

Вячеслав Пивоварчик<sup>1</sup>, Анастасія Чернишенко

(Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, Одеса)

**КОСПЕКТРАЛЬНІ КВАНТОВІ ГРАФИ ЗА УМОВ ДІРІХЛЕ  
НА ВИСЯЧИХ ВЕРШИНАХ**

We consider spectral problems generated by the Sturm–Liouville equation on connected simple equilateral graphs with Neumann and Dirichlet boundary conditions at the pendant vertices and the conditions of continuity and Kirchhoff's conditions at the inner vertices. We describe the cases where the first and the second terms of the asymptotics of eigenvalues uniquely determine the shape either of the graph or of its interior subgraph.

Розглянуто спектральні задачі, породжені рівнянням Штурма–Ліувілля на зв'язних простих рівнобічних графах з умовами Неймана та Діріхле на висячих вершинах та умовами неперервності і умовами Кірхгофа на внутрішніх вершинах. Описано випадки, коли перший і другий члени асимптотики власних значень однозначно визначають форму графа або його внутрішнього підграфа.

**1. Вступ.** Проблема існування коспектральних графів виникла ще у минулому столітті. У класичній теорії графів коспектральними вважають неізоморфні графи з однаковим спектром матриці суміжності (див. [8], розділ 6.1). Перший приклад коспектральних графів (див. рис. 1) наведено у [7].

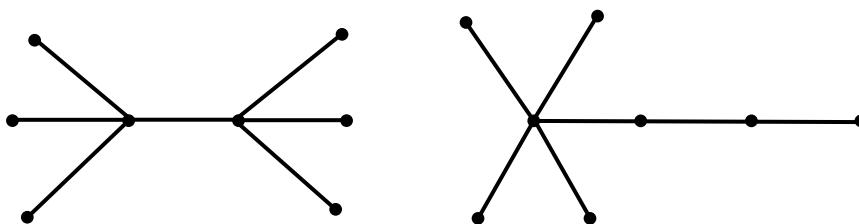


Рис. 1. Неізоморфні графи з однаковими спектрами матриці суміжності.

У багатьох випадках більш важливу роль, ніж матриця суміжності, відіграє дискретний лапласіан. Існують різні означення дискретного лапласіана, який ще називають нормованим лапласіаном (див. [10, с. 2]). Ми розуміємо під дискретним лапласіаном матрицю  $D^{-1/2}AD^{-1/2}$ , де  $A$  — матриця суміжності графа, а  $D = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$  — матриця степенів вершин,  $d(v_j)$  — степінь вершини  $v_j$ . Це означення відрізняється від наведеного в [10] зсувом спектрального параметра  $\lambda \rightarrow \lambda + 1$ . Незважаючи на те, що спектри матриць суміжності графів, зображених на рис. 1, збігаються, спектри дискретних лапласіанів цих графів різні: вони є множинами коренів многочленів  $16z^8 - 25z^6 + 9z^4$  і  $20z^8 - 33z^6 + 13z^4$  відповідно.

У теорії квантових графів розглядають спектральні задачі, породжені рівняннями Штурма–Ліувілля на рівнобічних метричних графах з ребрами однакової довжини, з крайовими умовами Неймана або Діріхле на висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана (умовами неперервності і Кірхгофа) у внутрішніх вершинах. Тут також виникає проблема коспектральності.

<sup>1</sup> Відповідальний за листування, e-mail: vpivovarchik@gmail.com.

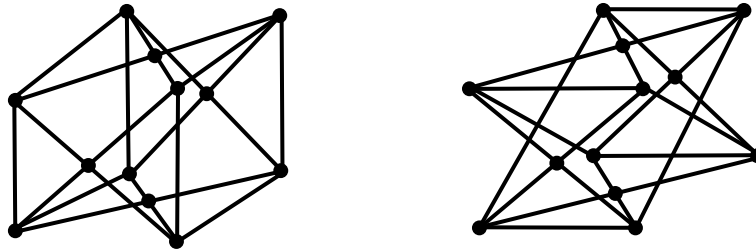


Рис. 2. Неізоморфні графи з однаковими спектрами дискретного лапласіана.

У [18] показано, що існують коспектральні графи (неізометричні графи з однаковим спектром задачі Штурма–Ліувілля) у квантовій теорії графів. Приклад двох коспектральних неізоморфних рівнобічних графів із роботи [18] наведено на рис. 2.

Слід зауважити, що у випадку графа з несумірними довжинами ребер спектр однозначно визначає форму графа [12]. Зазначимо, що графи на рис. 2 регулярні і мають однакову кількість ребер. Неважко переконатися, що два неізоморфні регулярні графи з нульовими потенціалами на ребрах з однаковою кількістю вершин мають однаковий спектр дискретного лапласіана тоді й лише тоді, коли вони мають однаковий спектр матриці суміжності. Але це правильно лише для регулярних графів.

Спектр задачі теорії квантових графів пов'язаний з дискретним лапласіаном відповідного комбінаторного графа таким чином: власні значення дискретного лапласіана взаємно однозначно пов'язані з другими членами асимптотики власних значень задачі Штурма–Ліувілля з (узагальненими) умовами Неймана на вершинах цього графа (див. [5], де використано результати [3, 4, 9]). Це дає змогу отримати інформацію про форму графа, використовуючи асимптотику власних значень.

У [2, 13] доведено „геометричну” теорему Амбарцумяна, яка стверджує, що якщо спектр задачі Штурма–Ліувілля з крайовими умовами Неймана такий, як у випадку задачі на інтервалі з умовами Неймана на кінцях та з тотожно нульовим потенціалом, то цей граф є  $P_2$  і потенціал майже скрізь дорівнює нулю. У [5] „геометричну” теорему Амбарцумяна доведено для всіх зв'язних простих рівнобічних графів, кількість вершин яких не перевищує 5, та для дерев з кількістю вершин  $\leq 8$ . Зокрема, ця теорема стверджує, що у цих випадках спектр задачі Штурма–Ліувілля однозначно визначає форму графа.

Проте цей результат не можна поширити на випадок простих зв'язних рівнобічних графів з шістьма вершинами. Графи, зображені на рис. 3, мають однакові перший і другий члени асимптотики власних значень, тобто, наприклад, у випадку нульових потенціалів на ребрах ці графи є коспектральними у квантовомеханічному сенсі (див. нижче теорему 4.5). Цікаво, що ці графи можна отримати поділом вершини у графі  $K_5$  на дві, отже, вони належать до класу так званих пухнастих куль (fuzzy balls, див. [11]).

Виявилося, що збіг спектрів дискретних лапласіанів ще не означає збігу першого і другого членів асимптотики власних значень задачі Штурма–Ліувілля. Додатково потрібно, щоб була однаковою кількість ребер графа. Наприклад, графи, зображені на рис. 4, мають однакові

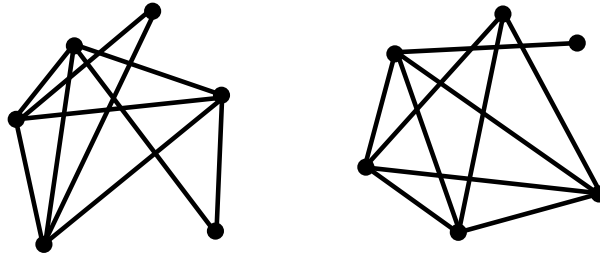


Рис. 3. Неізоморфні графи з шістьма вершинами і з однаковими першим і другим членами асимптотики власних значень задачі Штурма – Ліувілля.

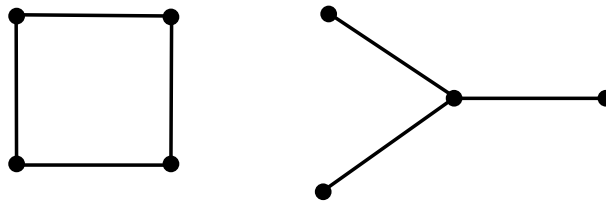


Рис. 4. Неізоморфні графи з однаковим спектром дискретного лапласіана, не коспектральні у квантовомеханічному сенсі.

спектри дискретних лапласіанів, але різні перший і другий члени асимптотики власних значень задачі Штурма – Ліувілля, бо в них різна кількість ребер. Тому в подальшому, шукаючи коспектральні графи, будемо розглядати прості зв'язні рівнобічні графи з однаковою кількістю ребер і однаковими спектрами дискретних лапласіанів.

Відомо [5], що власні значення дискретного лапласіана можна знайти з асимптотики власних значень задачі Штурма – Ліувілля на графі не лише у випадку „амбарцумянівської” асимптотики. Тому припускаючи, що потенціали на ребрах – дійсні  $L_2$ -функції, ми залишаємо їх поза увагою і ставимо питання: чи можна знайти форму простого зв'язного рівнобічного графа, використовуючи асимптотику власних значень задачі Штурма – Ліувілля з умовами Неймана на всіячих вершинах і узагальненими умовами Неймана на внутрішніх вершинах? Також цікаво знати яку інформацію про форму графа можна отримати з асимптотики власних значень у випадку задачі Штурма – Ліувілля з умовами Діріхле на всіячих вершинах. Слід зазначити, що проблема коспектральності для задач з умовами Діріхле на деяких з вершин розглядалася в [1, 16], де запропоновано метод побудови сімей коспектральних графів, який використовує лінійні зображення скінченних груп.

У п. 2 описано спектральну задачу Штурма – Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі з узагальненими умовами Неймана на внутрішніх вершинах та умовами Неймана на всіячих вершинах і другу задачу, яка відрізняється від першої умовами Діріхле на всіячих вершинах.

У п. 3 наведено деякі допоміжні результати. Розглянуто асоційовану скінченновимірну спектральну задачу і показано зв'язок між спектром задачі Штурма – Ліувілля на метричному

графі і спектром дискретного лапласіана цього графа у випадку задачі з умовами Неймана на всіячих вершинах. Також описано зв'язок між спектром задачі Штурма–Ліувілля та спектром модифікованого дискретного лапласіана внутрішнього підграфа у випадку задачі з умовами Діріхле на всіячих вершинах.

У п. 4 показано, що для простих зв'язних рівнобічних графів з кількістю вершин  $p \leq 5$  перший та другий члени асимптотики власних значень задачі Штурма–Ліувілля з умовами Неймана на всіячих вершинах і узагальненими умовами Неймана у внутрішніх вершинах однозначно визначають форму графа. Такий же результат справедливий для дерев, кількість вершин у яких не перевищує 8. Також показано, що серед простих зв'язних рівнобічних графів з шістьма вершинами існує лише одна пара з однаковими першим і другим членами асимптотики власних значень.

У п. 5 розглянуто спектральну задачу Штурма–Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі з умовами Діріхле на всіячих вершинах і узагальненими умовами Неймана у внутрішніх вершинах. Тільки у деяких випадках (подвійна зірка) перший і другий члени асимптотики однозначно визначають форму графа. Однак більше інформації можна отримати щодо форми внутрішнього підграфа, тобто підграфа, отриманого видаленням всіячих вершин разом з інцидентними з ними ребрами (листами).

**2. Постановка задач.** Нехай  $G$  — простий зв'язний рівнобічний граф з  $g$  ребрами довжини  $l$  кожне,  $p$  вершинами і  $p_{pen}$  всіячими вершинами. Позначимо через  $v_i$  вершини, через  $d(v_i)$  їх степені, через  $e_j$  ребра графа. Спрямуємо ребра, інцидентні з всіячими вершинами, від всіячих вершин. Орієнтація всіх інших ребер нехай буде довільною. Так, для внутрішньої вершини  $v_i$  ми розглядаємо її степінь входу  $d^+(v_i)$  і степінь виходу  $d^-(v_i) = d(v_i) - d^+(v_i)$ . Позначимо через  $W^-(v_i)$  множину індексів  $j_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, d^-(v_i)$ , ребер, що виходять з  $v_i$ , а через  $W^+(v_i)$  множину індексів  $k_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, d^+(v_i)$ , ребер, що входять у  $v_i$ . Локальні координати на ребрах ототожнюють кожне ребро  $e_j$  з інтервалом  $[0, l]$  так, що локальна координата зростає у напрямку ребра. Це означає, що кожна всіяча вершина має координату 0.

Кожна внутрішня вершина має локальну координату  $l$  на кожному вхідному ребрі та координату 0 на кожному вихідному ребрі. Функції  $y_j$  на ребрах повинні задовольняти  $g$  скалярних рівнянь Штурма–Ліувілля

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad j = 1, 2, \dots, g, \quad (1)$$

де  $q_j$  — дійсні  $L_2(0, l)$ -функції. У внутрішній вершині  $v_i$  з вихідними ребрами  $e_j$ ,  $j \in W^-(v_i)$ , та вхідними ребрами  $e_k$ ,  $k \in W^+(v_i)$ , накладаємо умови неперервності

$$y_j(0) = y_k(l) \quad (2)$$

та умову Кірхгофа

$$\sum_{k \in W^+(v_i)} y_k'(l) = \sum_{j \in W^-(v_i)} y_j'(0). \quad (3)$$

Накладаємо умови Неймана

$$y_j'(0) = 0 \quad (4)$$

у висячих вершинах  $v_j$ ,  $j = r + 1, r + 2, \dots, p_{pen}$ , та умови Діріхле

$$y_j(0) = 0 \quad (5)$$

у решті висячих вершин  $v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ ,  $0 \leq r \leq p_{pen}$ .

Позначимо через  $s_j(\sqrt{\lambda}, x)$  розв'язок рівняння Штурма–Ліувілля (1) на ребрі  $e_j$ , який задовольняє умови  $s_j(\sqrt{\lambda}, 0) = s'_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$ , а через  $c_j(\sqrt{\lambda}, x)$  розв'язок, який задовольняє умови  $c_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'_j(\sqrt{\lambda}, 0) = 0$ . Тоді *характеристичну функцію*  $\phi(\lambda)$ , тобто цілу функцію, множина коренів якої збігається зі спектром задачі (1)–(5), можна виразити через  $s_j(\sqrt{\lambda}, l)$ ,  $s'_j(\sqrt{\lambda}, l)$ ,  $c_j(\sqrt{\lambda}, l)$  і  $c'_j(\sqrt{\lambda}, l)$ . Для цього розглянемо систему вектор-функцій  $\psi_j(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, s_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$  і  $\psi_{j+g}(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, c_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$  для  $j = 1, 2, \dots, g$ . Як у [17], позначимо через  $L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2g$ , лінійні функціонали, породжені рівняннями (1)–(5). Тоді  $\Phi(\lambda) = \|L_j(\psi_k(\lambda, l))\|_{j,k}^{2g}$  – характеристична матриця, яка представляє систему лінійних рівнянь, що описують умови неперервності та умови Кірхгофа у внутрішніх вершинах. Назвемо

$$\phi(\lambda) := \det(\Phi(\lambda))$$

*характеристичною функцією* задачі (1)–(5).

**3. Допоміжні результати.** Для простого графа матриця  $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^p$ , де  $A_{i,i} = 0$  для всіх  $i = 1, 2, \dots, p$  і

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i \text{ та } v_j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{якщо не суміжні,} \end{cases}$$

називається матрицею *суміжності*.

Нехай

$$D = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$$

– матриця степенів вершин. Тоді  $\tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2}$  назвемо *дискретним лапласіаном*.

Нехай  $G$  – простий зв'язний рівнобічний граф з  $g \geq 2$  ребрами. Нехай  $r$ ,  $0 \leq r \leq p_{pen}$ , – кількість висячих вершин з умовою Діріхле. На решті висячих вершин ми накладаємо умову Неймана. Позначимо через  $\hat{G}$  граф, отриманий шляхом видалення висячих вершин, на яких накладено умови Діріхле, та інцидентних з ними ребер. Для зручності позначимо вершини графа  $\hat{G}$  через  $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_p$ . Нехай  $\hat{A}$  – матриця суміжності графа  $\hat{G}$ . Позначимо  $\hat{D}_G = \text{diag}\{d(v_{r+1}), d(v_{r+2}), \dots, d(v_p)\}$ , де  $d(v_i)$  – ступінь вершини  $v_i$  у графі  $G$ . Розглянемо многочлен  $P_{G,\hat{G}}(z) := \det(z\hat{D}_G - \hat{A})$ .

Наступну теорему було доведено у [15] (теорема 6.4.2).

**Теорема 3.1.** *Нехай  $G$  – простий зв'язний рівнобічний граф з не менше ніж двома ребрами довжини  $l$  кожне та з однаковим потенціалом на ребрах, симетричним щодо середини ребра ( $q(l-x) = q(x)$ ).*

*Тоді спектр задачі (1)–(5) збігається з множиною коренів характеристичної функції*

$$\phi_D(\lambda) = s^{g-p+r}(\sqrt{\lambda}, l)P_{G,\hat{G}}(c(\sqrt{\lambda}, l)),$$

де  $s(\sqrt{\lambda}, x)$  і  $c(\sqrt{\lambda}, x)$  – розв'язки рівняння Штурма–Ліувілля на ребрі, які задовольняють умови  $s(\sqrt{\lambda}, 0) = s'(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$  і  $c(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'(\sqrt{\lambda}, 0) = 0$ .

**4. Спектральна задача у випадку умов Неймана на всіячих вершинах графа.** В цьому пункті розглянемо випадок умов Неймана на всіх всіячих вершинах ( $r = 0$ ), тобто задачу (1)–(4).

**Теорема 4.1** (теорема 4.1 [5]). *Нехай  $g \geq p$ . Власні значення задачі (1)–(4) можна подати як об'єднання підпоследовностей  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{p+g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  з такою асимптотикою ( $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ ):*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p, \quad (6)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p \quad (7)$$

$i$ , якщо  $q > p$ ,

$$\sqrt{\lambda_k^{(2p+i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, q-p, \quad (8)$$

де  $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$  — власні значення дискретного лапласіана.

Тепер з'ясуємо, яку інформацію про форму графа можна отримати з асимптотики власних значень.

**Теорема 4.2.** *Нехай  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  — спектр задачі (1)–(4) для простого зв'язного рівнобічного графа, який складається з підпоследовностей  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{p+g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p)}} = \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p,$$

$i$ , якщо  $q > p$ ,

$$\sqrt{\lambda_k^{(2p+i)}} = \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, q-p,$$

де  $0 < p \leq 5$ ,  $p \leq q$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Тоді цей спектр однозначно визначає форму графа та довжину його ребра.

**Доведення.** З теореми 5.4 статті [3] випливає, що  $|\lambda_k^{(j)} - \tilde{\lambda}_k^{(j)}| \leq C < \infty$ , де  $\tilde{\lambda}_k^{(j)}$  — власні значення задачі (1)–(4) на тому ж графі з  $q_j \equiv 0$  для всіх  $j$ . Тому наявність потенціалів не впливає на перший і другий члени асимптотики власних значень. За умов теореми  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{p+g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  — спектр задачі (1)–(4) на простому зв'язному графі, тому спектр такої задачі з тотожно нульовими потенціалами на ребрах можна подати як об'єднання підпоследовностей з асимптотикою

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i+p)}} = \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p$$

і, якщо  $q > p$ ,

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(2p+i)}} = \frac{\pi k}{l} \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, q - p.$$

Всі можливі спектри задачі (1)–(4) на простих зв'язних графах з асимптотиками (6)–(8) описано у [5], де  $\gamma_i = \frac{1}{l} \arccos \alpha_i$ , а  $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$  – власні значення відповідних дискретних лапласіанів. Відповідні графи наведено у [5].

Таким чином, множина  $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$  та кількість ребер  $g$  однозначно визначають форму графа, якщо  $p \leq 5$ . Множину  $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$  та кількість ребер  $g$ , а також довжину ребра  $l$  можна знайти з асимптотики.

Теорему доведено.

**Теорема 4.3** (теорема 5.3 з [5]). *Нехай  $T$  – дерево. Власні значення задачі (1)–(4) можна подати як об'єднання підпоследовностей  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2p-3} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad (9)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p-2)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad (10)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (11)$$

Тут  $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p = -1$  – власні значення дискретного лапласіана  $\tilde{A}$ .

Доведення наступної теореми повторює доведення теореми 4.2.

**Теорема 4.4.** *Нехай спектр  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  задачі (1)–(4) на простому зв'язному рівнобічному графі складається з підпоследовностей  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2p-3} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1,$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+p-2)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1,$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

з  $0 < p \leq 8$ .

Тоді цей граф – дерево, множина  $\{\alpha_i\}_{i=2}^{p-1}$ , де  $\alpha_i = \cos \gamma_i l$ , та довжина ребра  $l$ , отримана з першого члена асимптотики, однозначно визначають форму дерева.

Всі можливі спектри, що відповідають деревам з кількістю вершин  $p \in \{6, 7, 8\}$ , складаються з підпоследовностей (9)–(11), де  $\gamma_i = \frac{1}{l} \arccos \alpha_i$ , а  $\{\alpha_i\}_{i=1}^p$  – власні значення відповід-

ного дискретного лапласіана, тобто корені одного з многочленів, наведених у [5]. Відповідні дерева показано в [5].

З доведення теореми 4.2 випливає, що, знаючи перший і другий члени асимптотики, ми не можемо розрізнити два графи, тільки якщо кількість вершин у цих графах однакова, кількість ребер однакова та множини  $\{\alpha_k\}_{k=1}^p$ , що відповідають цим графам, однакові. Останнє означає, що характеристичний многочлен  $\det(zI - \tilde{A})$ , що відповідає одному з цих графів, дорівнює многочлену, що відповідає другому графу (можливо, помноженому на ненульову сталу). Порівнюючи ці дані для всіх неізоморфних простих зв'язних графів з шістьма вершинами (всі ці графи наведено в [6]), приходимо до висновку, що єдина пара коспектральних графів з шістьма вершинами з однаковою кількістю ребер та з однаковими наборами  $\{\alpha_i\}_{i=1}^6$  — це графи, зображені на рис. 3. набір  $\{\alpha_i\}_{i=1}^6$  є множиною коренів многочлена, заданого рівнянням (15) (див. нижче). Таким чином, отримуємо таку теорему.

**Теорема 4.5.** 1. Нехай спектр  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$  задачі (1)–(4) для простого зв'язного рівнобічного графа складається з підпослідовностей  $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{16} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ , які мають асимптотику

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, 6, \quad (12)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i+6)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, 6, \quad (13)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(12+i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, 3, 4, \quad (14)$$

де набір  $\{\alpha_i\}_{i=1}^6 = \{\cos \gamma_i l\}_{i=1}^6$  не збігається з множиною коренів многочлена

$$P_{G,G}(z) = 256z^6 - 224z^4 - 64z^3 + 21z^2 + 10z + 1 = (z-1)(4z+1)^3(4z^2+z-1). \quad (15)$$

Тоді асимптотика (12)–(14) однозначно визначає форму графа.

2. Два неізоморфні графи, зображені на рис. 3, мають однакові перший і другий члени асимптотики (12)–(14) і однаковий характеристичний многочлен (15). Отже, в цьому випадку перший і другий члени асимптотики власних значень не визначають однозначно форму графа.

**5. Спектральна задача з крайовими умовами Діріхле на висячих вершинах.** У цьому пункті розглянемо спектральну задачу (1)–(3), (5) ( $r = p_{pen}$ ), тобто задачу Штурма–Ліувілля з умовами Діріхле на висячих вершинах. Ребро, інцидентне висячій вершині, назвемо листом, а підграф, отриманий видаленням висячих вершин разом з інцидентними листами, — внутрішнім підграфом. Вочевидь, у загальному випадку не можна очікувати єдиності графа, що відповідає заданому спектру задачі (1)–(3), (5). Але у випадку, коли такий граф не єдиний, можна отримати інформацію щодо форми внутрішнього підграфа. Нижче ми розглянемо конкретні випадки задачі (1)–(3), (5).

**5.1. Граф подвійна зірка.** Розглянемо граф, зображений на рис. 5.

**Теорема 5.1.** Нехай степені внутрішніх вершин  $m$  та  $n$  графа на рис. 5 задовольняють нерівності  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$  і  $mn > 1$ . Тоді спектр задачі (1)–(3), (5) на цьому графі складається з підпослідовностей з асимптотикою

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N},$$



$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_k^{(2)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(3)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(4)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 5, 6, \dots, m+n+1 \quad i \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

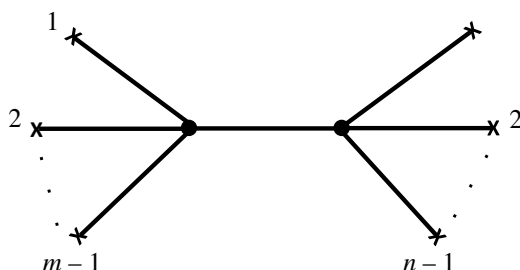


Рис. 5. Граф подвійна зірка.

**Доведення.** В цьому випадку внутрішній підграф — це  $P_2$ , матриця  $\hat{D}_G = \text{diag}\{m, n\}$ ,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

і  $P_{G, \hat{G}} = 1 - mnz^2$ . Отже,  $\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{mn}}$  і  $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{mn}}$ . Використовуючи теорему 3.1, отримуємо

$$\phi_D(\lambda) = s^{m+n-3}(\sqrt{\lambda}l)(1 - mnc^2(\sqrt{\lambda}l)).$$

Використовуючи відомі формули (див. [14])

$$s(\lambda, l) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{=} \frac{\sin \sqrt{\lambda}l}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{e^{|\text{Im}\sqrt{\lambda}l|}}{|\lambda|}\right), \quad c(\lambda, l) \underset{|\lambda| \rightarrow \infty}{=} \cos \sqrt{\lambda}l + O\left(\frac{e^{|\text{Im}\sqrt{\lambda}l|}}{|\sqrt{\lambda}|}\right),$$

отримуємо твердження теореми.

Тепер з'ясуємо яку інформацію про форму графа можна отримати з асимптотики власних значень у цьому випадку.

**Теорема 5.2.** Нехай спектр задачі (1)–(3), (5) на простому зв'язному рівнобічному графі складається з підпослідовностей з асимптотикою

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_k^{(1)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(2)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_k^{(3)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(4)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\lambda_k^{(i)}} &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 5, 6, \dots, s \quad i \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Тоді ця асимптотика однозначно визначає форму графа як подвійної зірки з кількостями листів, інцидентних з внутрішніми вершинами  $m-1$  і  $n-1$  (див. рис. 5), де натуральні числа  $m$  і  $n$  є розв'язком системи рівнянь

$$m + n = s - 1, \quad mn = (\cos \gamma l)^{-2}. \quad (16)$$

Ця система рівнянь має 2 розв'язки, що відповідають ізоморфним графам.

**Доведення.** За теоремою 5.4 з [3] отримуємо, що  $|\lambda_k^{(j)} - \tilde{\lambda}_k^{(j)}| \leq C < \infty$ , де  $\tilde{\lambda}_k^{(j)}$  — власні значення задачі (1)–(3), (5) на тому ж графі з  $q_j \equiv 0$  для всіх  $j$ , і тому наявність потенціалів не впливає на перший і другий члени асимптотики. Отже, за умов теореми спектр  $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{m+n+1} \{\tilde{\lambda}_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  задачі (1)–(3), (5) на простому зв'язному графі з тотожно нульовими потенціалами на ребрах можна подати як об'єднання підпоследовностей з асимптотикою

$$\begin{aligned}\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(1)}} &= \frac{2\pi(k-1)}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(2)}} &= \frac{2\pi k}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(3)}} &= \frac{(2k-1)\pi}{l} + \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(4)}} &= \frac{(2k-1)\pi}{l} - \frac{1}{l} \arccos \frac{1}{\sqrt{mn}} \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \\ \sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} &= \frac{\pi k}{l} \quad \text{для } i = 5, 6, \dots, m+n+1 \quad i \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Множина  $\bigcup_{i=1}^{m+n+1} \{\tilde{\lambda}_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$  є спектром задачі (1)–(3), (5) на графі подвійної зірки, зображеному на рис. 5, з тотожно нульовими потенціалами на ребрах.

Система (16) має два розв'язки, але вони відповідають ізоморфним графам, в яких  $n$  і  $m$  поміняли місцями.

Теорему доведено.

Нижче ми покажемо, що якщо граф більш складний, то асимптотика задачі (1)–(3), (5) в деяких випадках не визначає форму графа.

**5.2. Гусеничне дерево.** Розглянемо граф на рис. 6.

**Теорема 5.3.** Спектр задачі (1)–(3), (5) на графі, зображеному на рис. 6, можна подати як об'єднання підпоследовностей, які мають асимптотику

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(2)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (18)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(3)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(4)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(5)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{(k-1/2)\pi}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad i = 6, 7, \dots, s, \quad (22)$$

де

$$\gamma := \frac{1}{l} \arccos \sqrt{\frac{m_1 + m_3}{m_1 m_2 m_3}}, \quad s = m_1 + m_2 + m_3$$

і  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – степені внутрішніх вершин  $v_1, v_2, v_3$  відповідно.

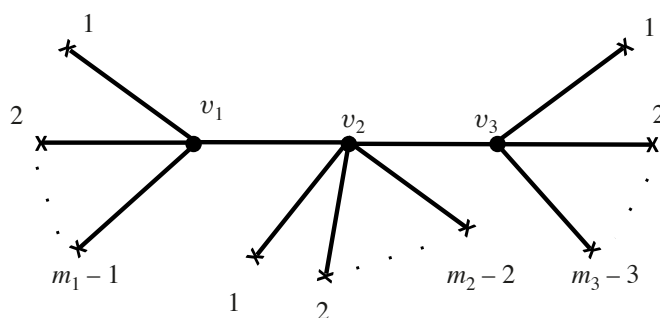


Рис. 6. Граф-гусениця.

**Доведення.** В цьому випадку внутрішній підграф – це  $P_3$ ,  $\hat{D}_G = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\}$ ,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

і  $P_{G, \hat{G}} = (m_1 + m_3)z - m_1 m_2 m_3 z^3$ . Отже, корені цього многочлена – це  $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{m_1 + m_3}{m_1 m_2 m_3}}$ ,  $\alpha_2 = 0$  та  $\alpha_3 = \sqrt{\frac{m_1 + m_3}{m_1 m_2 m_3}}$ . Доведення завершуємо, застосовуючи теорему 3.1, як у доведенні теореми 5.1.

Розглянемо обернену теорему.

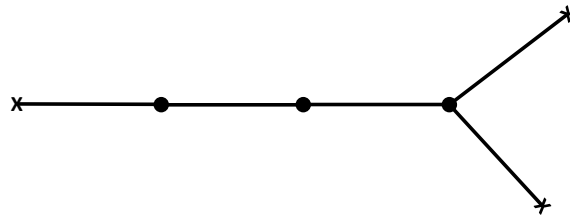


Рис. 7. Граф, що відповідає  $\gamma = \frac{1}{l} \arccos\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)$ , з кількістю ребер 5.

**Теорема 5.4.** Нехай спектр задачі (1)–(3), (5) на простому зв’язному рівнобічному графі складається з підпослідовностей з асимптотикою (17)–(22).

Тоді граф є графом, зображеним на рис. 6, з внутрішнім підграфом  $P_3$  і з числами листів, інцидентних з внутрішніми вершинами  $m_1 - 1, m_2 - 2, m_3 - 1$ , де трійка  $m_1 \geq 1, m_2 \geq 2, m_3 \geq 1$  – розв’язок системи

$$m_1 + m_2 + m_3 = s, \tag{23}$$

$$\frac{m_1 + m_3}{m_1 m_2 m_3} = \cos^2 \gamma l. \tag{24}$$

*Доведення* повторює з відповідними змінами доведення теореми 5.2.

**Зауваження.** 5.1. В деяких випадках граф, що відповідає заданому  $\gamma$  у (17)–(22), яке отримане з асимптотики, і заданій кількості ребер  $(m_1 + m_2 + m_3 - 2)$ , єдиний. Наприклад, якщо кількість ребер  $m_1 + m_2 + m_3 - 2 = 5$  і  $\gamma = \frac{5}{12}$ , то граф має форму, показану на рис. 7.

5.2. Якщо кількість ребер  $m_1 + m_2 + m_3 - 2 = 18$ , а  $\gamma = \frac{1}{16}$ , то існують два коспектральні графи, зображені на рис. 8, що відповідають  $m_1 = m_3 = 8, m_2 = 4$  і  $m_1 = m_3 = 2, m_2 = 16$  відповідно.

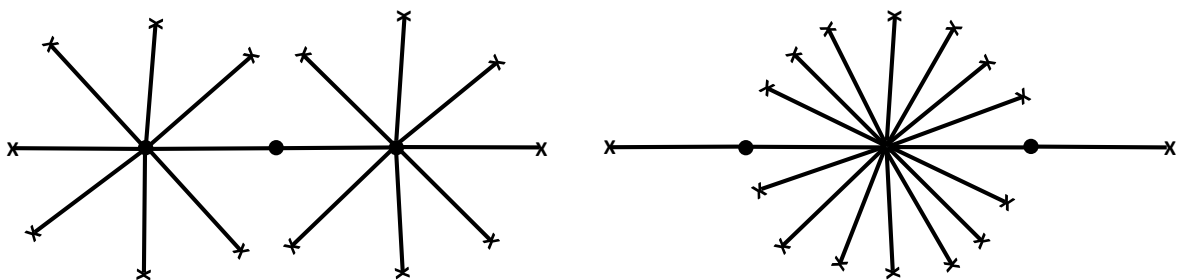


Рис. 8. Граф, що відповідає  $\gamma = \frac{1}{l} \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$  з кількістю ребер 18.

**5.3. Граф декорованого трикутника.** Графом декорованого трикутника ми називаємо граф, зображений на рис. 9.

**Теорема 5.5.** Спектр задачі (1)–(3), (5) для графа, зображеного на рис. 9 складається з підпослідовностей, які мають асимптоту

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (25)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad i = 4, 5, 6, \quad (26)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } k \in \mathbb{N}, \quad i = 7, 8, \dots, s, \quad (27)$$

де  $s = m_1 + m_2 + m_3$ , числа  $m_i$  – степені внутрішніх вершин графа,  $\gamma_i := \frac{1}{l} \arccos \tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а  $\tau_i$  – корені многочлена

$$P_{G, \hat{G}}(z) = m_1 m_2 m_3 z^3 - sz - 2.$$

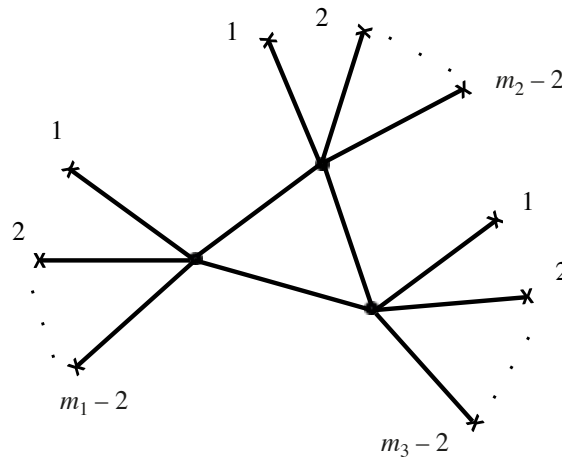


Рис. 9. Декорований граф  $K_3$ .

**Доведення.** Внутрішній підграф у цьому випадку є  $C_3$ , матриця степенів  $\hat{D}_G = \text{diag}\{m_1, m_2, m_3\}$ ,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

і  $P_{G, \hat{G}}(z) = 2 + (m_1 + m_2 + m_3)z - m_1 m_2 m_3 z^3$ . Для завершення доведення достатньо застосувати теорему 3.1.

Розглянемо тепер обернену теорему.

**Теорема 5.6.** Нехай спектр задачі (1)–(3), (5) на простому зв'язному рівнобічному графі складається з підпослідовностей з асимптотикою (25)–(27).

Тоді цей граф є графом декорованого трикутника (внутрішній підграф – це  $C_3$ ). Степені внутрішніх вершин  $m_1, m_2, m_3$  утворюють розв'язок системи рівнянь

$$m_1 m_2 m_3 = \frac{2}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}, \quad (28)$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = s. \quad (29)$$

*Доведення* повторює з відповідними змінами доведення теореми 5.2.

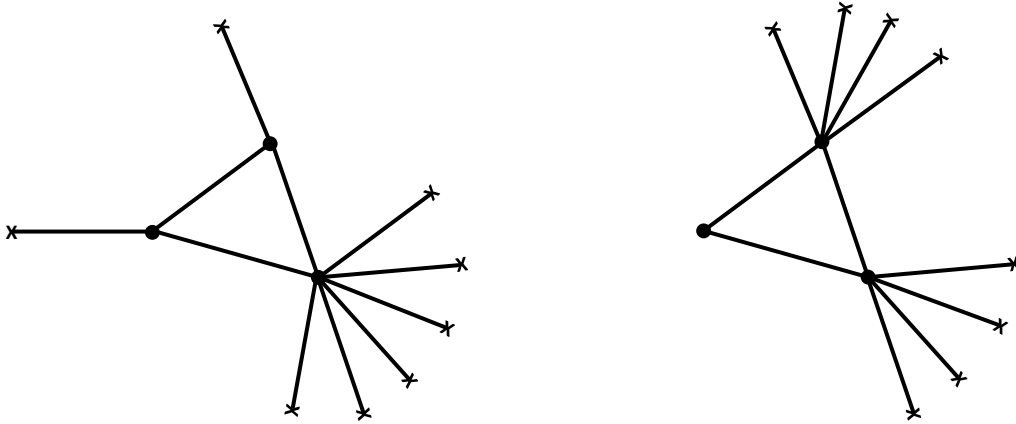


Рис. 10. Неізоморфні графи з однаковими першим і другим членами асимптотики власних значень задачі Штурма – Ліувілля з умовами Діріхле на висячих вершинах.

**Зауваження 5.3.** Розв’язок системи (28), (29) єдиний у випадку  $s = 9$  і  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{2}{27}$ . У цьому випадку асимптотика (25)–(27) однозначно визначає форму графа, а кожна внутрішня вершина має один інцидентний лист. Якщо ж  $s = 10$  і  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{1}{18}$ , то розв’язок системи (28), (29) не єдиний, але ці розв’язки приводять до ізоморфних графів. Таким чином, у цьому випадку також асимптотика спектра однозначно визначає форму графа. Однак у випадку з  $s = 14$  і  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \frac{1}{36}$  система (28), (29) має розв’язки  $m_1 = m_2 = 3$ ,  $m_3 = 8$  і  $m_1 = m_2 = 6$ ,  $m_3 = 2$ , які відповідають неізоморфним графам, зображеним на рис. 10.

Вячеслав Пивоварчик вдячний Міністерству освіти і науки України за підтримку в роботі за темою „Штучні матеріали як основа створення новітніх біосенсорів”.

## Література

1. R. Band, O. Parzanchevski, G. Ben-Shach, *The isospectral fruits of representation theory: quantum graphs and drums*, J. Phys. A: Math. and Theor., **42**, Article 175202 (2009); DOI:10.1088/1751-8113/42/17/175202.
2. J. Boman, P. Kurasov, R. Suhr, *Schrödinger operators on graphs and geometry II. Spectral estimates for  $L_1$ -potentials and an Ambartsumian theorem*, Integral Equat. and Oper. Theory, **90**, № 3 (2018); <https://doi.org/10.107/s00020-0182467-1>.
3. R. Carlson, V. Pivovarchik, *Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths*, J. Phys. A: Math. and Theor., **41**, Article 145202 (2008).
4. C. Cattaneo, *The spectrum of the continuous Laplacian on a graph*, Monatsh. Math., **124**, № 3, 215–235 (1997).
5. A. Chernyshenko, V. Pivovarchik, *Recovering the shape of a quantum graph*, Integral Equat. and Oper. Theory, **92**, Article 23 (2020).
6. A. Chernyshenko, V. Pivovarchik, *Cospectral quantum graphs*; arXiv:2112.14235 [math-ph] 23 Mar 22.
7. L. Collatz, U. Sinogowitz, *Spektren endlicher Grafen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg, **21**, 63–77 (1957).
8. D. M. Cvetkovic’, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of graphs – theory and applications*, Acad. Press, New York (1980).
9. P. Exner, *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A, **66**, 359–371 (1997).

10. Fan R. K. Chung, *Spectral graph theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997).
11. S. Butler, J. Grout, *A construction of cospectral graphs for the normalized Laplacian*, Electronic J. Combin., **18**, № 1, 1–20 (2011).
12. B. Gutkin, U. Smilansky, *Can one hear the shape of a graph?*, J. Phys. A: Math. and Gen., **34**, 6061–6068 (2001).
13. P. Kurasov, S. Naboko, *Rayleigh estimates for differential operators on graphs*, J. Spectr. Theory, **4**, № 2, 211–219 (2014).
14. V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications, revised edition*, AMS Chelsea Publ., Providence, RI (2011).
15. M. Möller, V. Pivovarchik, *Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs*, Oper. Theory: Adv. and Appl., **283**, Birkhäuser/Springer (2020); <https://www.springer.com/gp/book/9783030604837>.
16. O. Parzanchevski, R. Band, *Linear representations and isospectrality with boundary conditions*, J. Geom. Anal., **20**, 439–471 (2010); DOI 10.1007/s12220-009-9115-6.
17. Yu. Pokornyy, O. Penkin, V. Pryadiev, A. Borovskiy, K. Lazarev, S. Shabrov, *Differential equations on geometric graphs* (in Russian), Fizmatlit, Moscow (2005).
18. J. von Below, *Can one hear the shape of a network*, Partial Differential Equations on Multistructures, Lect. Notes Pure and Appl. Math., **219**, 19–36 (2001).

Одержано 19.10.22