel (2011).
11. *Exact finite-difference schemes*, S. Lemeshevsky, P. Matus, D. Poliakov (Eds.), De Gruyter (2016).
12. I. Gavrilyuk, M. Kutniv, V. Makarov, *Exact and truncated difference schemes for boundary value problem*, Exact finite-difference schemes, De Gruyter (2016), p. 165 – 203.
13. R. E. Mickens, T. M. Washington, *Use of exact difference schemes to construct NSFD discretizations of differential equations*, Exact Finite-Difference Schemes, De Gruyter (2016), p. 144 – 164.
14. М. В. Кутнів, М. Круль, *Нова алгоритмічна реалізація точних триточкових різницевих схем для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку*, Укр. мат. журн., **74**, № 2, 204 – 219 (2022).
15. E. F. Beckenbach, R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin (1961).
16. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, Наука, Москва (1965).
17. М. В. Кутнив, В. Л. Макаров, А. А. Самарский, *Точные трехточечные разностные схемы для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка и их реализация*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **39**, № 1, 45 – 60 (1999).

Одержано 09.11.22