DOI: 10.37863/umzh.v75i2.7263

УДК 517.9

Володимир Скрипник[1] (Інститут математики НАН України, Київ)

ПЕРІОДИЧНА КУЛОНІВСЬКА ДИНАМІКА ТРЬОХ РІВНИХ НЕГАТИВНИХ ЗАРЯДІВ У ПОЛІ ШІСТЬОХ РІВНИХ ПОЗИТИВНИХ ЗАРЯДІВ, ЗАФІКСОВАНИХ У ВЕРШИНАХ ОКТАЕДРА[2]

We find periodic solutions of the Coulomb equations of motion for three equal negative point charges in the field of six equal positive point charges fixed at the vertices of a octahedron. The system possesses an equilibrium configuration. The center Lyapunov theorem is applied.

Знайдено періодичні розв'язки d-вимірних $(d = 1, 2, 3)$ рівнянь руху Кулона трьох однакових негативних точкових зарядів у полі шістьох однакових позитивних точкових зарядів, зафіксованих у вершинах октаедра. Ці системи мають рівноважний стан. Періодичні розв'язки отримано за допомогою центральної теореми Ляпунова.

1. Вступ. Механічні системи d -вимірних систем N частинок (тіл, точкових зарядів) з масами $m_j, j = 1, \ldots, N,$ і координатами $x_j = (x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^d)$ характеризуються рівнянням руху (динамікою)

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U(x_{(N)})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, N, \quad x_{(N)} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad x_j = (x_j^1, \ldots, x_j^d), \tag{1.1}$$

і потенціальною енергією $U(x_{(N)})$, яка є сингулярною на множині зіткнень $x_j = x_k, j \neq k$, та дійсною аналітичною функцією на множині регулярності.

Ми розглядаємо просторову динаміку Кулона у просторі $\mathbb{R}^3$ трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ з координатами x_1, x_2, x_3 у полі шістьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах октаедра $b_j, 1 \leq j \leq 6,\ b_j = (b_j^1, b_j^2, b_j^3) \in \mathbb{R}^3$:

$$b_1 = (a, b, 0), \quad b_2 = (a, -b, 0), \quad b_3 = (-a, b, 0), \quad b_4 = (-a, -b, 0),$$

$$b_5 = (0, 0, \sqrt{3a^2 + b^2}), \quad b_6 = (0, 0, -\sqrt{3a^2 + b^2}), \quad a, b > 0,$$

з потенціальною енергією

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k = 1}^{3} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - e_0 e' \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{6} |x_j - b_k|^{-1}, \tag{1.2}$$

де

$$|x_j|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2 + (x_j^3)^2,$$

[1] E-mail: volodymyr_skrypnyk@ukr.net.

[2] Виконано за часткової підтримки за проєктом „Інноваційні методи в теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні” (номер державної реєстрації 0122U000670) в рамках програми „Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України на 2022 – 2023 рр.”.

і знаходимо періодичні розв'язки рівняння (1.1), спершу знайшовши рівновагу для U.

Динамічна система (1.1), (1.2) має два інваріантних многовиди $x_j^3 = 0,\ j = 1, 2, 3$, і $x_j^2 = 0$, $x_j^3 = 0, j = 1, 2, 3$ (лінійний і площинний). Асоційовані з ними механічні системи визначаються потенціальною енергією U, звуженою на них.

Рівновага для U дає змогу знайти періодичні розв'язки лінійного, площинного та просторового рівняння руху Кулона (1.1), (1.2). Раніше автором було знайдено періодичні й квазіперіодичні розв'язки рівнянь руху Кулона двох та трьох негативних однакових зарядів у полі двох однакових позитивних зарядів [1 – 4]. Періодичні розв'язки було знайдено в системах двох негативних однакових зарядів у полі зафіксованих чотирьох та шістьох однакових позитивних зарядів відповідно в [5] і [6], а також в системі трьох негативних однакових зарядів у полі зафіксованих шістьох та чотирьох однакових позитивних зарядів на площині відповідно в [7] і [16].

Зазначені результати були отримані так само, як і у цій статті, завдяки тому, що для симетричної матриці U^0 частинних других похідних потенціальної енергії у рівновазі було знайдено в явному вигляді власні значення, серед яких були додатні, що породжують періодичні чи квазіперіодичні розв'язки. Існування періодичних розв'язків випливає з центральної теореми Ляпунова [5 – 9], якщо немає нульових та вироджених власних значень U^0. При цьому потенціальна енергія повинна бути дійсною аналітичною функцією в околі рівноваги. Саме такою є кулонівська потенціальна енергія.

Існування квазіперіодичних розв'язків було доведено автором у випадку наявності нульового власного значення U^0 за допомогою методу небесної механіки вилучення вузла [8] та центральної теореми Ляпунова [8 – 12]. При цьому враховувалось, що нульове власне значення є наслідком обертальної інваріантності системи. Площинна і просторова системи у цій статті не мають обертальної інваріантності, а також нульового власного значення U^0.

Виникає питання: чи можливо довести існування періодичних розв'язків у кулонівських системах, коли немає рівноваги? В статті [13] автор дав ствердну відповідь на це питання, довівши їх існування у нейтральній системі n однакових негативних зарядів у полі n однакових позитивних зарядів. Метод доведення цього результату ґрунтується на узагальненні методу мажорант Зігеля [14], що застосовувався ним для знаходження розв'язків задачі трьох тіл небесної механіки.

Центральна теорема Ляпунова має справу з системами Гамільтона, рівновага яких збігається з початком координат, і формулюється так.

Теорема 1.1. *Нехай n-вимірна гамільтонова система визначається дійсним аналітичним гамільтоніаном, розклад Тейлора якого збігається абсолютно та рівномірно в околі початку координат і починається з квадратичних доданків. Нехай також $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — власні значення матриці, що визначає лінійну частину гамільтонового векторного поля, такі що $\lambda_s,\ s = 1, \ldots, k$, є уявними і нерезонансними: $\lambda_j \neq n'\lambda_s,\ s = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, 2n,\ j \neq s$, де n' — довільне ціле число. Тоді рівняння Гамільтона допускає існування k періодичних розв'язків, таких що кожен з них залежить від дійсного параметра c_j для деякого $j = 1, \ldots, k$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1), \ldots, \tau_k(c_k)$ є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й $\tau_j(0) = \dfrac{2\pi}{|\lambda_j|}$.*

Відомо [15], що для (1.1) з $m_j = m$ власні значення з теореми 1.1 збігаються з $\lambda_j = \pm\sqrt{-m^{-1}\sigma_j}$, $j = 1, \ldots, dN$, де σ_j — власні значення U^0. Таким чином, існування періодичних розв'язків рівняння (1.1) можна отримати з теореми 1.1, що ми і робимо в цій статті.

Результати цієї статті, як і попередніх, можуть бути використані в теорії плазми та квантових моделей іонізованих молекул у наближенні Борна – Оппенгеймера, в якому нерухомі позитивні та рівні негативні заряди асоціюються відповідно з важкими ядрами та легкими електронами.

Статтю побудовано таким чином. У другому, третьому та четвертому пунктах знайдено періодичні розв'язки відповідно в лінійних, площинних та просторових системах, перші дві з яких є інваріантними многовидами останньої. Отримані результати сформульовано як теореми в кінці кожного з пунктів.

2. Лінійна динаміка Кулона. Ми розглядаємо динаміку на першій координатній прямій трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі шістьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах октаедра з першими координатами $\pm a$, другими $\pm b$ та третіми $\pm\sqrt{3a^2 + b^2}$, $a, b > 0$. Площинні вершини належать прямокутнику, який симетрично розташований на площині щодо двох координатних осей. Три негативні точкові заряди рухаються вздовж першої координатної прямої, яка є інваріантним многовидом $x_j^2 = 0$, $x_j^3 = 0$, $j = 1, 2, 3$, просторової динаміки.

Потенціальна енергія цієї системи збігається з потенціальною енергією (1.2), звуженою на цей інваріантний многовид, і визначається за формулою

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq k=1}^{3}\frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - 2e_0 e' \sum_{j=1}^{3}\Big[\Big(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2}\Big)^{-1} + \Big(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2}\Big)^{-1} + \\ + \Big(\sqrt{x_j^2 + 3a^2 + b^2}\Big)^{-1}\Big], \quad x_j \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Рівноважні рівняння мають вигляд $\dfrac{\partial}{\partial x_j}U(x_{(3)}) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Підставимо рівності

$$\frac{\partial}{\partial x_1}|x_1 - x_2|^{-k} = -k\frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^{k+2}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\sqrt{(x_1 - a)^2 + b^2}\Big)^{-k} = -k\frac{x_1 - a}{\Big(\sqrt{(x_1 - a)^2 + b^2}\Big)^{k+2}}$$

в них при $k = 1$. Отже,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}U(x_{(3)}) = -e_0^2\sum_{j\neq k, k=1}^{3}\frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3} + 2e_0 e'\Bigg[\frac{x_j - a}{\Big(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2}\Big)^3} + \frac{x_j + a}{\Big(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2}\Big)^3} + \\ + \frac{x_j}{\Big(\sqrt{x_j^2 + 3a^2 + b^2}\Big)^3}\Bigg].$$

В результаті отримаємо рівноважне співвідношення для рівноваги x^0, $x_1 = x_1^0 = -a$, $x_2 = x_2^0 = 0$, $x_3 = x_3^0 = a$ з цієї рівності при $j = 1, 2$:

$$\frac{e_0^2}{(2a)^2} + \frac{e_0^2}{a^2} = \frac{3e'(2a)e_0}{\Big(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\Big)^3}, \quad \frac{5e_0}{(2a)^3} = \frac{3e'}{\Big(\sqrt{(2a)^2 + b^2}\Big)^3}.$$

Рівність $\dfrac{\partial}{\partial x_2}U(x_{(3)}) = 0$ є правильною, тому що $|x_2^0 - x_1^0| = |x_3^0 - x_2^0|$, $x_1^0 = -x_3^0$, $x_2^0 = 0$.

Тепер необхідно знайти матрицю U^0 других частинних похідних потенціальної енергії в рівновазі. Її недіагональні елементи рівні:

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_l \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j \partial x_l} = -2e_0^2|x_j - x_l|^{-3}.$$

Нехай $U_{j,l}^0$ — функція в рівновазі. Тоді

$$U_{1,3}^0 = U_{3,1}^0 = -\frac{e_0^2}{4a^3} = -u', \quad U_{1,2}^0 = U_{2,1}^0 = U_{2,3}^0 = U_{3,2}^0 = -8u'.$$

Далі, друга похідна визначається за формулою

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U(x_{(2)}) = \sum_{j\neq k,k=1}^{3} \frac{2e_0^2}{|x_j - x_k|^3} + 2e_0e'\Bigg[\frac{1}{(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2})^3} - \frac{3(x_j-a)^2}{(\sqrt{(x_j-a)^2+b^2})^5} +$$
$$+ \frac{1}{(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2})^3} - \frac{3(x_j+a)^2}{(\sqrt{(x_j+a)^2+b^2})^5} + \frac{1}{(\sqrt{x_j^2+3a^2+b^2})^3} - \frac{3x_j^2}{(\sqrt{x_j^2+3a^2+b^2})^5}\Bigg].$$

Нехай $U_{j,l}^0$ — функція в рівновазі. Тоді

$$U_{1,1}^0 = U_{3,3}^0 = \frac{9e_0^2}{4a^3} + 2e_0e'\left[b^{-3} + \frac{2}{(\sqrt{(2a)^2+b^2})^3} - \frac{15a^2}{(\sqrt{(2a)^2+b^2})^5}\right],$$

$$U_{2,2}^0 = \frac{16e_0^2}{4a^3} + 2e_0e'\left[\frac{2}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} - \frac{6a^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^5} + \frac{1}{(\sqrt{3a^2+b^2})^3}\right].$$

З рівноважного співвідношення випливає, що

$$\left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{2a} = \frac{1}{\sqrt{(2a)^2+b^2}}, \quad 2a = (1-\eta)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\eta}b, \quad \eta = \left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{2}{3}} < 1. \tag{2.2}$$

Наслідком (2.2) є дев'ять додаткових співвідношень рівноваги:

$$a^2 + b^2 = a^2[4(\eta^{-1}-1)+1] = a^2\eta^{-1}(4-3\eta),$$

$$3a^2 + b^2 = a^2[4(\eta^{-1}-1)+3] = a^2\eta^{-1}(4-\eta),$$

$$2e_0e'b^{-3} = 5\frac{2}{3}(2a)^{-3}e_0^2(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{5u'}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{4e_0e'}{(\sqrt{(2a)^2+b^2})^3} = 4e_0e'\frac{5e_0}{3e'}\left(\frac{1}{2a}\right)^3 = \frac{10u'}{3},$$

$$\frac{30e_0e'a^2}{(\sqrt{(2a)^2+b^2})^5} = 4^{-1}\cdot 30e_0e'\left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{5}{3}}(2a)^{-3} = \frac{25u'}{4}\eta,$$

$$6e_0e'b^2((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}} = 6e_0e'(2a)^2(1-\eta)\eta^{-1}\left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2a}\right)^5 = 5u'(1-\eta),$$

$$\frac{4e_0e'}{(\sqrt{a^2+b^2})^3} = 4e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{3}{2}}(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{80}{3}u'(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{12e_0e'a^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^5} = 12e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{5}{2}}(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}} = 80u'\eta(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}},$$

$$\frac{2e_0e'}{(\sqrt{3a^2+b^2})^3} = 2e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{3}{2}}(4-\eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{40}{3}u'(4-\eta)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ці співвідношення дозволяють записати діагональні елементи U^0 у простому вигляді у термінах u' та η:

$$U^0_{1,1} = U^0_{3,3} = u'v, \quad v = \frac{37}{3} + \frac{5}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{25}{4}\eta,$$

$$U_{2,2} = u'g = u'\left[16 + \frac{80}{3}(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} - 80\eta(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}} + \frac{40}{3}\eta(4-\eta)^{-\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= u'\left[16 + \frac{80}{3}(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}(4-3\eta-3\eta) + \frac{40}{3}\eta(4-\eta)^{-\frac{3}{2}}\right],$$

$$g = 3^{-1}\cdot 8\big[6 + 20(2-3\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}} + 5\eta(4-\eta)^{-\frac{3}{2}}\big].$$

Нехай U^0 — матриця з елементами $U^0_{j,l}, j,l = 1,2,3.$ Тоді

$$U^0 = u'U'_1, \quad U'_1 = \begin{pmatrix} v & -8 & -1 \\ -8 & g & -8 \\ -1 & -8 & v \end{pmatrix} = -2U_{*1} + (v+1)I,$$

$$U_*(g_1) = U_{*1} = 2^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & 2g_1 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2g_1 = -g + v + 1,$$

де I — одинична матриця. U_{*1} має однакові перший та третій рядки, а це означає, що $\mathrm{Det}\, U_{*1} = 0$. Це дозволяє знайти корені характеристичних поліномів p_{*1} і p'_1 відповідно матриць U_{*1} і U'_1 за допомогою формули

$$p_*(\lambda, q) = \mathrm{Det}\,(\lambda I - U_*(q)) = [\lambda^2 - (q+1)\lambda + q - 32]\lambda.$$

Щоб довести цю рівність, віднімемо третій рядок $-U_*(q) + \lambda I$ від першого. Детермінант при цьому не зміниться:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2^{-1} & -4 & 2^{-1} \\ -4 & \lambda - q & -4 \\ -2^{-1} & -4 & \lambda - 2^{-1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -4 & \lambda - q & -4 \\ -2^{-1} & -4 & \lambda - 2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Після цього розкладемо детермінант останньої матриці за елементами першого рядка:

$$p_*(\lambda, q) = \lambda[(\lambda - q)(\lambda - 2^{-1}) - 16 - 16 - 2^{-1}(\lambda - q)] = \lambda[(\lambda - q)(\lambda - 1) - 32].$$

Корені $p_*(q)$ визначено так:

$$2\lambda = q + 1 \pm \sqrt{(q-1)^2 + 128}, \quad \lambda = 0.$$

Корені p_1' матриці U_1' мають вигляд

$$p_1'(\lambda) = -2^3 p_*\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{v+1}{2}, g_1\right),$$

$$\lambda = v - g_1 \pm \sqrt{(g_1 - 1)^2 + 128}, \quad \lambda = v + 1 = \zeta_1'.$$

Нехай ζ_2', ζ_3' збігаються з коренями, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня:

$$\zeta_2' = \frac{g + v - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{g - v + 1}{2}\right)^2 + 128}\,,$$

$$\zeta_3' = \frac{g + v - 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{g - v + 1}{2}\right)^2 + 128}\,.$$

Далі будемо використовувати $\eta < 1$.

Твердження 2.1. *Якщо* $0 < \eta \le \dfrac{1}{3}$, *то немає резонансу по* ζ_2' *і квадратичного резонансу по* ζ_1', *тобто* $\zeta_s' \zeta_1'^{-1} \ne k^2$, $s = 2, 3$, *де* k *— ціле число.*

Доведення. Маємо

$$g \ge 3^{-1} \cdot 8\left(6 + \frac{20}{32}\right) = 16 + 3^{-1} \cdot 5 = 17\frac{2}{3},$$

$$v < \frac{37}{3} + \frac{5}{3}\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{2}} = 12\frac{1}{3} + 3^{-1} \cdot 10\left(\frac{27}{32}\right)^{\frac{1}{2}} = 15\frac{2}{3}.$$

Це приводить до $\zeta_2' > g > v + 2 > \zeta_1' + 1$ та відсутності резонансу по ζ_2. При цьому ми використали нерівність

$$\sqrt{\left(\frac{g - v + 1}{2}\right)^2 + 128} \ge \frac{g - v + 1}{2}.$$

Далі,

$$v > \frac{37}{3} + \frac{5}{3} - \frac{25}{12} = \frac{37}{3} - \frac{5}{12} > 11,$$

$$g < 3^{-1} \cdot 8[6 + 3^{-\frac{5}{2}} \cdot 40 + 3^{-\frac{5}{2}} \cdot 5] =$$

$$= 16 + 3^{-\frac{7}{2}} \cdot 320 + 3^{-\frac{7}{2}} \cdot 40 < 16 + \frac{320}{45} + \frac{8}{9} = 16 + \frac{64}{9} + \frac{8}{9} = 24.$$

Тут враховано, що $\dfrac{5}{3} < \sqrt{3}$. З нерівностей $v - g + 13 > 0$ та

$$v > g \to \left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2 = 4^{-1}(v-g+13)^2 - 7(v-g+13) + 49 < 4^{-1}(v-g+13)^2 + 49 \to$$

$$\to \sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2 + 128} < 2^{-1}(v-g+13) + 14 \to \zeta_2' < \zeta_1' + 19$$

випливає, що

$$v > \frac{16}{3} \to \zeta_1' > \frac{19}{3} \to \frac{\zeta_2'}{\zeta_1'} < 1 + \frac{19}{\zeta_1'} < 4.$$

Крім того,

$$\zeta_3' - \zeta_1' = \frac{g-v-3}{2} - \sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2 + 128}.$$

Оскільки $g > v$, то

$$\zeta_3' - \zeta_1' < \frac{g-v-3}{2} - \sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2 + 128} < \frac{g-v-3}{2} - \sqrt{\left(\frac{g-v+1}{2}\right)^2} < -2$$

і $\dfrac{\zeta_3'}{\zeta_1'} < 1,\ \zeta_1' \neq \zeta_3'$.

Твердження доведено.

Порядок зарядів на прямій зберігається завдяки необмеженому відштовхуванню між ними, тому ми можемо замінити потенціал $|x_j - x_k|^{-1}$ на дійсну аналітичну функцію $(x_j - x_k)^{-1}$ в околі рівноваги.

З того, що власні значення U^0 рівні, $\zeta_j = u'\zeta_j'$, і з центральної теореми Ляпунова [5–7] випливає така теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $\eta = \left(\dfrac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \dfrac{1}{3}$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 1,\ N = 3,$ $m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (2.1) *має рівновагу* $x_1^0 = -a,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = a > 0$ *і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра* c_j *при* $j = 1, 2$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1), \tau_2(c_2)$ *є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.

3. Площинна динаміка Кулона. У цьому пункті розглядаємо динаміку у просторі $\mathbb{R}^2$ трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі шістьох однакових позитивних зарядів $e' >$ > 0, зафіксованих у вершинах октаедра з „площинними” координатами вершин прямокутника $b_j, 1 \leq j \leq 4,\ b_j = (b_j^1, b_j^2) \in \mathbb{R}^2$, й „ортогональними” вершинами $b_5, b_6 \in \mathbb{R}^3$ (див. вступ).

Потенціальна енергія цієї системи збігається з потенціальною енергією (1.2), звуженою на інваріантний многовид $x_j^3 = 0,\ j = 1, 2, 3$, просторової динаміки, і визначається за формулою

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2}\sum_{j\neq k=1}^{3} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - e_0 e' \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} |x_j - b_k|^{-1} - 2e_0 e' \sum_{j=1}^{3} (|x_j|^2 + 3a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.1)$$

де

$$x_j = (x_j^1, x_j^2) \in \mathbb{R}^2, \quad |x_j|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2, \quad e_j = -e_0 < 0.$$

Частинні похідні потенціальної енергії U визначено таким чином:

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}U(x_{(3)}) = -e_0^2\sum_{j\neq k,k=1}^{3}\frac{x_j^\alpha - x_k^\alpha}{|x_j-x_k|^3} + e_0e'\left[\sum_{k=1}^{4}\frac{x_1^\alpha - b_k^\alpha}{|x_j-b_k|^3} + \frac{2x_j^\alpha}{(\sqrt{|x_j|^2+3a^2+b^2})^3}\right]. \quad (3.2)$$

Рівновагу визначено так: $x_1^1 = x_1^{01} = -a$, $x_2^1 = x_2^{01} = 0$, $x_3^1 = x_3^{01} = a$, $x_j^\alpha = x_j^{0\alpha} = 0, \alpha = 2$. Це приводить до рівноважного співвідношення між e_0, e', a, b, такого, як у попередньому пункті. Прирівнюючи до нуля праві частини цих рівностей при $j = 1, 3$ (результат той самий) і беручи до уваги рівність $x_1^{01} - x_3^{01} = -2a$, отримуємо

$$|x_3^0 - b_1|^2 = |x_3^0 - b_2|^2 = b^2, \quad |x_3^0 - b_3|^2 = |x_3^0 - b_4|^2 = (2a)^2 + b^2,$$
$$|x_1^0 - b_1|^2 = |x_1^0 - b_2|^2 = (2a)^2 + b^2, \quad |x_1^0 - b_3|^2 = |x_1^0 - b_4|^2 = b^2,$$
$$|x_2^0 - b_j|^2 = a^2 + b^2, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

і

$$\sum_{k=1}^{4}\frac{x_1^{01} - b_k^1}{|x_1^0 - b_k|^3} + 2x_1^{01}(|x_1^0|^2 + 3a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{6a}{(\sqrt{(2a)^2+b^2})^3},$$
$$\sum_{k=1}^{4}\frac{x_1^{02} - b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\sum_{k=1}^{4}\frac{b_k^2}{|x_1^0 - b_k|^3} = 0.$$

Права частина (3.2) є нулем для $\alpha = 2$ та $j = 2$, тому що $|x_2^0 - x_1^0| = |x_3^0 - x_2^0|$, $x_1^{01} = -x_3^{01}$, $x_2^0 = 0$ і

$$\sum_{k=1}^{4} b_k^\alpha = 0, \alpha = 1, 2.$$

Рівноважні співвідношення мають вигляд

$$\frac{e_0^2}{(2a)^2} + \frac{e_0^2}{a^2} = \frac{3e'(2a)e_0}{(\sqrt{(2a)^2+b^2})^3}, \quad \frac{5e_0}{(2a)^3} = \frac{3e'}{(\sqrt{(2a)^2+b^2})^3}.$$

Другі частинні похідні потенціальної енергії (3.1) визначаються таким чином:

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j^\alpha \partial x_k^\beta} = \frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_k^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2\left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j-x_k|^3} - 3\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|x_j-x_k|^5}\right], \quad \alpha,\beta = 1,2, \quad j \neq k,$$

і

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2\sum_{k=1,k\neq j}^{3}\left[-\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j-x_k|^3} + 3\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|x_j-x_k|^5}\right] + 2e_0e'\delta_{\alpha,\beta}(|x_j|^2 + 3a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} +$$
$$+ e_0e'\sum_{k=1}^{6}\left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j-b_k|^3} - 3\frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j-b_k|^5}\right] - 6e_0e'x_j^\alpha x_j^\beta(|x_j|^2 + 3a^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Знайдемо рівноважні значення усіх виразів в цих рівностях. Нехай η, u' — ті ж самі, що і в попередньому пункті. Тоді отримуємо рівності

$$e_0^2 \sum_{k=1, k\neq j}^{3} \frac{1}{|x_j^0 - x_k^0|^3} =$$

$$= e_0^2((2a)^{-3} + a^{-3})(1-\delta_{j,2}) + 2a^{-3}\delta_{j,2} = \frac{9u'}{2}(1-\delta_{j,2}) + 8u'\delta_{j,2}, \quad j=1,2,3, \tag{3.3}$$

$$e_0 e' \sum_{k=1}^{4} \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j^0 - b_k|^3} = \delta_{\alpha,\beta} 2 e_0 e' (b^{-3} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}}) =$$

$$= \frac{5}{3}\delta_{\alpha,\beta} u'[(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + 1], \quad j = 1,3, \tag{3.4}$$

$$e_0 e' \sum_{k=1}^{4} \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_2^0 - b_k|^3} = \delta_{\alpha,\beta} e_0 e' 4(a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} = \delta_{\alpha,\beta}\frac{80}{3}u'(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}}, \tag{3.5}$$

$$2e_0 e' \delta_{\alpha,\beta}(|x_j^0|^2 + 3a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} = \delta_{\alpha,\beta}\left[(1-\delta_{j,2})\frac{5u'}{3} + \delta_{j,2}\frac{40}{3}(4-\eta)^{-\frac{3}{2}}\right], \tag{3.6}$$

$$6e_0 e' x_j^{0\alpha} x_j^{0\beta}(|x_j^0|^2 + 3a^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} = 6e_0 e' a^2 \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}(1-\delta_{j,2})((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}(1-\delta_{j,2})\frac{5u'}{4}\eta, \tag{3.7}$$

які випливають з (2.2) і додаткових співвідношень рівноваги.

Нехай

$$T_j(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{4} \frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5}.$$

Крім того, нехай також $T_j^0(\alpha,\beta)$ — рівноважне значення $T_j(\alpha,\beta)$. Встановимо рівності

$$T_j^0(\alpha,\beta) = \delta_{\alpha,\beta}[8a^2((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,1} + 2b^2(b^{-5} + ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}})\delta_{\alpha,2}], \quad j=1,3, \tag{3.8}$$

$$T_2^0(\alpha,\beta) = 4(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}\delta_{\alpha,\beta}(a^2\delta_{\alpha,1} + b^2\delta_{\alpha,2}), \tag{3.9}$$

використавши формули

$$T_3^0(1,2) = -[b^{-5}((a-b_1^1)b_1^2 + (a-b_2^1)b_2^2) + ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}((a-b_3^1)b_3^2 + (a-b_4^1)b_4^2)] = 0,$$

$$T_1^0(1,2) = -[((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}((-a-b_1^1)b_1^2 + (-a-b_2^1)b_2^2) +$$

$$+ b^{-5}((-a-b_3^1)b_3^2 + (-a-b_4^1)b_4^2)] = 0,$$

$$T_3^0(1,1) = b^{-5}[(a-b_1^1)^2 + (a-b_2^1)^2] + ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}[(a-b_3^1)^2 + (a-b_4^1)^2] =$$

$$= 8a^2((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$T_1^0(1,1) = ((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}[(-a-b_1^1)^2 + (-a-b_2^1)^2] + b^{-3}[(-a-b_3^1)^2 +$$

$$+ (-a-b_4^1)^2] = 8a^2((2a)^2+b^2)^{-\frac{5}{2}},$$

$$T_j^0(2,2) = \sum_{k=1}^{4} \frac{(b_k^2)^2}{|x_j^0 - b_k|^5}, \quad j = 1,3, \quad T_1^0(2,2) = T_3^0(2,2) = 2b^2[b^{-5} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}],$$

$$T_2^0(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{4} \frac{b_k^\alpha b_k^\beta}{|x_2^0 - b_k|^5} = (a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}} \sum_{k=1}^{4} b_k^\alpha b_k^\beta = 4(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}} \delta_{\alpha,\beta}(a^2\delta_{\alpha,1} + b^2\delta_{\alpha,2}).$$

Рівності (3.8), (3.9) встановлено. Беручи до уваги співвідношення

$$e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \frac{(x_j^{0\alpha} - x_k^{0\alpha})(x_j^{0\beta} - x_k^{0\beta})}{|x_j^0 - x_k^0|^5} = e_0^2(a^{-3} + (2a)^{-3})\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1} = \frac{9u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}, \quad j = 1,3,$$

з (3.3), (3.4) і (3.6)–(3.8) отримуємо

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta} = U^0_{3,\alpha;3,\beta} = u'\delta_{\alpha,\beta}(v' - \delta_{\alpha,1}u'_* - \delta_{\alpha,2}u''_*),$$

де

$$v' = \frac{1}{3}\left[5(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{7}{2}\right],$$

$$u'u'_* + \frac{27u'}{2} = 6e_0e'(2a)^2((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} + \frac{5\eta}{4}u', \quad u'_* = \frac{25\eta}{4} - \frac{27}{2},$$

$$u'u''_* = 6e_0e'b^2(b^{-5} + ((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}), \quad u''_* = 5[1 - \eta + (1-\eta)^{-\frac{3}{2}}].$$

Тут ми врахували (2.2) і додаткові співвідношення рівноваги (третє, пяте та шосте).

З рівності

$$e_0^2 \sum_{k=1,k\neq 2}^{3} \frac{(x_2^{0\alpha} - x_k^{0\alpha})(x_2^{0\beta} - x_k^{0\beta})}{|x_2^0 - x_k^0|^5} = e_0^2 2a^{-3}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1} = 8u'\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1},$$

(3.3), (3.5), (3.6) і (3.9) випливає, що

$$U^0_{2,\alpha;2,\beta} = u'\delta_{\alpha,\beta}(v_1 - u_1\delta_{\alpha,1} - \delta_{\alpha,2}u'_1),$$

де

$$v_1 = -8 + \frac{40}{3}[2(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} + (4-\eta)^{-\frac{3}{2}}],$$

$$u'u_1 = 3e_0e'4a^2(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}} - 24u', \quad u_1 = 80\eta(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}} - 24,$$

$$u'u'_1 = 3e_0e'4b^2(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}, \quad u'_1 = 320[(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}].$$

Тут ми використали (2.2), додаткові співвідношення рівноваги з попереднього пункту і

$$e_0e'(a^2+b^2)^{-\frac{5}{2}}b^2 = e_0e'a^{-5}\eta^{\frac{3}{2}}(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}(2a)^2 = \frac{80}{3}u'(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}.$$

Крім того, маємо

$$e_0^2 \frac{(x_2^{0\alpha} - x_k^{0\alpha})(x_2^{0\beta} - x_k^{0\beta})}{|x_2^0 - x_k^0|^5} = e_0^2 \frac{x_k^{0\alpha} x_k^{0\beta}}{a^5} = e_0^2 a^{-3} \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1} = 4u'\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1}, \quad k = 1, 3,$$

$$e_0^2 \frac{(x_1^{0\alpha} - x_3^{0\alpha})(x_1^{0\beta} - x_3^{0\beta})}{|x_1^0 - x_3^0|^5} = e_0^2 (2a)^{-3} \delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,1},$$

$$\frac{1}{|x_1^0 - x_2^0|^3} = \frac{1}{|x_2^0 - x_3^0|^3} = a^{-3}, \quad \frac{1}{|x_1^0 - x_3^0|^3} = (2a)^{-3}.$$

З цих чотирьох рівностей одержуємо

$$U^0_{1,\alpha;3,\beta} = U^0_{3,\alpha;1,\beta} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}),$$

$$U^0_{2,\alpha;3,\beta} = U^0_{3,\alpha;2,\beta} = U^0_{2,\alpha;1,\beta} = U^0_{1,\alpha;2,\beta} = 4u'\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}).$$

Тепер визначимо дві тривимірні матриці U^0_α, $\alpha = 1, 2$, за правилом

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} U^0_{\alpha;j,k}$$

і перенумеруємо індекси координат таким чином:

$$(1,1) = 1, \quad (2,1) = 2, \quad (3,1) = 3, \quad (1,2) = 4, \quad (2,2) = 5, \quad (3,2) = 6,$$

де перший і другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми і верхніми індексами координат. Це дає

$$U^0 = U^0_1 \oplus U^0_2.$$

Елементи симетричної матриці U^0_2 знаходяться зі співвідношень

$$U^0_{1;1,1} = U^0_{1,1;1,1} = U^0_{1;3,3} = U^0_{3,1;3,1} = u'(v' - u'_*), \quad U^0_{1;2,2} = U^0_{2,1;2,1} = u'(v_1 - u_1),$$

$$U^0_{1;2,1} = U^0_{1;1,2} = U^0_{1,1;2,1} = -8u', \quad U^0_{1;3,1} = U^0_{1;1,3} = U^0_{1,1;3,1} = -u',$$

$$U^0_{1;3,2} = U^0_{1;2,3} = U^0_{1,1;3,1} = -8u',$$

$$U^0_{2;1,1} = U^0_{1,2;1,2} = U^0_{2;3,3} = U^0_{3,2;3,2} = u'(v' - u''_*) = -u'u'' + \frac{u'}{2},$$

$$U^0_{2;2,2} = U^0_{2,2;2,2} = u'(v_1 - u'_1) = u'g',$$

$$U^0_{2;2,1} = U^0_{2;1,2} = U^0_{1,2;2,2} = 4u', \quad U^0_{2;3,1} = U^0_{2;1,3} = U^0_{1,2;3,2} = \frac{u'}{2},$$

$$U^0_{2;3,2} = U^0_{2;2,3} = U^0_{2,2;3,2} = 4u'.$$

Параметри цих матриць мають вигляд

$$u'(v' - u'_*) = \frac{5u'}{3}(1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{7u'}{6} - \frac{25u'}{4}\eta + \frac{27u'}{2} = u'v,$$

$$u'(v_1 - u_1) = -8u' + 24u' + \frac{40}{3}u'[2(4 - 3\eta)^{-\frac{3}{2}} + (4 - \eta)^{-\frac{3}{2}}] - 80u'\eta(4 - 3\eta)^{-\frac{5}{2}} = u'g,$$

$$-u''u' = v'u' - u'u''_* - \frac{u'}{2} = u'\left[\frac{1}{3}5(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{7}{2}\right] - 5u'[1-\eta+(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}] - \frac{u'}{2},$$

$$u'' = 9 - 5\eta + \frac{10}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}}, \quad u'' > 7,$$

$$u'g' = u'(v_1 - u'_1),$$

$$g' = -8 + \frac{40}{3}[2(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} + (4-\eta)^{-\frac{3}{2}}] - 320[(1-\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}] =$$

$$= -8 + \frac{40}{3}(4-\eta)^{-\frac{3}{2}} + \frac{80}{3}(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}}[4-3\eta-12(1-\eta)] =$$

$$= -8 + \frac{40}{3}(4-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{80}{3}(8-9\eta)(4-3\eta)^{-\frac{5}{2}},$$

де v, g визначені у другому пункті. В результаті отримуємо

$$U_1^0 = u'\begin{pmatrix} v & -8 & -1 \\ -8 & g & -8 \\ -1 & -8 & v \end{pmatrix} = u'U'_1, \quad U'_1 = -2U_*(g_1) + (v+1)I, \quad 2g_1 = -g + v + 1,$$

$$U_2^0 = u'2^{-1}\begin{pmatrix} -2u''+1 & 8 & 1 \\ 8 & 2g' & 8 \\ 1 & 8 & -2u''+1 \end{pmatrix} = u'U'_2, \quad U'_2 = U_*(g_2) - u''I, \quad g_2 = g' + u'',$$

де матриця U_* визначена у другому пункті, в якому знайдено її власні значення як корені $p_*(q)$. Тепер легко знайти власні значення U'_2 як корені полінома p'_2: $p'_2(\lambda) = p_*(\lambda + u'', g_2)$. Маємо

$$2\lambda = g_2 - 2u'' + 1 \pm \sqrt{(g_2-1)^2 + 128}, \quad \lambda = -u'' = \zeta'_4 < 0.$$

Нехай ζ'_5, ζ'_6 збігаються з коренями, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня. Тоді

$$2\zeta'_5 = g' - u'' + 1 + \sqrt{(g' + u'' - 1)^2 + 128},$$

$$2\zeta'_6 = g' - u'' + 1 - \sqrt{(g' + u'' - 1)^2 + 128}.$$

Якщо $0 < \eta \leq \dfrac{1}{3}$, то

$$-g' > 8 - \frac{40}{3\sqrt{27}} + 5\frac{80}{96} > 8 - \frac{40}{3\sqrt{25}} + 5\frac{8}{10} = 8 - \frac{8}{3} + 4 > 9, |g'| > 9;$$

$\zeta'_5 < 0$, якщо $g' < 0$ і

$$(|g'| - u'' + 1)^2 + 128 < (|g'| + u'' - 1)^2, \quad (u'' - 1)|g'| > 32.$$

Це виконується, якщо $0 < \eta \leq \dfrac{1}{3}$, бо $(u''-1)|g'| > 54$. У цьому випадку $\zeta'_6 < \zeta'_5 < 0$. Тоді немає резонансу по $\zeta_2 = u'\zeta'_2$ і квадратичного резонансу по $\zeta_1 = u'\zeta'_1$ для власних значень ζ_j, $1 \leq j \leq 6$, матриці U^0.

Це твердження та центральна теорема Ляпунова доводять таку теорему.

Теорема 3.1. *Нехай* $\eta = \left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{2}{3}} \le \frac{1}{3}$. *Тоді рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 2,\ N = 3,$ $m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (3.1) *має рівновагу* $x_1^{01} = -a,\ x_2^{01} = 0,\ x_3^{01} = a,$ $x_j^{02} = 0,\ j = 1, 2, 3,$ *і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра* c_j *при* $j = 1, 2$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1),\ \tau_2(c_2)$ *є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.

4. Просторова динаміка Кулона. У цьому пункті розглядаємо динаміку Кулона у просторі $\mathbb{R}^3$ трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі шістьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах октаедра $b_j, 1 \le j \le 6,\ b_j = (b_j^1, b_j^2, b_j^3) \in \mathbb{R}^3$, визначеного у вступі, з потенціальною енергією (1.2).

Перші частинні похідні потенціальної енергії задано так:

$$\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} U(x_{(3)}) = -e_0^2 \sum_{k=1, k\ne j}^{3} \frac{x_j^\alpha - x_k^\alpha}{|x_j - x_k|^3} + e_0 e' \sum_{k=1}^{6} \frac{x_1^\alpha - b_k^\alpha}{|x_j - b_k|^3}. \tag{4.1}$$

Рівновагу визначено рівностями $x_1^1 = x_1^{01} = -a, x_2^1 = x_2^{01} = 0,\ x_3^1 = x_3^{01} = a,\ x_j^\alpha = x_j^{0\alpha} = 0,$ $\alpha = 2, 3$. Вони дають рівноважні співвідношення між $e_0,\ e',\ a,\ b$ такі ж, як і в попередньому пункті. Прирівнюючи до нуля праві частини (4.1) при $j = 1, 3$ (результат однаковий) і враховуючи рівність $x_1^{01} - x_3^{01} = -2a$, отримуємо

$$|x_3^0 - b_1|^2 = |x_3^0 - b_2|^2 = b^2, \quad |x_3^0 - b_3|^2 = |x_3^0 - b_4|^2 = |x_3^0 - b_5|^2 = |x_3^0 - b_6|^2 = (2a)^2 + b^2,$$

$$|x_1^0 - b_1|^2 = |x_1^0 - b_2|^2 = |x_1^0 - b_5|^2 = |x_1^0 - b_6|^2 = (2a)^2 + b^2, \quad |x_1^0 - b_3|^2 = |x_1^0 - b_4|^2 = b^2,$$

$$|x_2^0 - b_j|^2 = a^2 + b^2, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad |x_2^0 - b_k|^2 = 3a^2 + b^2, \quad k = 5, 6,$$

і

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{x_1^{01} - b_k^1}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\frac{6a}{(\sqrt{(2a)^2 + b^2})^3},$$

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{x_1^{0\alpha} - b_k^\alpha}{|x_1^0 - b_k|^3} = -\sum_{k=1}^{6} \frac{b_k^\alpha}{|x_1^0 - b_k|^3} = 0, \quad \alpha = 2, 3.$$

Права частина (4.1) є нулем при $\alpha = 2$ і $j = 2$, тому що $|x_2^0 - x_1^0| = |x_3^0 - x_2^0|,\ x_1^{01} = -x_3^{01},$ $x_2^0 = 0$.

Рівноважні співвідношення мають вигляд

$$\frac{e_0^2}{(2a)^2} + \frac{e_0^2}{a^2} = \frac{3e'(2a)e_0}{(\sqrt{(2a)^2 + b^2})^3}, \quad \frac{5e_0}{(2a)^3} = \frac{3e'}{(\sqrt{(2a)^2 + b^2})^3}.$$

Другі частинні похідні потенціальної енергії задано так:

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j^\alpha \partial x_k^\beta} = \frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_k^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2 \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - x_k|^3} - 3\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|x_j - x_k|^5}\right], \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad j \ne k,$$

і

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j^\beta \partial x_j^\alpha} = e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \left[-\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - x_k|^3} + 3\frac{(x_j^\alpha - x_k^\alpha)(x_j^\beta - x_k^\beta)}{|x_j - x_k|^5} \right] +$$

$$+ e_0 e' \sum_{k=1}^{6} \left[\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j - b_k|^3} - 3\frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5} \right].$$

Тоді ми виводимо рівності

$$e_0^2 \sum_{k=1,k\neq j}^{3} \frac{1}{|x_j^0 - x_k^0|^3} = e_0^2((2a)^{-3} + a^{-3})(1 - \delta_{j,2}) + 2a^{-3}\delta_{j,2} =$$

$$= \frac{9u'}{2}(1 - \delta_{j,2}) + 8u'\delta_{j,2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$e_0 e' \sum_{k=1}^{6} \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_j^0 - b_k|^3} = \delta_{\alpha,\beta} 2e_0 e'(b^{-3} + 2((2a)^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}}) = \frac{5}{3}\delta_{\alpha,\beta} u'[(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} + 2], \quad j = 1, 3,$$

$$e_0 e' \sum_{k=1}^{6} \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{|x_2^0 - b_k|^3} = \delta_{\alpha,\beta} e_0 e'[4(a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} + 2(3a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}}] =$$

$$= \delta_{\alpha,\beta}\frac{40}{3}u'[2(4 - 3\eta)^{-\frac{3}{2}} + (4-\eta)^{-\frac{3}{2}}],$$

враховуючи рівності (2.2) і додаткові співвідношення рівноваги з попереднього пункту.

Нехай

$$T_{*j}(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5}, \quad T_j'(\alpha,\beta) = \sum_{k=5}^{6} \frac{(x_j^\alpha - b_k^\alpha)(x_j^\beta - b_k^\beta)}{|x_j - b_k|^5}.$$

Крім того, нехай також $T_{*j}^0(\alpha,\beta)$, $T_j'^0(\alpha,\beta)$ дорівнюють відповідно рівноважним значенням $T_{*j}(\alpha,\beta)$, $T_j'(\alpha,\beta)$. Тоді

$$T_{*j}^0(\alpha,\beta) = T_j^0(\alpha,\beta)(1 - \delta_{\alpha,3}) + T_j'^0(\alpha,\beta),$$

$$T_j'^0(\alpha,\beta) = 2\delta_{\alpha,\beta}((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}}[a^2\delta_{\alpha,1} + \delta_{\alpha,3}(3a^2 + b^2)], \quad j = 1, 3,$$

$$3e_0 e' T_2'^0(\alpha,\beta) = 6e_0 e'\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,3}(3a^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} = u'\delta_{\alpha,\beta}\delta_{\alpha,3}v_3, \quad v_3 = 40(4-\eta)^{-\frac{3}{2}}.$$

При цьому ми використали (2.2) і додаткові співвідношення рівноваги з попереднього пункту, з яких випливають рівності

$$3e_0 e' T_j'^0(\alpha,\beta) = u'\delta_{\alpha,\beta}\left(\delta_{\alpha,1}\frac{5}{4}\eta + \delta_{\alpha,3}v_2\right), \quad j = 1, 3,$$

де

$$v_2 = \frac{15}{4}\eta + 5(1-\eta) = 5 - \frac{5}{4}\eta.$$

Ці рівності показують, що

$$U^0_{1,\alpha;1,\beta} = U^0_{3,\alpha;3,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}(u'v' - \delta_{\alpha,1}u'_* - \delta_{\alpha,2}u''_* - \delta_{\alpha,3}v_2),$$

$$U^0_{2,\alpha;2,\beta} = u'\delta_{\alpha,\beta}(v_1 - u_1\delta_{\alpha,1} - \delta_{\alpha,2}u'_1 - \delta_{\alpha,3}v_3),$$

$$U^0_{1,\alpha;3,\beta} = U^0_{3,\alpha;1,\beta} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}),$$

$$U^0_{2,\alpha;3,\beta} = U^0_{3,\alpha;2,\beta} = U^0_{2,\alpha;1,\beta} = U^0_{1,\alpha;2,\beta} = 4u'\delta_{\alpha,\beta}(1 - 3\delta_{\alpha,1}).$$

Зазначимо, що недіагональні елементи U^0 не залежать від вершин октаедра.

Тепер визначимо три тривимірні матриці $U^0_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$, за правилом

$$U^0_{j,\alpha;k,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}U^0_{\alpha;j,k}$$

і перенумеруємо індекси координат таким чином:

$$(1,1) = 1, \quad (2,1) = 2, \quad (3,1) = 3, \quad (1,2) = 4, \quad (2,2) = 5, \quad (3,2) = 6,$$

$$(1,3) = 7, \quad (2,3) = 8, \quad (3,3) = 9.$$

Тут перший та другий індекси у круглих дужках збігаються з нижніми та верхніми індексами координат. Це дає

$$U^0 = U^0_1 \oplus U^0_2 \oplus U^0_3.$$

Симетричні матриці U^0_1, U^0_2 визначено в попередньому пункті і

$$U^0_{3;1,3} = U^0_{3;3,1} = U^0_{1,\alpha;3,\beta} = U^0_{3,\alpha;1,\beta} = \frac{u'}{2}\delta_{\alpha,\beta},$$

$$U^0_{3;1,2} = U^0_{3;2,1} = U^0_{3;2,3} = U^0_{3;3,2} = U^0_{2,3;3,3} = U^0_{3,3;2,3} = U^0_{2,3;1,3} = U^0_{1,3;2,3} = 4u',$$

$$U^0_{3;1,1} = U^0_{1,3;1,3} = U^0_{3;3,3} = U^0_{3,3;3,3} = u'(v' - v_2) = u'r, \quad U^0_{3;2,2} = U^0_{2,3;2,3} = u'(v_1 - v_3) = u'r',$$

де

$$r = \frac{1}{3}\left[5(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{7}{2}\right] - 5 + \frac{5}{4}\eta = \frac{5}{3}(1-\eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{37}{6} + \frac{5}{4}\eta,$$

$$r' = -8 + \frac{40}{3}[2(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} + (4-\eta)^{-\frac{3}{2}}] - 40(4-\eta)^{-\frac{3}{2}} = -8 + \frac{80}{3}[(4-3\eta)^{-\frac{3}{2}} - (4-\eta)^{-\frac{3}{2}}].$$

В результаті маємо

$$U^0_3 = u'2^{-1}\begin{pmatrix} 2r & 8 & 1 \\ 8 & 2r' & 8 \\ 1 & 8 & 2r \end{pmatrix} = u'U'_3, \quad U'_3 = U_*(g_3) + (r-1)I, \quad g_3 = r' - r + 1.$$

Корені p'_3 матриці U'_3 визначено так:

$$p'_3(\lambda) = p_*(\lambda + 1 - r, g_3),$$

$$2\lambda = g_3 - 2(1-r) + 1 \pm \sqrt{(g_3-1)^2 + 128}, \quad \lambda = r - 1 = \zeta'_7.$$

Нехай ζ_8', ζ_9' збігаються з коренями, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня. Тоді

$$2\zeta_8' = r' + r - 1 + \sqrt{(r'-r)^2 + 128},$$

$$2\zeta_9' = r' + r - 1 - \sqrt{(r'-r)^2 + 128}.$$

Нехай $0 < \eta \leq \dfrac{1}{3}$, тоді $\left(\sqrt{3} > \dfrac{5}{3}\right)$

$$-5 < r \leq \frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{27}}{\sqrt{8}} - \frac{37}{2}\right) + \frac{5}{12} < \frac{1}{3}\left(10 - \frac{36}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{13}{6} < -2,$$

$$-10 = -8 + \frac{80}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\right) < -8 + \frac{80}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{27}}\right) < r' < -8 + \frac{30}{\sqrt{27}} < 0 = -8 + \frac{10}{\sqrt{3}} < -2,$$

$$-8 < -10 + 2 < r' - r < 3, \quad -15 = -10 - 5 < r' + r < -4,$$

$$2\zeta_8' < -5 + \sqrt{64 + 128} < 9, \quad 2\zeta_8' > 11 - 16 = -5.$$

Ці нерівності дають

$$\zeta_7' < 0, \quad -\frac{5}{2} < \zeta_8' < \frac{9}{2}, \quad \zeta_9' < 0,$$

а з нерівностей $\zeta_1' < \zeta_2'$, $\zeta_1' > 12$ випливає, що

$$\zeta_8' < \zeta_1' < \zeta_2'.$$

Отже, доведено таке твердження.

Твердження 4.1. *Резонансу по $\zeta_2 = u'\zeta_2'$ і квадратичного резонансу по $\zeta_1 = u'\zeta_1'$ немає для власних значень $\zeta_j, 1 \leq j \leq 9$, матриці U^0 просторової кулонівської системи, якщо $0 < \eta \leq \dfrac{1}{3}$.*

Наступне твердження є остаточним кроком для застосування центральної теореми Ляпунова.

Твердження 4.2. *Існує таке число $\eta_* \in \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, що $\zeta_8'(\eta_*) = 0$.*

Доведення. Нехай $\eta = 0$, тоді

$$r' = -8, \quad r = -\frac{9}{2}, \quad 2\zeta_8' = -13 - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 128} < -13 - \frac{1}{2} + 12 = -\frac{3}{2}.$$

Нехай $\eta = \dfrac{1}{3}$. Тоді $\left(\dfrac{5}{3} < \sqrt{3} < \dfrac{7}{4}\right)$

$$r = \frac{1}{3}\left(\frac{5\sqrt{27}}{\sqrt{8}} - \frac{37}{2}\right) + \frac{5}{12} > \frac{5}{3}\sqrt{3} - \frac{37}{6} + \frac{4}{12} > \frac{25}{9} - \frac{35}{6} = -\frac{55}{18} = -3\frac{1}{18},$$

$$\frac{80}{3}3^{-\frac{3}{2}} = \frac{80}{9\sqrt{3}} = -\frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{3}} > \frac{36}{7} - \frac{1}{9\sqrt{3}},$$

$$(4 - 3^{-1})^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{27}}{(11)^2}\sqrt{11} < \frac{18}{(11)^2}, \quad \frac{80}{3}(4 - 3^{-1})^{-\frac{3}{2}} < \frac{480}{(11)^2} < 4.$$

В результаті маємо

$$r' > -8 + \frac{36}{7} - 4 - \frac{1}{9\sqrt{3}} > -7 + \frac{1}{7} - \frac{1}{9\sqrt{3}},$$

$$r' + r - 1 > -11 - \frac{1}{18} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} > -11 - \frac{2}{15} + \frac{1}{7} > -11.$$

Таким чином,

$$2\zeta_8' = r' + r - 1 + \sqrt{(r - r')^2 + 128} > -11 + \sqrt{128} > 0;$$

ζ_8' — неперервна функція і нуль є одним з її значень.

Твердження доведено.

Два останніх твердження та центральна теорема Ляпунова доводять таку теорему.

Теорема 4.1. *Якщо* $\eta = \frac{1}{3}$ *чи* $0 < \eta = \left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{1}{3}$ *і* $\zeta_8' \neq 0$, *то рівняння руху Кулона* (1.1) *для* $d = 3,\ N = 3,\ m_1 = m_2 = m$ *з потенціальною енергією* (1.2) *має рівновагу* $x_1^{01} = -a$, $x_2^{01} = 0,\ x_3^{01} = a,\ x_j^{0\alpha} = 0,\ \alpha = 2, 3,\ j = 1, 2, 3,$ *і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра* c_j *при* $j = 1, 2$. *Ці розв'язки та їхні періоди* $\tau_1(c_1),\ \tau_2(c_2)$ *є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й* $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.

Література

1. W. Skrypnik, *Periodic and bounded solutions of the Coulomb equation of motion of two and three point charges with equilibrium on line*, Ukr. Math. J., **66**, № 5, 668 – 682 (2014).
2. W. Skrypnik, *Coulomb planar dynamics of two and three equal negative charges in field of fixed two equal positive charges*, Ukr. Math. J., **68**, № 11, 1528 – 1539 (2016).
3. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics near equilibrium of two equal negative charges in the field of fixed two equal positive charges*, Ukr. Math. J., **68**, № 9, 1273 – 1285 (2016).
4. W. Skrypnik, *Coulomb dynamics of three equal negative charges in field of fixed two equal positive charges*, J. Geom. and Phys., **127**, 101 – 111 (2018).
5. В. Скрипник, *Періодична кулонівська динаміка двох рівних негативних зарядів у полі фіксованих чотирьох рівних позитивних зарядів*, Укр. мат. журн., **72**, № 10, 1432 – 1442 (2020); DOI: 1037863/umzh.v72i10.742.
6. В. Скрипник, *Періодична кулонівська динаміка двох рівних негативних зарядів у полі фіксованих шістьох рівних позитивних зарядів*, Укр. мат. журн., **72**, № 12, 1682 – 1696 (2020); DOI: 1037863/umzh.v72i12.917.
7. W. Skrypnik, *Periodic Coulomb dynamics of three equal negative charges in the field of equal positive charges fixed in octagon vertices*, Adv. Math. Phys., **2020**, Article ID 35467136 (2020); https://doi.org/10.1155/2020/3547136.
8. A. Lyapunov, *General problem of stability of motion*, Moscow (1950); *English translation*: Internat. J. Control, **55**, № 3, 521 – 790 (1992).
9. M. S. Berger, *Nonlinearity and functional analysis*, Lectures Nonlinear Problems in Mathematical Analysis, Acad. Press, New York etc. (1977).
10. J. Marsden, M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York (1976).
11. C. Siegel, J. Moser, *Lectures on celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
12. V. Nemytskii, V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Moscow, Leningrad (1947).
13. W. Skrypnik, *Coulomb planar periodic motion of n equal charges n the field of n equal positive charges fixed at a line and constant magnetic field*, Adv. Math. Phys., **2018**, Article ID 2548074 (2018); https://doi.org/10.1155/2548074.
14. C. Siegel, *Über eine periodische Lösung in ebenen Drei Körper Problem*, Math. Nachr., **4**, 28 – 35 (1950 – 1951).
15. W. Skrypnik, *Mechanical systems with singular equilibria and Coulomb dynamics of three charges*, Ukr. Math. J., **70**, 519 – 533 (2018).
16. В. Скрипник, *Періодична кулонівська динаміка трьох рівних негативних зарядів у полі фіксованих чотирьох рівних позитивних зарядів*, Укр. мат. журн., **73**, № 12, 1698 – 1713 (2021).

Одержано 17.07.22