

Руслан Салімов (Інститут математики НАН України, Київ),
Людмила Вигівська² (Інститут математики НАН України, Київ,
 Вроцлавський університет науки та технологій, Польща),
Богдан Кліщук¹ (Інститут математики НАН України, Київ)

ПРО СПОТВОРЕННЯ ТРАНСФІНІТНОГО ДІАМЕТРА ОБРАЗУ КРУГА

We investigate the so-called ring Q -homeomorphisms with respect to the p -modulus for $p > 2$ on a complex plane. In particular, we establish a lower bound for the distortion of the transfinite diameter of disk image. Moreover, we solve the problem of minimization of the functional of distortion of the transfinite diameter of a disk in a certain class of ring Q -homeomorphisms with respect to the p -modulus.

Досліджуються кільцеві Q -гомеоморфізми щодо p -модуля при $p > 2$ на комплексній площині. Отримано нижню оцінку спотворення трансфінитного діаметра образу круга. Розв'язано задачу про мінімізацію функціонала спотворення трансфінитного діаметра круга на деякому класі кільцевих Q -гомеоморфізмів щодо p -модуля.

1. Вступ. Нагадаємо деякі означення. Нехай задано сім'ю Γ кривих γ в комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho: \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ називають допустимою для Γ (пишуть $\rho \in \text{adm } \Gamma$), якщо

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1$$

для кожної кривої $\gamma \in \Gamma$.

Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді p -модулем сім'ї Γ називається величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{C}} \rho^p(z) dx dy.$$

Для довільних множин E , F і G в $\mathbb{C}$ через $\Delta(E, F, G)$ позначимо сім'ю всіх кривих $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, які з'єднують E і F в G , тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Нехай D — область в комплексній площині $\mathbb{C}$. Покладемо

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}: r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(z_0, r_i) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Нехай $Q: D \rightarrow [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ є кільцевим Q -гомеоморфізмом щодо p -модуля в точці $z_0 \in D$, якщо співвідношення

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \int_{\mathbb{A}} Q(z) \eta^p(|z - z_0|) dx dy$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, і для кожної вимірної функції $\eta: (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такої, що

¹ Відповідальний за листування, e-mail: kban1988@gmail.com.ua.

² Дослідження Л. Вигівської частково підтримано грантом NCN (№ 2017/27/B/ST1/01339).

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr = 1.$$

Теорію Q -гомеоморфізмів в $\mathbb{R}^n$ при $p = n$ досліджували в роботах [1–5], при $1 < p < n$ — у [6–13] і при $p > n$ — у [14–18]. Більш загальні класи відображень досліджували в [19–27] (див. також [28]).

Далі будемо вважати, що

$$q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$$

— середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Нижче наведено критерій належності гомеоморфізмів класу кільцевих Q -гомеоморфізмів щодо p -модуля при $p > 1$ на комплексній площині (див. теорему 2.3 в [11] при $n = 2$).

Твердження 1. Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ — вимірний за Лебегом функція, яка задовольняє умову $q_{z_0}(r) \neq \infty$ для майже всіх $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Гомеоморфізм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ є кільцевим Q -гомеоморфізмом щодо p -модуля при $p > 1$ в точці $z_0 \in D$ тоді й лише тоді, коли для довільних r_1, r_2 таких, що $0 < r_1 < r_2 < d_0$, виконується умова

$$M_p(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \frac{2\pi}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)} \right)^{p-1}},$$

де $S_1 = S(z_0, r_1)$, $S_2 = S(z_0, r_2)$ і $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Позначимо через $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ круг із центром у точці $z_0 \in \mathbb{C}$ радіуса $r > 0$.

Нижче наведемо деякі допоміжні відомості про p -ємність конденсатора. Згідно з результатами роботи [29], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, де $A \subset \mathbb{C}$ — відкрита множина і C — непорожня компактна множина, яка міститься в A , називають конденсатором. Конденсатор $\mathcal{E}$ називається кільцевим конденсатором, якщо $\mathfrak{R} = A \setminus C$ — кільцева область, тобто якщо $\mathfrak{R}$ — область, доповнення якої $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathfrak{R}$ складається в точності з двох компонент. Конденсатор $\mathcal{E}$ називається обмеженим конденсатором, якщо множина A обмежена. Кажуть, що конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежить в області D , якщо $A \subset D$. Очевидно, що якщо $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ — неперервне, відкрите відображення і $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D , то (fA, fC) також конденсатор в fD . Далі позначатимемо $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Нехай $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Позначимо через $\mathcal{C}_0(A)$ множину неперервних функцій $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ з компактним носієм. $\mathcal{W}_0(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_0(A, C)$ — сім'я невід'ємних функцій $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, що: 1) $u \in \mathcal{C}_0(A)$, 2) $u(x, y) \geq 1$ для $(x, y) \in C$ і 3) u належить класу ACL. При $p \geq 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in \mathcal{W}_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^p dx dy,$$

де

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

називають p -ємністю конденсатора $\mathcal{E}$.

Відомо, що при $p > 1$

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)) \quad (1)$$

(див. теорему 1 в [30]).

Твердження 2. При $p > 2$ справедливою є оцінка

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) \geq 2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left(|A|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} - |C|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right)^{1-p} \quad (2)$$

(див., наприклад, [31], нерівність (8.7)).

Нехай E — обмежена замкнена множина у комплексній площині $\mathbb{C}$. Величина

$$d_n(E) = \max_{z_i, z_j \in E} \left\{ \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^{\frac{2}{n(n-1)}} \right\}$$

називається n -м діаметром множини E . Зокрема, $d_2(E) = \operatorname{diam} E$ — евклідов діаметр множини E .

Зауважимо, що послідовність величин $d_n(E)$ є незростаючою, $d_{n+1}(E) \leq d_n(E)$, $n = 2, 3, \dots$. Тоді границя $d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n(E)$ називається трансфінітним діаметром множини E . Якщо E — скінченна множина, то покладають $d(E) = 0$. Відомо, що величина $d(E)$ збігається зі сталою Чебишова для множини E та з логарифмічною ємністю цієї множини (див., наприклад, [32, с. 285–305; 33, с. 209–217]).

Нагадаємо відомі властивості трансфінітного діаметра.

1. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $d(E_1) \leq d(E_2)$.
2. Трансфінітний діаметр круга $\overline{B}(z_0, r)$ дорівнює радіусу r , а трансфінітний діаметр сегмента $E = [a, b]$ дорівнює $\frac{b-a}{4}$.
3. За теоремою Пойа (див. [34]) для довільної компактної множини $E \subset \mathbb{C}$ має місце оцінка

$$|E| \leq \pi d^2(E), \quad (3)$$

де $|E|$ — міра Лебега множини E .

Зауважимо, що у роботах [35–37] трансфінітний діаметр застосовується до розв’язання екстремальної задачі про добуток внутрішніх радіусів n взаємно неперетинних областей для довільного натурального $n \geq 2$ та її узагальнень.

2. Оцінки для спотворення трансфінитного діаметра образу круга. Справедливою є така лема.

Лема 1. Нехай D і D' — обмежені області в $\mathbb{C}$ і $f: D \rightarrow D'$ — кільцевий Q -гомеоморфізм щодо p -модуля в точці $z_0 \in D$ при $p > 2$. Тоді для всіх $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, має місце оцінка

$$d\left(\overline{fB(z_0, r)}\right) \geq \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} \left(\int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{\frac{p-1}{p-2}}, \quad (4)$$

де $\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z)|dz|$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Доведення. Нехай $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор, де $A = \{z \in D : |z - z_0| < r\}$, $C = \{z \in D : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon < r < d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тоді $f\mathcal{E} = (fA, fC)$ — кільцевий конденсатор в D' і згідно з (1) маємо рівність

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial fA, \partial fC; f(A \setminus C))). \quad (5)$$

Згідно з нерівністю (2) отримуємо

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} \geq 2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left(|fA|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} - |fC|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right)^{1-p}. \quad (6)$$

З іншого боку, на підставі твердження 1 та рівності (5) маємо

$$\text{cap}_p f\mathcal{E} \leq \frac{2\pi}{\left(\int_\varepsilon^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}, \quad (7)$$

де $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z)|dz|$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, r)$.

Комбінуючи нерівності (6) і (7), одержуємо

$$2\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left(|fA|^{\frac{p-2}{2(p-1)}} - |fC|^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right)^{1-p} \leq \frac{2\pi}{\left(\int_\varepsilon^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Із останньої оцінки випливає нерівність

$$\pi^{\frac{p}{2}} \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} |fA|^{\frac{2-p}{2}} \leq \frac{\pi}{\left(\int_\varepsilon^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ та виконуючи елементарні перетворення, приходимо до оцінки

$$|f\overline{B(z_0, r)}| \geq |fA| \geq \pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}.$$

Застосовуючи нерівність Пойа (3), отримуємо

$$\pi d^2 \left(f\overline{B(z_0, r)} \right) \geq |f\overline{B(z_0, r)}| \geq \pi \left(\frac{p-2}{p-1} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}} \left(\int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)} \right)^{\frac{2(p-1)}{p-2}}.$$

Звідси випливає нерівність (4).

Лему 1 доведено.

Теорема 1. Нехай D і D' — обмежені області в $\mathbb{C}$ і $f: D \rightarrow D'$ — кільцевий Q -гомеоморфізм щодо p -модуля в точці $z_0 \in D$ при $p > 2$. Припустимо, що функція Q задовольняє умову

$$q_{z_0}(t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{S(z_0, t)} Q(z) |dz| \leq \kappa t^{-\alpha}, \quad \kappa > 0, \quad \alpha \geq 0,$$

для майже всіх $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$. Тоді для всіх $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, має місце оцінка

$$d \left(f\overline{B(z_0, r)} \right) \geq \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p+\alpha-2} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r^{\frac{p+\alpha-2}{p-2}},$$

де $\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$, $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{S(z_0, r)} Q(z) |dz|$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

3. Про мінімізацію трансфінитного діаметра. Зафіксуємо деякі числа $z_0 \in D$, $p > 2$, $\kappa = \kappa(z_0) > 0$, $\alpha \geq 0$. Нехай $\mathcal{D} = \mathcal{D}(z_0, p, \kappa, \alpha)$ — множина всіх кільцевих Q -гомеоморфізмів $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ щодо p -модуля в точці $z_0 \in D$ з умовою

$$q(t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{S(z_0, t)} Q(z) |dz| \leq \kappa t^{-\alpha} \quad (8)$$

для майже всіх $t \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$.

Розглянемо на класі $\mathcal{D}$ функціонал спотворення трансфінитного діаметра круга

$$\mathbf{d}_r(f) = d \left(f\overline{B(z_0, r)} \right),$$

де $\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.

Доведемо теорему про мінімізацію функціонала $\mathbf{d}_r(f)$.

Теорема 2. Для всіх $r \in [0, d_0]$ справедливою є рівність

$$\min_{f \in \mathcal{D}} \mathbf{d}_r(f) = \kappa^{-\frac{1}{p-1}} \left(\frac{p-2}{p+\alpha-2} \right)^{\frac{p-1}{p-2}} r^{\frac{p+\alpha-2}{p-2}}.$$

Доведення. Справді, використовуючи лему 1 та умову (8), отримуємо оцінку

$$d\left(f\overline{B(z_0, r)}\right) \geq \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p+\alpha-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} r^{\frac{p+\alpha-2}{p-2}}.$$

Тоді для функціонала $\mathbf{d}_r(f)$ виконується нерівність

$$\mathbf{d}_r(f) \geq \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \left(\frac{p-2}{p+\alpha-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} r^{\frac{p+\alpha-2}{p-2}}.$$

Побудуємо гомеоморфізм $f_0 \in \mathcal{D}$, на якому реалізується мінімум функціонала $\mathbf{d}_r(f)$. Нехай

$$f_0(z) = \begin{cases} \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} |z-z_0|^{\frac{\alpha+p-2}{p-2}} \frac{z-z_0}{|z-z_0|}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$$

Легко бачити, що при відображенні f_0 круг $\overline{B(z_0, r)}$ перетворюється в круг $\overline{B(0, \tilde{r}(r))}$, де

$$\tilde{r}(r) = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} r^{\frac{\alpha+p-2}{p-2}}.$$

Відомо, що трансфінитний діаметр круга дорівнює радіусу круга

$$d\left(f_0\overline{B(z_0, r)}\right) = d\left(\overline{B(0, \tilde{r}(r))}\right) = \tilde{r}(r).$$

Тому справджується рівність

$$\mathbf{d}_r(f_0) = d\left(f_0\overline{B(z_0, r)}\right) = d\left(\overline{B(0, \tilde{r}(r))}\right) = \tilde{r}(r) = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} r^{\frac{p+\alpha-2}{p-2}}.$$

Покажемо, що відображення f_0 є кільцевим Q -гомеоморфізмом щодо p -модуля при $p > 2$ з функцією $Q(z) = \kappa |z - z_0|^{-\alpha}$ в точці z_0 . Очевидно, що $q_{z_0}(t) = \kappa t^{-\alpha}$. Розглянемо кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$. Зауважимо, що відображення f_0 перетворює кільце $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$ в кільце $\mathbb{A}(0, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, де

$$\tilde{r}_i = \kappa^{\frac{1}{2-p}} \left(\frac{p-2}{\alpha+p-2}\right)^{\frac{p-1}{p-2}} r_i^{\frac{\alpha+p-2}{p-2}}, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Позначимо через Γ сім'ю всіх кривих, які з'єднують кола $S(z_0, r_1)$ і $S(z_0, r_2)$ в кільці $\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$. Тоді p -модуль сім'ї кривих $f_0\Gamma$ обчислюється за формулою

$$M_p(f_0\Gamma) = 2\pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left((\tilde{r}_2)^{\frac{p-2}{p-1}} - (\tilde{r}_1)^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Підставляючи в попередню рівність значення $\tilde{r}_1$ і $\tilde{r}_2$, визначені у формулі (9), отримуємо

$$M_p(f_0\Gamma) = 2\pi \left(\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1} \left((r_2)^{\frac{p-2}{p-1}} - (r_1)^{\frac{p-2}{p-1}}\right)^{1-p} =$$

$$= 2\pi\kappa\left(\frac{\alpha+p-2}{p-1}\right)^{p-1}\left(r_2^{\frac{\alpha+p-2}{p-1}} - r_1^{\frac{\alpha+p-2}{p-1}}\right)^{1-p}.$$

Зауважимо, що останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$M_p(f_0\Gamma) = \frac{2\pi}{\left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{1}{p-1}} q_{z_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}},$$

де $q_{z_0}(t) = \kappa t^{-\alpha}$.

Отже, згідно з твердженням 1 гомеоморфізм f_0 є кільцевим Q -гомеоморфізмом щодо p -модуля при $p > 2$ з функцією $Q(z) = \kappa|z - z_0|^{-\alpha}$ в точці z_0 .

Теорему 2 доведено.

У випадку коли $\alpha = 0$, отримуємо такий наслідок.

Наслідок. Для всіх $r \in [0, d_0)$ справедливою є рівність

$$\min_{f \in \mathcal{D}} \mathbf{d}_r(f) = \kappa^{-\frac{1}{p-1}} r.$$

Література

1. V. I. Ryazanov, E. A. Sevost'yanov, *Equicontinuous classes of ring Q -homeomorphisms*, Sib. Math. J., **48**, № 6, 1093–1105 (2007).
2. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Q -homeomorphisms*, Complex Analysis and Dynamical Systems, Contemp. Math., **364**, 193–203 (2004).
3. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q -homeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **30**, № 1, 49–69 (2005).
4. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Monogr. Math., New York (2009).
5. R. Salimov, *ACL and differentiability of a generalization of quasiconformal maps*, Izv. Math., **72**, № 5, 977–984 (2008).
6. A. Golberg, *Differential properties of (α, Q) -homeomorphisms*, Further Progress in Analysis, Proc. 6th ISAAC Congr. (2009), p. 218–228.
7. A. Golberg, *Integrally quasiconformal mappings in space*, Trans. Inst. Math. NAS Ukraine, **7**, № 2, 53–64 (2010).
8. A. Golberg, R. Salimov, *Logarithmic Hölder continuity of ring homeomorphisms with controlled p -module*, Complex Var. and Elliptic Equat., **59**, № 1, 91–98 (2014).
9. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Distortion estimates under mappings with controlled p -module*, Ann. Univ. Buchar. Math. Ser., **63**, 95–114 (2014).
10. R. Salimov, *On finitely Lipschitz space mappings*, Sib. Electron. Math. Rep., **8**, 284–295 (2011).
11. Р. Р. Салимов, *Об оценке меры образа шара*, Сиб. мат. журн., **53**, № 6, 920–930 (2012).
12. Р. Р. Салимов, *К теории кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля*, Укр. мат. вісн., **10**, № 3, 379–396 (2013).
13. Р. Р. Салимов, *Об одном свойстве кольцевых Q -гомеоморфизмов относительно p -модуля*, Укр. мат. журн., **65**, № 5, 728–733 (2013).
14. Б. А. Клишук, Р. Р. Салимов, *Экстремальная задача для площади образа круга*, Доп. НАН України, № 10, 22–27 (2016).
15. Б. А. Клишук, Р. Р. Салимов, *Нижние оценки для площади образа круга*, Уфим. мат. журн., **9**, № 2, 56–62 (2017).
16. Б. А. Клишук, Р. Р. Салимов, *Экстремальная задача для площади образа круга*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **456**, 160–171 (2017).

17. R. Salimov, B. Klishchuk, *An extremal problem for the volume functional*, Mat. Stud., **50**, № 1, 36–43 (2018).
18. Б. А. Клишук, Р. Р. Салимов, *Нижние оценки объема образа шара*, Укр. мат. журн., **71**, № 6, 774–785 (2019).
19. M. Cristea, *Local homeomorphisms satisfying generalized modular inequalities*, Complex Var. and Elliptic Equat., **59**, № 2, 232–246 (2014).
20. M. Cristea, *Some properties of open discrete generalized ring mappings*, Complex Var. and Elliptic Equat., **61**, № 5, 623–643 (2016).
21. M. Cristea, *Eliminability results for mappings satisfying generalized modular inequalities*, Complex Var. and Elliptic Equat., **64**, № 4, 676–684 (2019).
22. А. А. Маркиш, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *Об оценке искажения расстояния снизу для одного класса отображений*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1553–1562 (2018).
23. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Singularities of discrete open mappings with controlled p -module*, J. Anal. Math., **127**, 303–328 (2015).
24. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Poletskii type inequality for mappings from the Orlicz–Sobolev classes*, Complex Anal. and Oper. Theory, **10**, 881–901 (2016).
25. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Estimates for Jacobian and dilatation coefficients of open discrete mappings with controlled p -module*, Complex Anal. and Oper. Theory, **11**, № 7, 1521–1542 (2017).
26. A. Golberg, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *Normal families of discrete open mappings with controlled p -module*, Contemp. Math., **667**, 83–103 (2016).
27. E. Sevost'yanov, S. Skvortsov, P. Dovhopiatyi, *On nonhomeomorphic mappings with the inverse Poletsky inequality*, J. Math. Sci., **252**, № 4, 541–557 (2021).
28. E. Sevost'yanov, A. Ukhlov, *Sobolev mappings and moduli inequalities on Carnot groups*, Укр. мат. вісн., **17**, № 2, 215–233 (2020).
29. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **448**, 1–40 (1969).
30. В. А. Шлык, *О равенстве p -емкости и p -модуля*, Сиб. мат. журн., **34**, № 6, 216–221 (1993).
31. V. Mazya, *Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces*, Contemp. Math., **338**, 307–340 (2003).
32. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва (1966).
33. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, Москва (1966).
34. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
35. О. К. Бахтін, І. В. Деніга, *Узагальнена нерівність М. О. Лаврентьева*, Укр. мат. вісн., **19**, № 1, 14–34 (2022).
36. О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний, *Оцінки добутків деяких степенів внутрішніх радіусів багатозв'язних областей*, Укр. мат. журн., **73**, № 9, 1155–1169 (2021).
37. О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний, *Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей*, Укр. мат. журн., **73**, № 1, 9–22 (2021).

Одержано 22.09.22